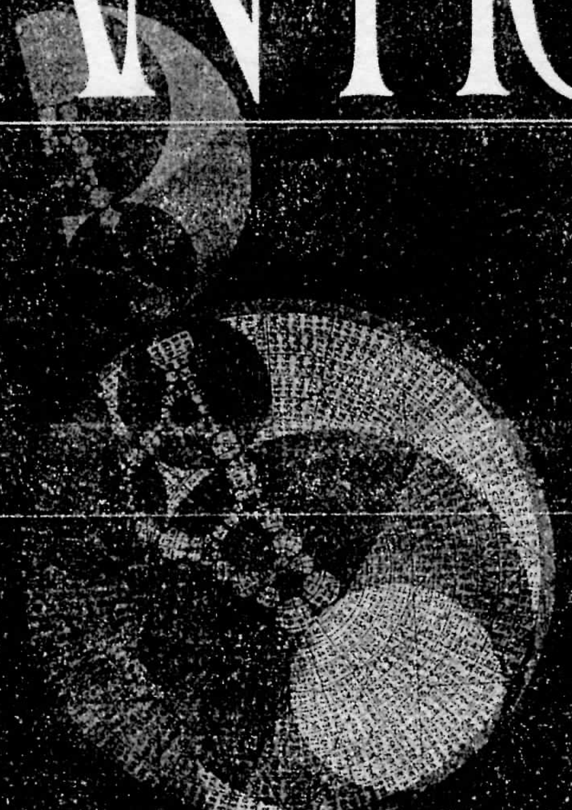
G. POLYA

SÁNG TẠO TOÁN HỌC



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

G. POLYA

Phan Minh Tài

SÁNG TẠO TOÁN HỌC

Người dịch:
NGUYỄN SỸ TUYỂN
PHAN TẤT ĐẮC
HỒ THUẦN
NGUYỄN GIẢN

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Công ti Cổ phần Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội - Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam
giữ quyền công bố tác phẩm.

40-2010/CXB/87-10/GD

Mã số: 8I695H0-ĐTH

LỜI NGƯỜI DỊCH

Đây là bản dịch cuốn sách thứ ba trong bộ sách nổi tiếng của nhà toán học và sư phạm Mĩ G. Polya (1887 - 1895).

- *Giải một bài toán như thế nào?* (How to solve it, 1945);

- *Toán học và những suy luận có lí* (Mathematics and plausible raisonning, 1953);

- *Sáng tạo toán học* (Mathematical Discovery, 1964).

Theo nhà toán học Pháp J. Hadamard, "giữa việc giải một bài toán đại số hay hình học của học sinh và sự phát minh, cái khác nhau chỉ là ở mức độ và chất lượng, bởi vì cả hai việc đó đều có cùng một tính chất". Tính chất chung đó là sự sáng tạo. Trong cuốn sách này, với sự hiểu biết uyên bác kết hợp với những kinh nghiệm giảng dạy và nghiên cứu của bản thân, G. Polya đã phân tích một cách sinh động quá trình sáng tạo toán học qua việc giải nhiều bài toán ở nhiều trình độ và hướng dẫn bạn đọc sử dụng một số phương pháp tư duy nhằm giải toán thành thạo hơn.

Mặc dù ra đời đã hơn 50 năm, sách của Polya vẫn có giá trị độc đáo của nó, khi chúng ta luôn đặt lên hàng đầu việc *rèn luyện tư duy, phát triển trí thông minh sáng tạo qua việc học toán học*. Vì vậy, cuốn sách không chỉ cần thiết đối với các thầy cô giáo dạy toán ở mọi cấp mà còn rất bổ ích với đông đảo các bạn học sinh, sinh viên.

Trong lần xuất bản này, chúng tôi đã sửa chữa một số sai sót và cập nhật kiến thức mới. Tuy nhiên, bản dịch chắc chắn vẫn chưa hoàn thiện, mong bạn đọc lượng thứ. Mọi thư từ liên lạc xin gửi về: Ban biên tập Tin học – Nhà xuất bản Giáo dục tại Hà Nội – 187B Giảng Võ - Đống Đa – Hà Nội.

Hà Nội, tháng 9 năm 2008

Những người dịch

LỜI TỰA

Một phương pháp giải được coi là tốt nếu như ngay từ đầu ta có thể thấy trước và sau đó có thể khẳng định được rằng theo phương pháp đó ta sẽ đạt tới đích.

LEIBNIZ

1. Quá trình giải một bài toán là đi tìm một lối thoát ra khỏi khó khăn hoặc một con đường vượt qua trở ngại, đó chính là quá trình đạt tới mục đích mà thoạt nhìn dường như không thể đạt được ngay. Giải bài toán là khả năng riêng biệt của trí tuệ, còn trí tuệ chỉ có ở con người, vì vậy giải bài toán được xem như những biểu hiện đặc trưng nhất trong hoạt động trí óc của con người. Mục đích của cuốn sách này là nhằm làm sáng tỏ nét đặc trưng của hoạt động đó, tìm cách tập trung phát triển những khả năng tương ứng của bạn đọc và sau cùng hướng dẫn bạn đọc giải toán thành thạo hơn.

2. Cuốn sách này gồm hai phần. Chúng tôi xin nêu vắn tắt vai trò của từng phần.

Giải bài toán là nghệ thuật được thực hành giống như bơi lội, trượt tuyết hay chơi đàn vậy. Có thể học được nghệ thuật đó, chỉ cần bắt chước theo những mẫu mực đúng đắn và thường xuyên thực hành. Trong cuốn sách này, bạn sẽ không tìm thấy chiếc chìa khoá để mở mọi cửa ngõ. Cuốn sách này không dạy các bạn giải tất cả các bài toán, nhưng có nêu lên nhiều bài mẫu hay để làm theo và tạo nhiều khả năng để tập dượt. Nhưng xin nhớ rằng: nếu bạn muốn tập bơi thì hãy mạnh dạn nhảy xuống nước, còn nếu bạn muốn giải bài toán thì hãy bắt tay vào giải đi.

Nếu muốn cho các nỗ lực của mình mang lại lợi ích tối đa, bạn hãy cố gắng ghi nhận lấy trong những bài toán đang giải những điều có thể rất bổ ích để giải các bài toán khác. Cách giải do bản thân bạn nỗ lực tìm ra hoặc do bạn học được trong sách hay khi nghe giảng (nhưng nhất thiết phải có hứng thú thực sự và khát vọng đi sâu vào bản chất của vấn đề) có thể biến thành một phương pháp, một mẫu mà theo đó có thể giải thành công các bài toán khác. Phần đầu cuốn sách này có mục đích giới thiệu với bạn đọc một số phương pháp bổ ích.

Tất nhiên, bắt chước một cách giải đã có thì dễ nếu như bài toán mới rất giống bài toán bạn đã biết. Song, nếu các bài toán lại không giống nhau nhiều lắm thì việc bắt chước như vậy cực kì khó khăn, thậm chí, khó có thể thực hiện được. Người ta thường ấp ủ một khát vọng lớn là mong muốn có được một phương pháp toàn năng để giải bất kì một bài toán nào. Niềm mong ước đó vẫn còn âm ỉ trong lòng đa số chúng ta, nhưng đôi khi nó cũng bộc lộ ra qua các chuyện thần thoại và trong các tác phẩm của một số nhà triết học. (Có thể bạn còn nhớ một chuyện thần thoại về câu thần chú "ước gì, được nấy"). Descartes (Đề-các) đã suy nghĩ nhiều đến một phương pháp toàn năng để giải mọi bài toán. Còn Leibniz (Lép-nít) thì đưa ra một ý niệm hết sức rõ ràng về một phương pháp toàn mĩ. Tuy nhiên, tìm kiếm một phương pháp toàn năng, toàn mĩ chẳng mang lại kết quả gì hơn đi tìm hòn đá thần kì có thể biến mọi kim loại thành vàng. Có những ước mơ lớn lao vẫn chỉ là mơ ước mà thôi. Dù sao những lí tưởng không đạt được cũng không phải là vô ích đâu, chẳng hạn, cho đến nay có ai bay tới được ngôi sao Bắc Đẩu, thế mà nhờ ngắm nhìn nhiều lần ngôi sao ấy người ta đã tìm ra đường đi đúng hướng. Cuốn sách này không thể giới thiệu cho bạn phương pháp toàn năng để giải mọi bài toán mà cũng chẳng có cuốn sách

nào có thể làm được điều đó đâu! Nhưng chính một vài bước đi nhỏ hướng theo lí tưởng chưa đạt được đó cũng có thể giúp bạn phát triển những năng lực và kĩ năng giải toán. Phần thứ hai trình bày những nét đại cương về một số bước đi đó.

3. Tôi muốn gọi công trình nghiên cứu trong cuốn sách này là một công trình nghiên cứu Ơ-ri-xtich(*) bởi vì nó đề cập đến các cách thức và phương pháp giải toán. Thuật ngữ "Ơ-ri-xtich" thường được một số nhà triết học thời trước sử dụng, ngày nay đã bị lãng quên đi, nhưng tôi không ngần ngại sử dụng lại thuật ngữ đó.

Phần lớn của công trình này, về thực tế là một dạng thức thực tiễn hiện thực của Ơ-ri-xtich: tôi cố gắng bằng đủ mọi cách có thể được để lôi cuốn bạn đọc vào giải bài toán và thôi thúc bạn đọc hãy suy nghĩ về các phương pháp và hình thức đã sử dụng.

Trong đa số các chương, phần lớn về cơ bản sẽ vạch ra một cách toàn diện quá trình giải một số bài toán. Đối với nhà toán học nào không quan tâm đến những vấn đề phương pháp thì sự trình bày như thế là quá ư tỉ mỉ. Thật ra, nội dung của các chương này không phải là diễn tả giản đơn quá trình giải mà là phân tích về mặt phương pháp việc giải toán. Phân tích một số bài toán xác định như vậy làm cho bạn đọc thấy được các bước đi tiếp theo rất quan trọng, nhờ đó tìm được lời giải và vạch ra được những luận cứ và quan điểm đã gợi ra cho các bước đi đó. Ngoài ra, sự trình bày cặn kẽ một bài toán cụ thể còn nhằm mục đích tìm ra một lời khuyên khái quát hoặc một phương pháp mà bạn đọc có thể tuân theo trong những tình huống tương tự. Lời khuyên hay phương pháp như vậy thường được phát biểu một cách trọn vẹn trong một mục riêng, tuy vậy những phát biểu sơ bộ thường xen lẫn vào quá trình phân tích phương pháp giải.

Mỗi chương đều kết thúc bằng các bài tập và chú thích bổ sung. Bạn đọc nào làm được bài tập đó không những có thể vận dụng và hiểu rõ hơn các nhận xét về mặt phương pháp của chương mà còn có thể phát triển những nhận xét đó nữa. Các chú thích bổ sung xen giữa các bài tập hoặc sẽ giải thích rộng vấn đề hơn hoặc sẽ là những lời bình luận thêm vào.

Tất nhiên tôi sẽ cố hết sức kiên trì khơi gợi tính tích cực của bạn đọc và không biết tôi có thể làm được điều đó tới mức độ nào. Tôi cố gắng đưa vào cuốn sách này những thủ thuật có hiệu quả nhất trong các giờ giảng trên lớp của tôi. Bằng cách phân tích tiến trình giải, tôi muốn đưa bạn đọc vào bầu không khí nghiên cứu khoa học. Nhờ cách chọn lựa, diễn đạt và sắp xếp các bài toán (các cách diễn đạt và sắp xếp bài toán đó vô cùng quan trọng và đòi hỏi một công sức cực kì to lớn mà một bạn đọc không am hiểu khó có thể hình dung hết được) tôi sẽ thôi thúc bạn đọc, phát huy óc tò mò và sáng kiến, mở ra trước bạn đọc những khả năng rộng lớn để làm quen với mọi tình huống đa dạng thường gặp trong công tác nghiên cứu khoa học.

4. Phần lớn nội dung cuốn sách này dành cho những vấn đề toán học. Những vấn đề phi toán học thường ít gặp, nhưng chúng hay có mặt ở hậu trường một cách kín đáo. Tôi luôn cố gắng làm sao để thấy được chúng và ở những chỗ có thể được, thảo luận những vấn đề toán học bằng những phương pháp đã từng làm sáng tỏ những vấn đề có bản chất khác.

(*) Thuật ngữ này có nguồn gốc Hi Lạp: Ơ-rê-ca có nghĩa là "tôi đã tìm ra". Theo truyền thuyết thì dường như Ac-si-met đã từ buồng tắm chạy lao ra đường phố và kêu lên tiếng đó sau khi ông vừa tìm ra được cách giải bài toán do vua Hê-rôn đặt ra cho ông. Ơ-ri-xtich là khoa học về phát minh.

Phần nhiều các bài toán được xét trong cuốn sách này thuộc loại toán sơ cấp. Tuy nhiên, tư liệu dùng cho cuốn sách này ở một mức độ lớn có tính chất phức tạp hơn, mặc dù chúng ít được dẫn ra. Quả thật là như thế này: nguồn tư liệu cơ bản đối với tôi là những nghiên cứu của bản thân, còn việc khởi thảo đa số các bài toán sơ cấp phản ánh kinh nghiệm mà tôi tích luỹ được khi giải những bài toán phức tạp hơn không có trong cuốn sách này.

5. Cuốn sách này liên kết mục tiêu có tính chất lí luận (nghiên cứu ơ-ri-xtich) với mục tiêu cụ thể có tính chất thực tiễn, lại rất cấp bách, đó là nâng cao chất lượng đào tạo giáo viên trung học.

Tôi có nhiều cơ hội tốt để quan sát và có thể nêu lên một số ý kiến có căn cứ về trình độ đào tạo giáo viên toán cho trường trung học bởi vì các giáo trình mà tôi đã giảng trong vòng năm, sáu năm gần đây nhằm vào đối tượng là các giáo viên. Có lẽ, tôi có thể tự hỏi mình như một nhà quan sát tương đối không thiên kiến và từ vị trí này cần phải nêu ra một ý kiến thật dứt khoát: *công việc đào tạo giáo viên toán cho trường trung học không được thoả đáng*. Có khuyết điểm trong vấn đề này, có lẽ là tất cả các tổ chức và cơ quan có trách nhiệm đào tạo giáo viên, nhưng trước hết cần phải nói đến các trường sư phạm và khoa toán trong các trường cao đẳng. Nếu các trường này muốn cải cách căn bản tình hình đó thì họ phải xem xét lại thật tỉ mỉ yêu cầu của họ đối với việc đào tạo giáo viên.

Cần phải giảng dạy những giáo trình gì cho các giáo viên tương lai của trường trung học? Để trả lời vấn đề đó, trước hết hãy tự hỏi: *đối với học sinh trung học, cần phải đặt những yêu cầu gì?*

Hẳn là bạn cho rằng vấn đề đó chẳng giúp ích gì nhiều do còn đang có các ý kiến tranh cãi và quả thật khó có một giải đáp mà tất cả mọi người đều đồng tình. Tuy nhiên, đối với một khía cạnh nào đó của vấn đề thì ít ra các chuyên gia thuộc cùng một lĩnh vực nhất định hoàn toàn có thể thoả thuận với nhau được.

Quá trình dạy mỗi môn học có mục đích vừa truyền đạt cho các học sinh những thông tin có liên quan đến môn đó, một khối lượng kiến thức nào đó, vừa hình thành cho họ những kĩ năng nhất định. Nếu như bạn đã tích luỹ được kinh nghiệm thực sự trong công tác toán học (dù ở mức độ nào, sơ cấp hay cao hơn) thì bạn sẽ không còn nghi ngờ gì nữa rằng trong toán học, nắm vững bộ môn quan trọng hơn rất nhiều so với một kiến thức thuần tuý mà ta luôn luôn có thể bổ sung nhờ một quyển sách tra cứu thích hợp. Vì vậy, cả trong trường trung học cũng như các trường chuyên nghiệp các cấp, ta không chỉ truyền thụ cho học sinh những kiến thức nhất định mà quan trọng hơn rất nhiều là phải dạy cho họ *nắm vững* được môn học ở một mức độ nào đó.

Vậy thế nào là nắm vững môn toán? Đó là phải biết giải toán, không chỉ những bài toán thông thường mà cả những bài toán đòi hỏi sự tư duy độc lập nhất định, có óc phán đoán, tính độc đáo và sáng tạo nữa. Bởi vậy, nhiệm vụ hàng đầu và chủ yếu nhất của giáo trình toán học ở trường trung học là phải nhấn mạnh *mặt phương pháp của quá trình giải toán*. Tôi quan niệm như vậy đấy, chưa biết chừng bạn không hoàn toàn tán thành đâu, nhưng tôi thiết nghĩ rằng bạn sẽ đồng ý với tôi là quá trình giải toán phải có bản sắc của nó và người giảng viên phải nhấn mạnh vào những khâu nào đó của quá trình ấy.

Người thầy nhất thiết phải biết rõ những điều mà mình sẽ đem ra dạy. Thầy giáo phải chỉ dẫn cho học sinh thấy được giải bài toán như thế nào. Nhưng làm sao thầy giáo có thể chỉ dẫn được khi mà chính mình lại không nắm được vững vàng? Giáo viên phải phấn đấu

để học sinh nắm được môn học tốt hơn, học suy luận tốt hơn. Nhiệm vụ của thầy giáo là phải động viên khuyến khích học sinh tư duy sáng tạo, thế nhưng chương trình mà thầy giáo đã học trước đó không chú ý đúng mức về việc *nắm vững* nội dung cơ bản của môn học, còn việc rèn luyện cho người giáo viên tương lai biết suy luận, biết giải toán và biết tư duy sáng tạo thì nói chung lại không quan tâm đến. Đây có lẽ chính là thiếu sót lớn nhất của hệ thống đào tạo giáo viên toán cho trường trung học hiện nay.

Để khắc phục thiếu sót trên đây, chương trình đào tạo giáo viên phải được mở rộng cho *hoạt động sáng tạo trên một mức độ thích ứng*. Tôi đã thử làm điều đó qua việc lãnh đạo các xê-mi-ne về giải toán. Cuốn sách này bao gồm các tư liệu mà tôi thu thập được cho các xê-mi-ne của mình và những chỉ dẫn cách sử dụng các tư liệu đó (xem "Vài lời khuyên các giáo viên và các thầy giáo dạy giáo viên"). Tôi hi vọng công việc đó sẽ góp phần nâng cao chất lượng đào tạo giáo viên toán và đó cũng là một mục đích cụ thể cho cuốn sách này.

Tôi tin rằng sự chú ý thường xuyên đến hai mục tiêu, mục tiêu lí luận và mục tiêu thực tiễn nói ở trên, cho phép tôi trình bày được tốt hơn. Tôi cũng hi vọng rằng yêu cầu của các bạn đọc khác nhau đối với cuốn sách này sẽ không mâu thuẫn với nhau (đối với một số bạn đọc yêu cầu đó có thể là những vấn đề đại cương về giải toán, các bạn đọc khác thì muốn phát triển khả năng giải toán của mình, còn đối với loại bạn đọc thứ ba thì yêu cầu đó là phát triển khả năng giải toán của các học sinh mà họ đang phải dạy). Điều mà bạn đọc này cảm thấy là quan trọng nhất chắc chắn cũng có ý nghĩa đối với các bạn đọc khác.

6. Cuốn sách này tiếp tục con đường đã được mở ra trong hai cuốn sách trước của tác giả là *"Giải một bài toán như thế nào?"* và *"Toán học và những suy luận có lí"*(*). Các cuốn sách này về căn bản không trùng lặp mà bổ sung lẫn nhau. Vấn đề được xét trong cuốn sách này cũng được đề cập trong cuốn sách kia nhưng tính chất bàn luận có phần khác nhau (những ví dụ khác, chi tiết khác và dạng thức khác). Tất cả các cuốn sách đó độc lập với nhau và có thể đọc theo bất kì trình tự nào.

7. Bốn chương đầu bao gồm một số lượng bài tập nhiều hơn các chương sau. Về nhiều phương diện, phần thứ nhất giống tuyển tập các bài toán giải tích do G.Xê-gô và tác giả biên soạn. Tuy nhiên, ở đây có những sự khác nhau rõ rệt: các bài toán trong cuốn sách này có tính chất sơ cấp hơn nhiều, còn các chỉ dẫn về phương pháp thì không làm qua loa mà được trình bày tỉ mỉ và được thảo luận.

Chương thứ sáu viết ra là do sự gợi cảm của công trình của Vê-nê Ha-cấp xuất bản cách đây không lâu. Ở đây tôi chỉ chú ý đến một vài dạng thức của công trình Ha-cấp mà tôi cảm thấy là hấp dẫn và tôi trình bày những vấn đề đó dưới hình thức mà tôi cho là phù hợp nhất với quan niệm của tôi về Ơ-ri-xtich. Việc trình bày quan niệm của Ha-cấp thường kèm theo những bài tập thích hợp và các chú thích bổ sung.

Duy-rich, Thụy Sĩ tháng 12/1961 – tháng 10/1964

G.PÔLYA

(*) Các cuốn sách trên đã được dịch ra tiếng Việt – Nhà xuất bản Giáo dục.

MẤY LỜI KHUYÊN VÀ CHỈ DẪN

Mục 5 của chương 2, khi dẫn trong một chương khác, chúng tôi viết là §5 chương 2, nhưng khi nói đến trong chính chương 2, thì viết gọn là §5; mục nhỏ 3 của §5 thuộc chương 2, khi dẫn trong chương khác, chúng tôi viết là m.3 §5 chương 2, nhưng khi chỉ dẫn trong chính chương 2 thì viết gọn là m.3. Nguyên tắc này cũng áp dụng cho các bài tập (và các chú thích bổ sung) và cả cho các lời giải nữa.

Trong sách tôi có dẫn một số chỉ dẫn trong các cuốn "Giải một bài toán như thế nào?" và "Toán học và những suy luận có lí". Dấu *G* đặt trước một bài tập, một chú thích bổ sung, một ví dụ và một mục hay mục nhỏ nào đó, là để chỉ rõ rằng ở đó đòi hỏi phải có những tri thức vượt ra ngoài phạm vi các tri thức sơ cấp (xem đoạn sau). Song trong một số trường hợp, nếu đoạn đó yêu cầu những tri thức cao hơn quá nhỏ mọn, thì chúng tôi cũng không ghi thêm dấu này.

Phần cơ bản của cuốn sách này chỉ đòi hỏi trình độ *toán học sơ cấp,* tức là người đọc chỉ cần nắm được môn hình học, đại số, lập đồ thị (dùng hệ toạ độ) và môn lượng giác trong chương trình trung học.

Các bài toán ít khi đòi hỏi những tri thức vượt ra ngoài phạm vi chương trình trung học, nhưng về mức độ khó thì thường cao hơn trình độ trung học chút ít.

Một số bài toán có nêu lời giải đầy đủ (tuy vắn tắt), đối với một số bài khác, chỉ vạch ra mấy bước giải đầu tiên và đôi khi chỉ đưa ra kết quả cuối cùng.

Một số bài toán có kèm thêm chỉ dẫn để giúp người đọc giải được dễ dàng. Chỉ dẫn cũng có thể nằm trong những bài toán khác ở gần bài toán đang xét. Nên đặc biệt lưu ý đến những nhận xét mở đầu trước từng bài tập hay cả một nhóm bài tập, gặp thấy trong nhiều chương.

Nếu chịu khó, gắng sức giải một bài toán nào đó thì dù có không giải nổi chăng nữa, bạn đọc cũng thu hoạch được nhiều điều bổ ích. Chẳng hạn, bạn đọc có thể lật ra xem (ở cuối sách) phần đầu lời giải, đem đối chiếu với những suy nghĩ của bản thân mình, rồi gấp sách lại và hãy gắng tự lực tìm ra phần còn lại của lời giải.

Có lẽ thời gian tốt nhất để suy nghĩ, nghiền ngẫm về phương pháp giải bài toán là lúc bạn đọc vừa tự lực giải xong bài toán hay vừa đọc xong lời giải bài toán trong sách, hay vừa đọc xong phần trình bày phương pháp giải trong sách. Khi vừa hoàn thành xong nhiệm vụ và các ấn tượng hãy còn "nóng hổi", nhìn lại những nỗ lực vừa qua của mình, bạn đọc có thể phân tích sâu sắc tính chất của những khó khăn đã vượt qua. Bạn đọc có thể tự đặt cho mình nhiều câu hỏi bổ ích: "Khâu nào trong quá trình giải là quan trọng nhất? Khó khăn chủ yếu là ở chỗ nào? Ta có thể làm gì cho tốt hơn? Chi tiết ấy mình cũng đã lướt qua mà không chú ý đến – muốn "nhìn thấy" chi tiết này thì đầu óc phải có tư chất ra sao? Liệu ở đây có một cái gì đó đáng lưu ý để sau này gặp một tình huống tương tự ta có thể áp dụng được không? Tất cả các câu hỏi đó đều hay cả và cũng có nhiều câu hỏi bổ ích khác nữa, nhưng câu hỏi hay nhất chính là câu hỏi tự nhiên nảy ra trong đầu, không cần ai gợi ý cả.

VÀI LỜI KHUYÊN CÁC GIÁO VIÊN VÀ GIẢNG VIÊN

Những giáo viên muốn sử dụng cuốn sách này vào mục đích nghề nghiệp của mình không thể bỏ qua những lời khuyên chung cho các bạn đọc, ngoài ra, còn phải lưu ý đến mấy điều sau đây:

1. Mục đích chính của cuốn sách này là tạo điều kiện thuận lợi cho các giáo viên trung học tương lai (và cả các giáo viên đã ra dạy học) tiến hành công tác nghiên cứu sáng tạo ở trình độ thích hợp với họ. Khó có thể nghĩ rằng một giáo viên dạy toán ở trung học bình thường lại đủ sức đọc được những công trình nghiên cứu nghiêm túc trong lĩnh vực toán học hiện đại. Song, giải những bài toán vượt ra ngoài tiêu chuẩn dĩ nhiên cũng là một hoạt động sáng tạo. Các bài toán nêu trong sách này (không có dấu G, dấu này đôi khi cũng đặt trước một đoạn văn trong sách) không đòi những kiến thức vượt quá giới hạn chương trình trung học, nhưng đòi hỏi một sự tập trung chú ý nhất định (đôi khi rất cao) và những kĩ năng suy luận. Tôi thiết nghĩ, giải các bài toán loại này là một dạng sáng tạo toán học cần thiết phải đưa vào chương trình dạy các giáo viên toán trung học. Trong khi giải các bài toán loại này, người thầy tương lai có thể thu lượm được những kiến thức toán học chân chính và chuẩn bị cho việc truyền thụ kiến thức cho học sinh sau này và đạt được cái đó không phải bằng con đường học thuộc như vẹt, mà bằng con đường vận dụng các tri thức của mình để giải những bài toán lí thú. Đồng thời, người giáo viên tương lai sẽ luyện được những kĩ xảo nhất định trong lĩnh vực toán học sơ cấp và hiểu rõ thực chất của quá trình giải một bài toán. Tất thảy những cái đó đem lại cho người giáo viên khả năng chỉ đạo việc học tập của học sinh và đánh giá việc đó một cách hiệu quả hơn.

2. Các bài toán, bài tập và chú thích nêu trong phần thứ nhất cuốn sách có thể sử dụng trong các giờ học ở trung học (nhất là nếu lại học theo chương trình mở rộng). Mong rằng các giáo viên sẽ suy nghĩ, tìm tòi cách đưa bài toán này hay bài toán khác đọc được trong sách này vào sử dụng trong lớp mình. Nên suy nghĩ về những vấn đề này vào lúc ta đã tìm ra và hiểu thấu lời giải bài toán. Bạn sẽ nhìn lại quá trình giải bài toán và tự hỏi: "Liệu có thể sử dụng bài toán này vào chỗ nào nữa không?", "Muốn giải bài toán này, học sinh cần nắm vững tri thức gì?", "Để chuẩn bị giải bài toán này cần xét những bài toán nào trước!", " Sẽ ra cho học sinh lớp 8 của mình bài toán này như thế nào đây?", "Sẽ ra cho Giôn-xơ bài toán này như thế nào đây?"...

3. Tài liệu cơ bản của cuốn sách này đã được tôi duyệt trong quá trình tổ chức những lớp thảo luận chuyên đề về giải toán cho giáo viên. Những lớp chuyên như vậy, tôi đã từng tổ chức nhiều lần và ở nhiều thành phố, một số bạn đồng nghiệp của tôi cũng đã hướng dẫn nhiều lớp chuyên đề tương tự như thế và họ thường sử dụng tài liệu của tôi. Sau nhiều lần thử nghiệm, tôi đã xây dựng được một thời gian biểu riêng cho buổi thảo luận chuyên đề. Thiết tưởng, giới thiệu thời gian biểu này ra đây cũng là bổ ích.(*)

(*) Một số điều vừa nói trên và sắp nói đến, tôi rút ra từ bài báo đã đăng trước đây (Ten commandements for teachers – Mười điều khuyên nhủ các giáo viên – Journal of Education of the Faculty and College of Education, Vancouver and Victoria, N^0 3 (1959)).

Những bài toán nào có tính chất điển hình, tạo khả năng đi tới một phương pháp tổng quát có ích, sẽ đưa ra thảo luận và giải dưới sự hướng dẫn của giảng viên trong các buổi học ở giảng đường, nội dung bốn chương đầu cuốn sách này sẽ tái hiện các cuộc thảo luận đó chính xác tới chừng mực có thể, trong khi trình bày các buổi học trao đổi miệng. Các bài toán này cuối cùng sẽ dẫn đến chỗ phát biểu một số luận đề tổng quát thuộc về phương pháp – sự việc diễn biến như thế nào, bạn đọc có thể thấy qua nội dung trình bày các chương đó trong sách.

Bài làm về nhà cho các học viên tham gia thảo luận chuyên đề gồm những bài toán (tương tự như những bài toán nêu ở cuối mỗi chương) giúp họ quán triệt, áp dụng và mở rộng phương pháp giải (cùng là những chỉ dẫn về phương pháp kèm theo) đã nghiên cứu trong các buổi nghe giảng.

4. Tôi dùng lớp thảo luận chuyên đề của mình (và đây chính là một trong những nét cơ bản của lớp thảo luận chuyên đề) nhằm giúp các học viên tập luyện cho được những kĩ năng thực hành trong việc thuyết minh ý nghĩa các bài toán và hướng dẫn học sinh của mình giải các bài toán, tức là về thực chất mà nói, tạo một dịp cho học viên làm một loại thực hành sư phạm mà người ta thường quan tâm chưa đủ mức.

Sau khi học viên đã nộp bài làm ở nhà, sẽ đưa vấn đề này hay vấn đề khác (một lời giải độc đáo nhất, phổ biến về một bài toán cùng loại dễ hiểu hơn nào đó) trình bày (trên bảng) trước toàn bộ học viên, người trình bày là học viên nào phân tích vấn đề đó thật hay (hoặc, ngược lại, thật dở). Sau một thời gian, khi các học viên đã khá quen với phong cách làm việc ở giảng đường thì có thể để một học viên nào đó tạm thời giữ cương vị người hướng dẫn trong khi thảo luận. Song hình thức thực hành sư phạm tốt nhất là hình thức học nhóm. Một buổi học nhóm chia ra làm ba giai đoạn.

Trước hết, bắt đầu một buổi thực hành nào đó có tất cả các học viên tham gia, sẽ giao cho mỗi người một bài toán nhất định (chỉ một bài thôi) và người ấy phải giải ngay trên lớp, yêu cầu là ai giải bài người ấy, không được bàn với người khác nhưng có thể nhờ giáo viên giúp đỡ chút ít.

Tiếp đó, trong khoảng thời gian nghỉ giữa giờ, mỗi học viên phải thử lại, bổ sung thêm cho lời giải của mình, suy nghĩ cân nhắc một lần nữa và nếu có thể, thì rút gọn, đơn giản bớt lời giải của mình, cố gắng tìm ra một lối thoát khác cũng dẫn đến kết quả trên và nghiên cứu bài toán bằng tất cả các phương tiện có thể, cho thật đầy đủ, toàn diện, với hết khả năng của mình. Ngoài ra, học viên còn phải lập kế hoạch phân tích lời giải bài toán nữa. Dĩ nhiên, về bất cứ vấn đề gì trong các vấn đề kể trên, học viên đều được quyền hỏi ý kiến tư vấn của người hướng dẫn lớp chuyên đề.

Đến giờ học sau, học viên chia thành nhóm thảo luận. Ghép nhóm như thế nào, do học viên thoả thuận với nhau tự quyết định, người hướng dẫn lớp không can thiệp vào. Trong mỗi nhóm, một người đứng ra đóng vai trò giáo viên, còn những người kia đóng vai trò học sinh. "Thầy giáo" trình bày với "các học trò" bài toán của mình, cố gắng khơi gợi trí sáng tạo và dẫn dắt họ đến chỗ giải được bài toán với phong cách hệt như phong cách của người hướng dẫn viên khi ông ta trình bày trên giảng đường vậy. Sau khi đã giải được bài toán, các nhóm viên cùng nhau thảo luận về giờ học vừa qua. Sau đó một người khác

lại đóng vai trò "thầy giáo" và trình bày bài toán của mình; thủ tục này cứ lặp đi, lặp lại cho đến khi nào tất cả các nhóm viên đều được góp phần trình bày bài toán của mình. Tiếp đó, có thể thay đổi thành phần các nhóm (chẳng hạn, hai nhóm cạnh nhau có thể trao đổi một người bên này sang làm "thầy giáo" bên kia), cốt để mỗi người có điều kiện "mài dũa" tài nghệ của mình hơn nữa, vì được dịp trình bày bài toán mấy lần. Một số bài toán đặc biệt lí thú, hay giờ học nhóm đặc biệt có kết quả sẽ được đưa ra trình bày trước toàn thể lớp học và được thảo luận trong giờ học chung ở giảng đường. Một vài nhóm, theo sáng kiến riêng, có thể đưa ra thảo luận những bài toán mà các học viên khác trong lớp chưa biết đến, dĩ nhiên, trường hợp này cần được khuyến khích.

Cách giải bài toán trong các nhóm mau chóng được phổ biến rộng rãi và tôi có cảm tưởng rằng các lớp thảo luận chuyên đề do tôi tổ chức, nói chung, đã đạt được thành tích tốt. Nhiều học viên sau này đã trở thành những giáo viên có kinh nghiệm và việc học tập trong lớp chuyên đề đã gợi cho một số những học viên những chú ý hay về tổ chức các giờ học ở lớp họ.

5. Cuốn sách này cũng có thể giúp các giảng viên hướng dẫn lớp chuyên đề về giải toán (lần đầu tiên đảm nhiệm công tác này). Trong công tác hướng dẫn này, giảng viên có thể áp dụng thủ tục mô tả trong các mục nhỏ 3 - 4 và có thể sử dụng bất cứ tài liệu nào trong các chương đầu cuốn sách cho các buổi thảo luận trên lớp. Các bài tập ở cuối mỗi chương dùng để ra bài về nhà làm thì rất thích hợp; cần phải chú ý rằng, từ những chỉ dẫn vắn tắt nêu ở cuối sách, trong phần "Lời giải bài tập", đi tới giải đầy đủ được bài toán đôi khi cũng đòi hỏi phải làm việc, suy nghĩ nghiêm túc. Giảng viên không nên chọn hú hoạ, gặp phải bài toán nào lấy bài toán ấy; trước khi ra cho học viên một bài toán nào, giảng viên phải phân tích thật kĩ nội dung đề toán cũng như lời giải, ngoài ra còn phải tìm hiểu cả các bài toán kề với bài đó. Ra đề bài cho các nhóm thảo luận (xem m.4) thì có thể chọn những bài toán khó hơn. Và những bài toán này không nhất thiết phải có liên hệ chặt chẽ với tài liệu thuộc bốn chương đầu mà có thể chọn trong các chương khác cũng được.

Giảng viên nào đã có ít nhiều kinh nghiệm công tác thì dĩ nhiên có thể vẫn theo đúng khuynh hướng của cuốn sách này mà không quá câu nệ từng chi tiết vụn vặt.

PHẦN I. CÁC PHƯƠNG PHÁP ĐẶC BIỆT

Mỗi bài toán tôi giải được đều trở thành kiểu mẫu để sau này giải các bài toán khác.

ĐỀ-CÁC, Bàn về phương pháp

Nếu như tôi đã phát hiện những chân lí mới mẻ nào đó trong khoa học thì tôi có thể khẳng định rằng, tất cả chân lí đó đều hoặc là những hệ quả trực tiếp của năm hay sáu bài toán chủ yếu mà tôi đã giải được hoặc tùy thuộc vào các bài toán đố và tôi xem chúng như những cuộc chiến đấu trong đó niềm vui thắng lợi thuộc về tôi.

ĐỀ-CÁC, Tài liệu đã dẫn

CHƯƠNG 1. PHƯƠNG PHÁP HAI QUỸ TÍCH

§1. DỰNG HÌNH

Vẽ hình hay dựng các hình hình học bằng thước và compa theo truyền thống chiếm một vị trí to lớn trong việc giảng dạy hình học phẳng. Một số cách dựng đơn giản nhất được những người vẽ đồ án sử dụng, còn lại thì giá trị thực tiễn của dựng hình không nhiều lắm và ý nghĩa lí thuyết cũng không lớn. Dù sao đi nữa vị trí của dựng hình trong chương trình giảng dạy hoàn toàn có thể biện minh được, bởi vì đó là một phương tiện thuận lợi nhất để những người mới bắt đầu học hình học làm quen với các hình hình học và là cách thích hợp hơn cả để nắm vững đường lối giải toán. Chính vì những lẽ đó mà chúng ta sẽ thảo luận ở đây vấn đề dựng hình.

Cũng như nhiều truyền thống khác trong việc giảng dạy toán học, dựng hình bắt nguồn từ thời Ơ-clít. Trong hệ thống Ơ-clít dựng hình đóng vai trò quan trọng. Ngay bài toán đầu tiên trong bộ "Cơ bản" của Ơ-clít (phần phụ lục 1, quyển 1) đòi hỏi "dựng một tam giác đều trên một đường thẳng bị giới hạn (đoạn thẳng)". Hệ thống Ơ-clít cho ta một cơ sở đầy đủ để thu hẹp bài toán nếu chỉ hạn chế trong việc xét tam giác đều. Về thực chất cách giải cũng như vậy đối với cả bài toán tổng quát hơn sau đây: *dựng một tam giác biết ba cạnh cho trước.*

Chúng ta sẽ dành ít thời gian để phân tích bài toán đó.

Trong bất cứ bài toán nào cũng có *ẩn* – nếu tất cả đều đã biết rồi thì không còn phải tìm gì nữa, không còn phải làm gì nữa. Trong bài toán của ta, ẩn (điều cần phải tìm) là một hình hình học, hình tam giác.

Trong mỗi bài toán lại còn phải có một điều gì đó đã biết hoặc đã cho (ta gọi những điều đã biết là các *dữ kiện*) – nếu không cho trước cái gì cả thì không có một khả năng nào để nhận ra cái cần tìm: cho dù nó có ở ngay trước mắt ta thì cũng không thể nhận ra được. Trong bài toán trên các dữ kiện là ba "đường thẳng bị giới hạn", tức là ba đoạn thẳng.

Sau cùng, bất kì bài toán nào cũng phải có *điều kiện* để cụ thể hoá mối quan hệ giữa ẩn và các dữ kiện. Điều kiện trong bài toán của ta quy định rằng ba đoạn thẳng cho trước phải là ba cạnh của một tam giác ta cần tìm.

Điều kiện là các yếu tố căn bản của bài toán. Hãy thử so sánh bài toán của ta với bài toán sau đây: "Dựng tam giác biết ba đường cao của nó". Trong cả hai bài toán, các dữ kiện đều như nhau (ba đoạn thẳng), ẩn là một loại hình hình học (tam giác). Tuy nhiên, quan hệ giữa ẩn và các dữ kiện lại khác nhau, điều kiện không như nhau, chính vì vậy mà hai bài toán đó rất khác nhau (bài toán của ta dễ hơn).

Tất nhiên bạn đọc đã biết cách giải bài toán trên. Giả sử a, b và c biểu thị độ dài của ba đoạn thẳng cho trước. Tự đặt đoạn a và gọi hai đầu mút của nó là B và C (bạn đọc hãy tự vẽ lấy). Ta vạch ra hai đường tròn, một đường tròn có bán kính b và tâm ở C, đường tròn kia có bán kính c và tâm ở B. Giả sử A là một trong hai giao điểm của các đường tròn đó. Vậy thì ABC là tam giác cần tìm.

§2. TỪ VÍ DỤ DẪN ĐẾN PHƯƠNG PHÁP

Ta sẽ trở lại cách giải trên và cố phát hiện ở đó những nét đặc trưng mà ta hi vọng có thể sử dụng một cách hiệu quả để giải những bài toán cùng loại khác.

Ta đặt đoạn thẳng a, như vậy là đã cố định hoá hai đỉnh B và C của tam giác cần tìm; chỉ còn phải tìm một đỉnh nữa. Sau khi đặt đoạn thẳng đó, về thực chất ta đã biến đổi bài toán trên thành một bài toán khác, tương tự với nó, nhưng khác bài toán ban đầu. Trong bài toán mới này: ẩn là một điểm (đỉnh thứ ba của tam giác cần tìm); các dữ kiện là 2 điểm (B và C) và hai độ dài b và c; điều kiện đòi hỏi điểm cần tìm phải nằm cách điểm c cho trước một khoảng bằng b và các điểm B cho trước một khoảng bằng c.

Điều kiện này gồm hai phần, trong đó một phần có liên quan đến b và c, phần kia có liên quan đến c và B. *Hãy giữ lại một phần của điều kiện và bỏ qua điều kiện kia. Sau đó thì ẩn được xác định đến mức nào và có thể thay đổi như thế nào?* Điểm trên mặt phẳng nằm cách điểm C cho trước một khoảng b cho trước sẽ vừa không hoàn toàn xác định, vừa không hoàn toàn tuỳ ý: vị trí của nó được giới hạn bằng "quỹ tích" - điểm đó phải thuộc đường tròn tâm C bán kính b, đồng thời nó có thể di chuyển trên đường tròn đó. Điểm chưa biết phải thuộc cả hai quỹ tích như thế và được xác định bởi giao điểm của hai quỹ tích đó.

Ở đây ta nhận thấy một phương pháp ("phương pháp hai quỹ tích") mà ta hi vọng có thể vận dụng có hiệu quả để giải các bài toán dựng hình:

Trước tiên ta đưa bài toán về dựng MỘT điểm.

Sau đó chia điều kiện làm HAI phần, mỗi phần đó đều dẫn đến quỹ tích của điểm chưa biết; mỗi quỹ tích đó hoặc phải là một đường thẳng hoặc phải là một đường tròn.

Các ví dụ bao giờ cũng tốt hơn những cách thức có sẵn bởi vì việc quy định một phương pháp bản thân nó không mang đến cho bạn những lợi ích to lớn. Phương pháp sẽ có những sắc thái mới, trở nên lí thú hơn và quý giá hơn nếu bạn vận dụng nó một cách hiệu quả vào mỗi ví dụ mới.

§3. CÁC VÍ DỤ

Hầu hết các phép dựng trong chương trình của trường trung học đều là các ứng dụng trực tiếp của phương pháp hai quỹ tích.

1. *Vẽ một đường tròn ngoại tiếp một tam giác cho trước.* Ta đưa bài toán này về bài toán dựng tâm đường tròn phải tìm. Như vậy, trong bài toán đó:

ẩn là một điểm mà ta kí hiệu bằng chữ X;

các dữ kiện là ba điểm A, B và C;

điều kiện là sự bằng nhau của ba khoảng cách: $XA = XB = XC$.

Ta chia điều kiện thành hai phần:

phần thứ nhất $XA = XB$;

phần thứ hai $XA = XC$.

Mỗi phần của điều kiện ứng với một quỹ tích. Quỹ tích thứ nhất là đường thẳng vuông góc với đoạn thẳng AB tại trung điểm của nó, quỹ tích thứ hai cũng là đường thẳng vuông góc với đoạn thẳng AC tại trung điểm của nó. Điểm phải tìm là giao điểm của hai đường thẳng đó.

Ta cũng có thể chia điều kiện theo cách khác: phần thứ nhất $XA = XB$, phần thứ hai $XC = XB$. Điều đó sẽ dẫn đến cách dựng khác. Nhưng lẽ nào kết quả phép dựng lại có thể khác được? Tại sao không?

2. *Vẽ một đường tròn nội tiếp trong một tam giác cho trước.* Ta sẽ lại đưa bài toán này về dựng tâm của đường tròn phải tìm. Như vậy thì trong bài toán đó:

ẩn là một điểm, giả sử là điểm X;

các dữ kiện là ba đường thẳng (vô hạn) a, b và c;

điều kiện quy định điểm X cách đều tất cả ba đường thẳng cho trước.

Ta chia điều kiện thành hai phần:

phần thứ nhất X cách đều a và b;

phần thứ hai X cách đều a và c.

Quỹ tích những điểm thoả mãn phần thứ nhất của điều kiện là hai đường vuông góc với nhau, cụ thể hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng a và b. Quỹ tích

thứ hai tương tự như quỹ tích thứ nhất. Hai quỹ tích đó cắt nhau tại bốn điểm. Ngoài tâm vòng tròn nội tiếp nằm trong tam giác, ta còn được ba tâm của các đường tròn bàng tiếp nữa.

Bạn có thể nhận xét rằng, đối với ví dụ sau, điều phát biểu của ta về phương pháp hai quỹ tích (được nêu ra ở cuối bài 2) phải thay đổi đi một chút. Vậy thì phải thay đổi như thế nào?

3. *Cho hai đường thẳng song song và một điểm ở giữa hai đường thẳng đó. Hãy dựng một đường tròn tiếp xúc với cả hai đường thẳng và đi qua điểm cho trước.* Nếu hình dung hình phải dựng ở trong đầu (nên vẽ nó ra trên giấy) thì có thể nhận thấy rằng, giải bài toán đó từng phần rất dễ: khoảng cách giữa hai đường thẳng song song đương nhiên bằng đường kính của đường tròn phải tìm và một nửa khoảng cách đó sẽ bằng bán kính.

Ta đưa bài toán về việc tìm tâm X của đường tròn chưa biết.

Khi biết bán kính r của đường tròn, ta phân chia điều kiện như sau:

- Phần thứ nhất: X nằm cách điểm cho trước một khoảng bằng r;
- Phần thứ hai: X nằm cách mỗi đường thẳng cho trước một khoảng bằng r.

Phần thứ nhất của điều kiện dẫn đến một đường tròn, phần thứ hai dẫn đến đường thẳng song song với hai đường thẳng cho trước và cách đều hai đường thẳng đó.

Nếu không biết bán kính của đường tròn phải tìm, ta có thể chia điều kiện như sau:

- Phần thứ nhất: X nằm cách điểm cho trước và đường thẳng thứ nhất trong hai đường thẳng cho trước một khoảng như nhau;
- Phần thứ hai: X nằm cách điểm cho trước và đường thẳng thứ hai trong hai đường cho trước một khoảng như nhau.

Về mặt lôgic không ai có thể phản đối cách phân chia điều kiện ra làm hai phần như thế, nhưng dù sao về mặt thực tiễn, cách phân chia ấy không có lợi ích gì: các quỹ tích tương ứng sẽ là các parabol. Ta không thể vẽ chúng bằng thước và compa. Trong lược đồ của ta, điều căn bản là phải làm sao cho các quỹ tích tìm được trong quá trình giải toán là các đường thẳng hay đường tròn.

Ví dụ sau cũng có thể giúp ta hiểu sâu sắc hơn phương pháp hai quỹ tích. Phương pháp đó, như các ví dụ đã chứng tỏ, có ích trong nhiều trường hợp, nhưng không phải là trong tất cả các trường hợp mà không có loại trừ.

§4. GIẢ SỬ RẰNG BÀI TOÁN ĐÃ GIẢI XONG

Mơ ước, nghĩa là tạo ra trong trí tưởng tượng của mình điều muốn có, nhưng chưa có. Một người đang nói, anh ta chẳng có gì để ăn ngoài một mẩu bánh mì, anh ta tự nói với mình: "Giá mà ta có một chút giăm-bông thì ta có thể rán trứng với giăm-bông, tất nhiên, với điều kiện là ta cũng phải có một vài quả trứng".

Người ta sẽ nói với bạn rằng, mơ ước, đó là điều vô nghĩa lí. Chớ có tin họ, đó là một trong những luận điệu sai trái được thịnh hành rộng rãi. Mơ ước có thể là tồi tệ, giống như

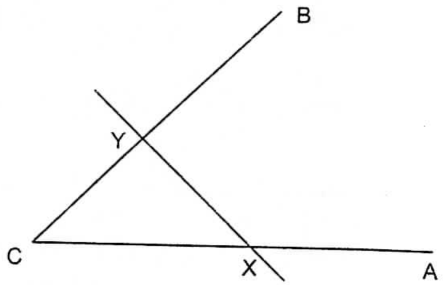
cho quá nhiều muối vào canh hoặc quá nhiều hành vào bánh, tôi muốn nói rằng, mơ ước là tồi tệ nếu như nó thái quá hay không đúng lúc, nhưng nói chung mơ ước rất có ích và nó thường giúp đỡ người ta trong cuộc sống, đặc biệt khi giải toán. Với các mơ ước nhỏ bé như rán trứng với giăm-bông, anh bạn của chúng ta có thể cảm thấy hài lòng hơn với mẩu bánh mì của anh mình và sẽ ăn miếng bánh mì đó một cách ngon lành hơn. Còn bây giờ thì ta hãy xét bài toán sau đây (xem hình 1.1).

Cho 3 điểm A, B và C. Hãy vạch một đường thẳng cắt AC tại điểm X và BC tại điểm Y sao cho AX = YX = YB.

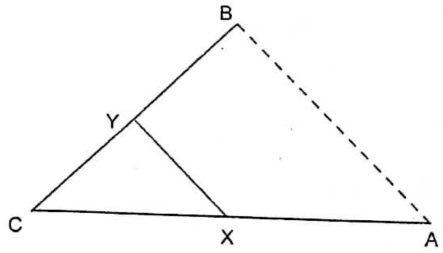
Giả sử ta biết được vị trí của một trong hai điểm *X* hay *Y* (một mơ ước ngọt ngào!). Khi đó người ta có thể tìm được điểm kia (bằng cách kẻ đường vuông góc điểm của một đoạn thẳng). Khốn nỗi ta lại chưa biết một điểm nào trong hai điểm đó - bài toán như vậy là không dễ như ta tưởng.

Bây giờ ta lại có một mơ ước dễ chịu hơn, *ta giả thiết rằng bài toán đã giải xong*, nói cách khác, giả sử hình 1.1 đã dựng được theo điều kiện bài toán, nghĩa là các đoạn của đường gấp khúc *AXYB* đúng là bằng nhau; cứ tưởng tượng rằng, kết quả mà ta chưa đạt được đã sẵn có, cụ thể là ta đã tìm được vị trí của đoạn *XY*; về thực chất, ta tưởng tượng rằng *đã tìm được lời giải của bài toán.*

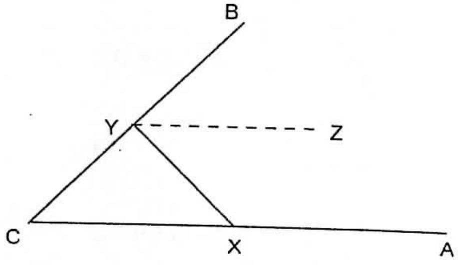
Dù sao, có hình 1.1 trước mắt cũng tốt.



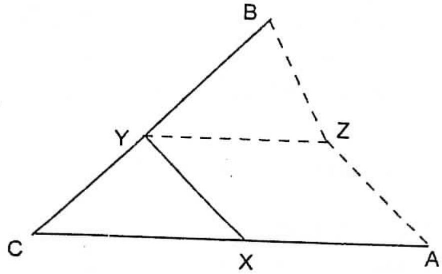
Hình 1.1. Ẩn, các dữ kiện và điều kiện



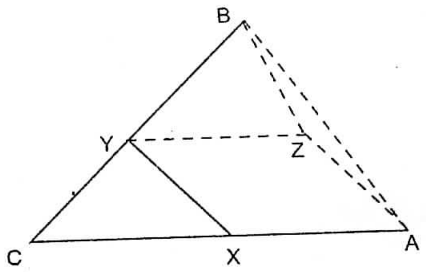
Hình 1.2. Di chuyển từ đầu đến cuối (từ các dữ kiện đến ẩn)



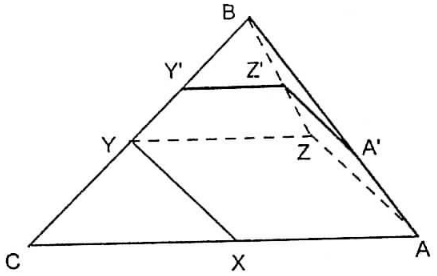
Hình 1.3. Di chuyển từ cuối đến đầu (từ ẩn đến các dữ kiện)



Hình 1.4. Quan hệ với những cái đã biết trước



Hình 1.5. Phối hợp hai hình vẽ



Hình 1.6. Chìa khoá của cách giải

Trên hình vẽ đã thể hiện tất cả các yếu tố hình học mà ta sẽ dùng đến, cả các dữ kiện lẫn ẩn; chúng được tập hợp lại và sắp xếp theo điều kiện của bài toán. Có hình đó ở trước mắt, ta có thể suy nghĩ xem, những yếu tố nào có thể dựng được dựa vào các dữ kiện của bài toán và những yếu tố nào có thể dùng để dựng ẩn. Có thể xuất phát từ các dữ kiện và tiến dần đến lời giải hoặc là xuất phát từ các ẩn và đi lui lại. Hành trình theo cả hai hướng thường rất có ích.

Liệu bạn có thể liên kết được dù chỉ một vài yếu tố của bài toán hai chiều rắc rối đó không? *Bạn có thể giải được một phần nào của bài toán hay không?* Trên hình 1.1 có tam giác *XCY*. Có thể dựng được tam giác đó không? Muốn như vậy, ta cần biết ba yếu tố của tam giác đó, nhưng đáng tiếc là ta chỉ biết có một (góc thuộc đỉnh *C*).

Bạn có thể sử dụng cái mà bạn có nhưng không được sử dụng cái mà bạn không có. *Bạn có biết rút ra từ các dữ kiện một điều gì đó bổ ích không?* Chẳng hạn, có thể nối điểm *A* và điểm *B* với hi vọng rằng đoạn thẳng nối hai điểm đó sẽ có ích để giải bài toán, ta hãy kẻ đoạn thẳng đó (hình 1.2), Nhưng phải sử dụng đoạn thẳng *AB* như thế nào? Điều đó không dễ gì mà thấy ngay được – có lẽ, tốt hơn hết là nên gác nó lại chăng?

Nội dung hình 1.1 hình như quá nghèo nàn. Rõ ràng là trong khi tìm cách dựng ta phải vẽ thêm những đường phụ, nhưng cụ thể là những đường nào?

Các đoạn thẳng *AX*, *XY* và *YB* bằng nhau (đó là giả định và ta ước mơ điều đó), nhưng chúng được sắp đặt một cách không thuận tiện – có thể sắp xếp những đoạn thẳng bằng nhau sao cho chúng tạo nên một hình tốt hơn nhiều. Có thể là còn cần phải thêm một vài đoạn thẳng bằng nhau nữa, hay là để bắt đầu, ta hãy thêm một đoạn thẳng như thế chăng?

Sự may mắn hoặc linh cảm có thể khiến ta kẻ trên hình vẽ một đường mà thoạt nhìn thì thấy là được chọn lựa khá tốt, nếu như ta luôn luôn bám sát mục đích của mình: ta vẽ đoạn thẳng *YZ* song song và bằng đoạng *XA* (hình 1.3) (ta xuất phát từ điều cần tìm – mà ta đang mơ ước – và thử đi ngược hướng đến các dữ kiện).

Vẽ đoạn thẳng *YZ* là một thử nghiệm và hình như đoạn thẳng ấy cũng không hẳn là tồi. Nó dẫn đến những hình quen thuộc. Nối *Z* với *A* và với *B* (hình 1.4) ta được hình thoi *XAZY* và tam giác cân *BYZ*. *Liệu bây giờ bạn có thể giải một phần nào đó của bài toán hay không?* Để dựng tam giác cân, ta cần biết hai yếu tố, nhưng đáng tiếc là chúng ta mới

chỉ biết một (góc ở đỉnh *Y* bằng góc cho trước ở đỉnh *C*). Dù sao thì ta cũng đã đạt được một cái gì đó. Dù cho tam giác *BYZ* ta chưa biết toàn vẹn thì ta cũng biết được dạng của nó: tạm thời ta chưa có thể nói được gì về kích thước, nhưng ta có thể dựng được một tam giác *đồng dạng* với tam giác *BYZ*.

Chúng ta dường như đang tiến dần đến lời giải, nhưng vẫn chưa đạt tới nó; còn cần phải thử làm một cái gì đó nữa. Sớm hay muộn, ta có thể nhắc lại một trong những ý đồ lúc đầu liên quan đến hình 1.2. Nếu liên hệ nó với những ý đồ sau thì ta sẽ được gì? Đặt hình 1.2 lên hình 1.4 ta được hình 1.5 trong đó có tam giác mới *BZA*. Ta có thể dựng được tam giác này không? Có thể được, nếu như ta biết được tam giác *BYZ*: trong trường hợp thuận tiện đó, ta có thể lấy ba yếu tố – hai cạnh *ZB* và *ZA* – *ZY* và góc *B*. Nhưng ta chưa có tam giác *BYZ*; dù sao ta vẫn chưa hoàn toàn biết tam giác ấy, ta mới chỉ biết dạng của nó mà thôi. Nhưng lúc đó có thể...

Ta biết vẽ tứ giác *BY'Z'A'* (hình 1.6) *đồng dạng* với tứ giác *BYZA* (hình 1.5) mà tứ giác *BYZA* là phần căn bản của phép dựng cần tìm. Đây có thể là chìa khoá để giải bài toán!

§5. PHƯƠNG PHÁP ĐỒNG DẠNG

Ta sẽ tiến hành phép dựng mà các bước của nó được thể hiện trên các hình 1.1 – 1.6.

Trên đoạn thẳng *BC* cho trước (hình 1.6), ta lấy một điểm tuỳ ý *Y'* (nhưng không quá xa điểm *B*). Kẻ *Y'Z'* song song với *CA* sao cho: *Y'Z'* = *Y'B'*.

Sau đó ta tìm trên đoạn thẳng *AB* một điểm *A'* sao cho: *A'Z'* = *Y'Z'*.

Bây giờ kẻ qua *A* đường thẳng song song với *A'Z'*. Đường thẳng song song đó cắt phần kéo dài của đoạn *BZ'* tại điểm *Z*. Công việc còn lại thì đơn giản thôi.

Hai tứ giác *AZYB* và *A'Z'Y'B* không những chỉ đồng dạng mà còn *"đồng dạng phối cảnh"* (vị tự). Điểm *B* là *tâm đồng dạng* của chúng. Điều đó có nghĩa là đường thẳng nối các điểm tương ứng của hai hình đồng dạng đó phải đi qua điểm *B*.

Đây là một nhận xét mà từ đó có thể rút ra được một điều gì đó để giải toán: trong hai hình đồng dạng xét ở trên, *AZYB* xuất hiện trong đầu ta trước, thực ra lại được dựng sau[*].

Ví dụ trên gợi ra một phương pháp tổng quát: *nếu không thể dựng ngay được hình cần tìm, bạn hãy nghĩ đến khả năng dựng hình* **đồng dạng** với nó.

Ở cuối chương này có nhiều bài tập. Nếu nghiên cứu tỉ mỉ thì bạn sẽ thấy rõ lợi ích của phương pháp đồng dạng.

---

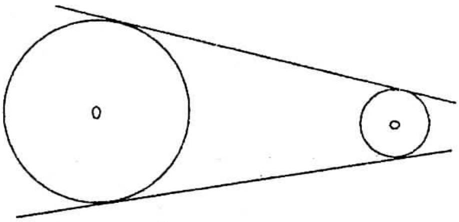
[*] Trong quá trình phân tích ví dụ trên (ta bắt đầu ở §4) bước đáng chú ý nhất là điều giả định: "Giả sử rằng bài toán đã giải xong". Các chú thích tiếp theo về vấn đề này có thể xem trong Giải một bài toán như thế nào?

§6. CÁC VÍ DỤ

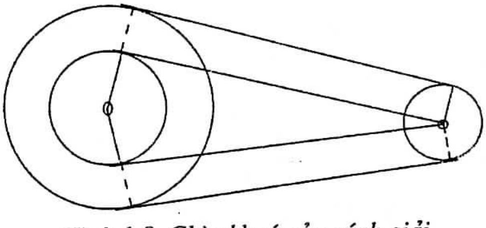
Các ví dụ sau đây không giống nhau về nhiều phương diện; sự khác nhau giữa chúng có thể cho ta thấy rõ hơn nét đặc trưng chung của các ví dụ ấy mà ta muốn vạch ra.

1. *Vẽ các tiếp tuyến chung của hai đường tròn cho trước.* Cho hai đường tròn có vị trí tương đối xác định (vẽ trên giấy). Ta muốn kẻ hai đường thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn đó. Nếu hai đường tròn không cắt nhau thì sẽ có bốn tiếp tuyến chung: hai tiếp tuyến chung ngoài và hai tiếp tuyến chung trong. Ta hãy chú ý đến các tiếp tuyến chung ngoài (hình 1.7). Hai tiếp tuyến này nhất thiết phải tồn tại, nếu như một trong hai đường tròn cho trước không nằm hoàn toàn trong đường tròn kia.

Nếu như chưa có thể giải được bài toán nêu ra, bạn hãy thử xem liệu có bài toán nào cũng gần giống bài toán đó không? Có một bài toán gần giống như thế (giả định rằng bạn đọc đã biết cách giải): *từ một điểm ở ngoài đường tròn cho trước, hãy kẻ các tiếp tuyến đối với đường tròn đó.* Thực ra bài toán này là *trường hợp tới hạn* của bài toán trên khi một trong hai đường tròn cho trước co lại thành điểm. Có thể đi tới trường hợp tới hạn đó một cách tự nhiên nhất bằng cách *biến thiên các dữ kiện.*



Hình 1.7. Ẩn, các dữ kiện, điều kiện

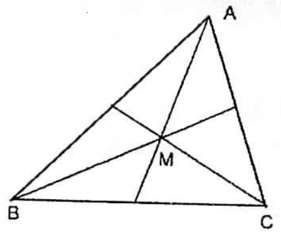


Hình 1.8. Chìa khoá của cách giải

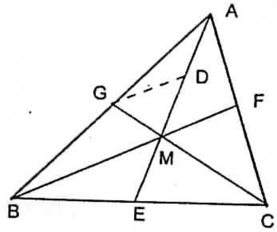
Điều đó có thể thực hiện được bằng nhiều cách: giảm dần một bán kính và giữ nguyên bán kính kia hoặc giảm một bán kính và tăng bán kính còn lại hoặc cùng giảm cả hai bán kính. Như vậy ta có thể nảy ra ý nghĩ giảm cả hai bán kính với *cùng một tốc độ,* nghĩa là giảm cả hai bán kính cùng một độ dài trong cùng một khoảng thời gian. Nếu hình dung sự biến thiên đó một cách cụ thể, ta có thể nhận thấy rằng mỗi tiếp tuyến chung đó chuyển dời nhưng vẫn giữ song song với chính nó chừng nào chưa xuất hiện một hình được biểu diễn trên hình 1.8. Từ đó suy ra cách giải: hãy dựng một đường tròn phụ đồng tâm với đường tròn lớn và có bán kính bằng hiệu hai bán kính của các đường tròn cho trước, sau đó từ tâm của đường tròn nhỏ, kẻ các tiếp tuyến với đường tròn phụ. Bạn hãy sử dụng hình nhận được như chiếc chìa khoá để giải bài toán: chuyển từ hình đó đến hình phải tìm không có khó khăn nữa (chỉ còn phải dựng hai hình chữ nhật).

2. *Dựng một tam giác biết ba trung tuyến của nó.* Giả sử bài toán đã giải xong: ta vẽ một hình tam giác (phải tìm) và kẻ ba trung tuyến (đã biết) của nó (hình 1.9). Ta nhớ rằng ba trung tuyến phải giao nhau tại một điểm là điểm M (trọng tâm của tam giác) chia mỗi trung tuyến theo tỉ số 1:2. Để làm cho điều quan trọng đó được thể hiện rõ ràng, ta đánh

dấu điểm giữa D của đoạn AM, các điểm D và M chia trung tuyến AE thành ba phần bằng nhau (hình 1.10).



Hình 1.9. Ẩn, các dữ kiện, điều kiện



Hình 1.10. Điểm có ích

Như vậy tam giác phải tìm được chia thành sáu tam giác nhỏ. Bạn có thể giải một phần của bài toán đó không? Để dựng một trong số những tam giác nhỏ cần biết ba yếu tố, thực ra ta mới chỉ biết hai cạnh của nó: cạnh thứ nhất bằng một phần ba của một trung tuyến cho trước, cạnh thứ hai bằng hai phần ba trung tuyến kia; nhưng ta chưa nhìn thấy yếu tố thứ ba. Liệu còn có thể tìm được một tam giác nào đó nữa trong đó đã biết ba yếu tố hay không? Trên hình 1.10 có ghi điểm D là điểm rất bổ ích đối với ta về mặt suy nghĩ: nếu ta nối điểm đó với điểm bên cạnh ta sẽ được tam giác MDG mà mỗi cạnh của nó bằng một phần ba trung tuyến. Như vậy ta có thể dựng được tam giác đó theo ba cạnh đã biết, đây là chìa khoá để giải bài toán! Công việc còn lại thì cũng đơn giản thôi.

3. Mỗi bài toán về tam giác phẳng thông thường có thể ứng với một bài toán về *tam giác cầu* hay về *góc tam diện* (góc tam diện giới hạn bởi ba mặt phẳng, thiết diện của góc đó với mặt cầu có tâm tại đỉnh của góc cho ta tam giác cầu). Các bài toán không gian có thể đưa về các bài toán phẳng tương ứng. Việc chuyển các bài toán không gian như vậy vào phạm vi vẽ các hình phẳng, về thực chất, là đối tượng của *hình học hoạ hình*, một ngành lí thú của hình học cần cho kĩ sư và kiến trúc sư vẽ đúng các bản vẽ máy móc, con tàu, toà nhà,...

Không đòi hỏi bạn đọc phải hiểu biết hình học hoạ hình, mà sẽ chỉ cần một số kiến thức hình học không gian nào đó và một chút tưởng tượng để giải bài toán sau: *cho ba góc phẳng của một góc tam diện, hãy dựng các góc nhị diện của nó* (*).

Ta kí hiệu a, b và c là các góc phẳng của góc tam diện (các cạnh của tam giác cầu tương ứng) và α là góc nhị diện với mặt có góc phẳng a (α là góc của tam giác cầu). Giả sử a, b và c cho trước, cần phải dựng α (phương pháp dựng cả ba góc nhị diện đều như nhau, ta chỉ giới hạn vào việc dựng một trong các góc đó, cụ thể là α).

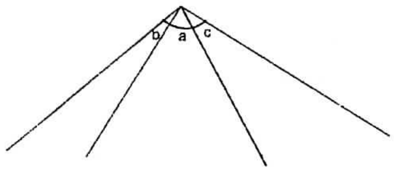
Để hình dung được các dữ kiện rõ ràng hơn, ta hãy trải các góc b, c và a trên mặt phẳng (hình 1.11), còn để hình dung được ẩn rõ ràng hơn thì nên tưởng tượng hình trong không gian. (Muốn vậy, ta vẽ hình 1.11 lên tấm bìa cứng và gấp nó theo đường phân chia

---

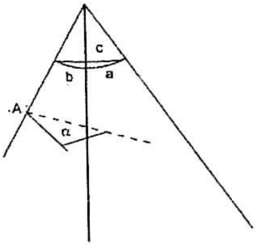
(*) Ở đây muốn nói đến các góc phẳng tương ứng với các góc nhị diện; thường thường các góc đó cũng được kí hiệu bằng các chữ như ở các góc nhị diện – *Chú thích bản dịch tiếng Nga.*

a và *b*, cũng như đường phân chia góc *a* và *c* để được một góc tam diện). Trên hình 1.12, góc tam giác diện của ta được biểu diễn một cách phối cảnh; *A* là điểm chọn tuỳ ý trên cạnh đối diện với mặt *a*; hai đường vuông góc với cạnh tại điểm đó (một đường nằm trong mặt phẳng của mặt *b*; đường kia nằm trong mặt phẳng của mặt *c*) tạo nên góc *a* là góc ta cần dựng.

Ẩn ở đây là gì? Đó là góc, cụ thể là góc *a* biểu diễn trên hình 1.12.



Hình 1.11. Các dữ kiện



Hình 1.12. Ẩn

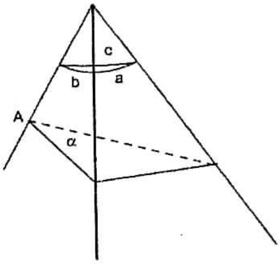
Bạn phải làm gì để dựng được ẩn loại đó? Ta thường xác định góc bằng một tam giác có góc đó.

Có một hình tam giác nào trên hình của ta không? Chưa có, nhưng có thể dựng được.

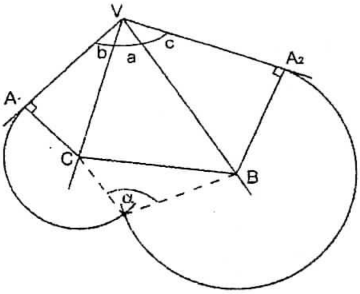
Thật vậy, có một cách hiển nhiên để được tam giác cần thiết là một mặt phẳng chứa góc α cắt góc tam diện cho ta một tam giác (hình 1.13). Tam giác này có thể là một hình phụ tốt, có thể trở thành chìa khoá để giải bài toán.

Thật vậy, lời giải đã rất gần rồi. Ta hãy trở lại hình phẳng vẽ trên hình 1.11, ở đây các dữ kiện của bài toán, tức là các góc *a*, *b* và *c* là các đại lượng cho trước. (Hãy vuốt phẳng mô hình bằng bìa cứng mà ta đã làm khi chuyển từ hình 1.11 sang hình 1.12).

Điểm *A* xuất hiện trên hình 1.14 hai lần, tại A_1 và tại A_2. (Khi trải mô hình, ta đã tách mặt *b* và mặt *c* kề nhau trong không gian). Các điểm A_1 và A_2 nằm cách đều đỉnh *V* của góc tam diện. Đường vuông góc với A_1V tại điểm A_1 gặp cạnh đối diện của góc *c* tại điểm *C*; tương tự như vậy ta được điểm *B* (hình 1.14). Bây giờ ta biết được cả ba cạnh *AB*, *BC* và CA_1 của tam giác phụ vẽ trên hình 1.13 và có thể dễ dàng dựng tam giác đó (trên hình 1.14 được thể hiện bằng những đường nét đứt); tam giác này chứa góc *a* cần tìm.



Hình 1.13. Chìa khoá để giải



Hình 1.14. Lời giải

Bài toán ta vừa xét giống một bài toán rất đơn giản mà ta đã phân tích ở §1 và đã sử dụng cách dựng mà ta đã dùng ở bài toán đó, ở đây chỉ nói đến các tam giác phẳng thông thường. Ta có thể thấy trong phép dựng đó tính quy luật nhất định chỉ rõ lợi ích của phép tương tự.

§7. PHƯƠNG PHÁP HÌNH PHỤ

Ta hãy nhìn lại các bài toán đã xét ở §6. Các bài toán đó rất khác nhau về cách phát biểu, cách giải chúng cũng không hoàn toàn giống nhau, nếu như ta không kể đến một điều là trong tất cả các trường hợp đó hình phụ được sử dụng như chiếc chìa khoá của cách giải, chẳng hạn, đường tròn có hai tiếp tuyến kẻ từ một điểm ở ngoài đường tròn đó trong ví dụ 1, tam giác nhỏ cắt ra từ tam giác phải tìm trong ví dụ 2, rồi lại một tam giác nữa trong ví dụ 3. Nếu sử dụng các dữ kiện của bài toán ta luôn luôn có thể dễ dàng dựng được hình phụ, rồi nhờ hình đó mà dựng được hình cần tìm. Như vậy, ta đã đạt được mục đích qua hai giai đoạn: hình phụ được dùng như chiếc chìa khoá để giải; việc tìm kiếm hình phụ là phút quyết định, là cao điểm của quá trình giải toán. Đó chính là một phương pháp gọi là phương pháp hình phụ, thường rất có ích và ta có thể trình bày bằng lời như sau: *Hãy cố tìm kiếm một phần nào đó của hình phải tìm hoặc một hình nào đó cùng loại, kế cận mà bạn có thể dựng được và có thể sử dụng để được hình phải tìm.*

Phương pháp đó rất tổng quát. Về thực chất phương pháp đồng dạng đã mô tả trong §5 là một trường hợp đặc biệt của phương pháp hình phụ. Thật vậy, hình đồng dạng với hình phải tìm được coi như một dạng của hình cùng loại; nếu dùng nó làm hình phụ thì rất thuận lợi. Tính chất tổng quát của phương pháp hình phụ không tránh khỏi làm cho nó kém cụ thể vì nó không cho ta một lời khuyên nhất định về dạng của hình phụ phải tìm. Đương nhiên là kinh nghiệm có thể cho ta một vài điều chỉ dẫn (nhưng không phải là những quy tắc chặt chẽ), chẳng hạn như, ta phải tìm những hình dễ "cắt ra" khỏi hình phải tìm, những hình "đơn giản" (ví dụ như tam giác), "những trường hợp tới hạn" (xem mục 1. §6)... Ngoài ra, ta có thể dùng các thủ thuật như thay đổi các dữ kiện hay sử dụng phép tương tự, trong nhiều trường hợp điều đó cũng có thể gợi ra cho ta một hình phụ.

Như vậy ta đã nêu lên ba phương pháp khác nhau có thể được sử dụng khi giải toán dựng hình. *Phương pháp hình phụ* cho ta nhiều khả năng chọn lựa, nhưng mục tiêu trong phương pháp đó khó xác định hơn so với *phương pháp đồng dạng. Phương pháp hai quỹ tích* là phương pháp đơn giản nhất trong ba phương pháp, nên thử phương pháp này trước hết bởi vì trong đa số các trường hợp, tốt hơn cả là hãy bắt đầu bằng phương pháp đơn giản nhất. Nhưng cũng đừng tự hạn chế mình trong một phương pháp nào và không nên định kiến. Bạn hãy giả thiết rằng bài toán đã giải xong và vẽ một hình, trong đó *ẩn và các dữ kiện* được sắp đặt một cách thích ứng, mỗi yếu tố đều ở đúng vị trí của nó, tất cả các yếu tố phải ràng buộc với nhau đúng như điều kiện đòi hỏi. Hãy nghiên cứu hình đó, thử tìm ra trong đó một hình quen thuộc nào đó, cố nhớ lại bất kì hiểu biết nào có liên quan (các bài toán cùng loại, những định lí thích hợp), bạn hãy tìm lấy một lối thoát (lối thoát

đó có thể là một phần dễ hiểu hơn của một hình nào đó chẳng hạn). Bạn có cơ sở để hi vọng là sẽ thành công, bởi vì việc nghiên cứu kĩ lưỡng hình vẽ có thể làm nảy ra một ý nghĩa sáng sủa, có thể gợi ra một hình phụ cần vẽ, một phương pháp thích hợp hay một bước nào đó cần thiết để giải được bài toán.

BÀI TẬP VÀ CHÚ THÍCH BỔ SUNG CHO CHƯƠNG 1

1. Quỹ tích những điểm cách một điểm cho trước một khoảng cho trước là gì?

2. Quỹ tích những điểm cách một đường thẳng cho trước một khoảng cho trước là gì?

3. Một điểm chuyển động luôn luôn cách đều hai điểm cho trước thì quỹ tích tương ứng là gì?

4. Một điểm chuyển động luôn luôn cách đều hai đường thẳng song song cho trước thì quỹ tích tương ứng là đường gì?

5. Một điểm chuyển động luôn luôn cách đều hai đường thẳng cắt nhau thì quỹ tích là đường gì?

6. Trong một tam giác cho trước hai đỉnh A và B và góc đối diện với cạnh AB; tam giác như vậy không được xác định duy nhất, bởi vì đỉnh thứ ba của nó (đỉnh của góc có độ lớn g) có thể chuyển rời. Vậy quỹ tích của đỉnh thứ ba là gì?

7. Các kí hiệu. Để cho thuận tiện, khi gặp các tam giác ta sử dụng các kí hiệu sau:

A, B, C là các đỉnh;

a, b, c là các cạnh;

α, β, γ là các góc;

h_a, h_b, h_c là đường cao;

m_a, m_b, m_c là các trung tuyến;

b_α, b_β, b_γ là các phân giác;

R là bán kính đường tròn ngoại tiếp;

r là bán kính đường tròn nội tiếp.

Ở đây cần hiểu rằng cạnh a đối diện với góc α, còn đỉnh A là đầu mút chung của các đoạn h_a, m_a và b_α. Cùng một chữ a thường được mọi người thừa nhận và kí hiệu cạnh (đoạn thẳng hoặc đôi khi đường thẳng vô tận), vừa kí hiệu độ dài của nó, trong mỗi trường hợp cụ thể bạn đọc cần phải tuỳ theo ý nghĩa của câu mà xác định xem kí hiệu đó có nghĩa gì. Các kí hiệu b, c, h_a,..., b_γ, R, r luôn luôn có hai nghĩa như vậy, ở đây ta vẫn giữ truyền thống đó, mặc dù đó còn là vấn đề phải tranh cãi.

Bài toán "Hãy dựng một tam giác theo a, b và c" đương nhiên có nghĩa là "Hãy dựng một tam giác cho trước ba cạnh (đoạn thẳng!) a, b và c". Bạn sẽ nhận thấy rằng, nếu chọn các dữ kiện không khéo thì bài toán có thể không có lời giải (có thể không tồn tại hình

thoả mãn điều kiện cho trước), chẳng hạn, tam giác có ba cạnh a, b và c với $a > b + c$ sẽ không tồn tại. Bạn hãy thử xem với các dữ kiện nào thì hình phải tìm chắc chắn sẽ tồn tại.

8. Hãy dựng tam giác biết a, b, m_a.

9. Hãy dựng tam giác biết a, h_a, m_a.

10. Hãy dựng tam giác biết a, h_a, α.

11. Hãy dựng tam giác biết a, m_a, α.

12. Cho ba đường thẳng (vô hạn). Hãy dựng đường tròn tiếp xúc với hai đường thẳng đầu và có tâm nằm trên đường thẳng thứ ba.

13. Cho hai đường thẳng (vô hạn) giao nhau và một đoạn thẳng có độ dài r. Hãy dựng đường tròn có bán kính r và tiếp xúc với hai đường thẳng cho trước.

14. Hãy dựng đường tròn có bán kính cho trước, cho biết một điểm của nó và một đường thẳng tiếp xúc với nó.

15. Từ trên một con tàu nhìn thấy rõ *ba ngọn hải đăng* mà vị trí của chúng đã được xác định trên bản đồ. Hãy ghi (trên bản đồ) vị trí của con tàu nếu biết các góc giữa các chùm tia sáng phát ra từ các ngọn hải đăng đến con tàu (các góc đó có thể đo được).

16. Hãy nội tiếp ba đường tròn bằng nhau trong một đường tròn cho trước sao cho mỗi đường tròn tiếp xúc với hai đường tròn kia và với đường tròn cho trước (đôi khi có thể thấy hình đó ở các kiến trúc trang hoàng trên các công trình kiểu gô-tích; tuy nhiên ở đó ta hay gặp hơn những hình có bốn hay sáu đường tròn ở bên trong).

17. Hãy tìm trong một tam giác cho trước một điểm nhìn cả ba cạnh của nó với cùng một góc.

18. Hãy chia ba diện tích của một tam giác.

Bài toán này đòi hỏi phải tìm điểm X ở trong tam giác ABC cho trước để các tam giác XBC, XCA, XAB tương đương.

(*Hãy giữ lại một phần điều kiện của bài toán, bỏ qua phần còn lại:* giả sử chỉ có hai tam giác XCA và XCB tương đương. Vậy thì quỹ tích của điểm X sẽ là gì? Trả lời cho câu hỏi đó có thể gợi ý cho bạn cách giải; cũng có thể có những cách tiếp cận khác để giải bài toán này).

19. Hãy dựng một tam giác biết a, α, r.

(*Hãy chỉ giữ lại một phần điều kiện của bài toán, bỏ qua phần còn lại:* bỏ qua r và chỉ giữ lại đòi hỏi có liên quan đến a và α. Quỹ tích tâm đường tròn nội tiếp sẽ là gì?).

20. Hãy dựng một tam giác biết α, r, R.

(*Bạn có thể chỉ ra các dữ kiện khác thích hợp hơn để tìm ẩn không?* Bạn có thể thay thế một dữ kiện nào đó bằng một dữ kiện khác thuận tiện hơn không?).

21. Hãy dựng một tam giác biết a, h_a, r.

(Từ các dữ kiện bạn có thể rút ra được một điều gì đó bổ ích không?).

22. Hãy dựng một tam giác biết a, r, $a + b + c$.

23. Hãy dựng một tam giác biết a, h_b, c.

24. Hãy dựng một tam giác biết a, h_b, b_γ.

25. Hãy dựng một tam giác biết a, b_b, h_c.

26. Hãy dựng một tam giác biết h_a, h_b, β.

27. Hãy dựng một tam giác biết h_a, β, γ.

28. Hãy dựng một tam giác biết h_a, b_α, a.

29. Hãy dựng một hình bình hành biết một cạnh và hai đường chéo của nó.

30. Hãy dựng một hình thang nếu biết bốn cạnh a, b, c và d của nó, các cạnh a và c phải song song với nhau(*).

31. Hãy dựng một tứ giác biết bốn cạnh a, b, c, d và góc tạo bởi phần kéo dài của các cạnh đối diện a và c.

32. Hãy dựng tam giác biết a, $b + c$, α.

(Không được phạm sai lầm khi sử dụng ngay *mọi* dữ kiện để dựng hình. Nên đặt tổng $b + c$ ở vị trí nào?)

33. Hãy dựng một tam giác biết a, $b + c$, $\beta - \gamma$.

34. Hãy dựng một tam giác biết $a + b + c$, h_a, γ.

(Bài toán *đối xứng* đối với b và c là những yếu tố chưa cho trước vì vậy chúng có thể đổi chỗ cho nhau).

35. Cho hai đường tròn ở ngoài nhau. Hãy kẻ các tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn đó. (Các đường tròn cùng thuộc một nửa mặt phẳng phân chia bởi tiếp tuyến chung *ngoài* của chúng và thuộc hai nửa mặt phẳng khác nhau phân chia bởi tiếp tuyến *trong* của chúng).

36. Cho ba đường tròn bằng nhau; hãy vẽ một đường tròn tiếp xúc với cả ba đường tròn cho trước và chứa chúng ở bên trong.

37. Hãy dựng một tam giác biết α, β, b_γ.

38. Hãy nội tiếp một hình vuông trong một tam giác vuông cho trước. Một góc của hình vuông phải trùng với góc vuông của tam giác cho trước; đỉnh đối diện với góc đó của hình vuông phải nằm trên cạnh huyền; mỗi đỉnh còn lại đều nằm trên một cạnh góc vuông.

39. Hãy nội tiếp một hình vuông trong một tam giác ABC cho trước. Hai đỉnh của hình vuông phải nằm trên cạnh AB, một đỉnh trên cạnh AC và một đỉnh trên cạnh BC.

(*)Trong bài toán trên, ta gặp những chữ a và c hai lần; ở đây trong trường hợp thứ nhất a và c là *độ dài của các đoạn thẳng* còn trong trường hợp thứ hai thì đó là các *đường thẳng*, xác định bởi các cạnh của tứ giác.

40. Hãy nối tiếp một hình vuông trong hình quạt tròn. Hai đỉnh của hình vuông phải nằm trên cung tròn và mỗi đỉnh còn lại nằm trên một bán kính giới hạn hình quạt.

41. Hãy dựng một đường tròn, nếu cho trước hai điểm của đường tròn đó và tiếp tuyến của nó.

42. Hãy dựng một đường tròn, nếu cho trước một điểm của đường tròn đó và hai tiếp tuyến của nó.

43. Hãy dựng một ngũ giác trong đó có thể nội tiếp được một đường tròn nếu cho trước năm góc của nó α, β, γ, δ và ε (đương nhiên là phải thoả mãn điều kiện $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 540^0$) và chu vi một của ngũ giác.

44. Hãy dựng một tam giác biết h_a, h_b, h_c.

45. *Nhược điểm.* Có thể xảy ra trường hợp bài toán dựng hình không có lời giải bởi vì không tồn tại một hình nào thoả mãn điều kiện đòi hỏi các dữ kiện cho trước, chẳng hạn, không tồn tại tam giác có các cạnh a, b và c nếu $c > a + b$. Phương pháp giải tốt nhất chỉ ra được hình thoả mãn điều kiện nêu ra, nếu hình đó tồn tại; còn nếu không thể dựng được thì phương pháp đó phải chứng tỏ rằng hình phải tìm không tồn tại.

Tuy nhiên, có thể xuất hiện tình huống sau đây: bản thân bài toán có lời giải, trong khi bài toán phụ của nó không có lời giải, tức là không thể dựng được hình phụ mà ta phải đưa vào trong lược đồ giải để có được hình phải tìm. Tất nhiên, đó sẽ là nhược điểm trong lược đồ giải của ta.

Trên quan điểm đó thì phương pháp giải bài tập 44 của bạn có thoả đáng hay không? (Tam giác có các cạnh 65, 156, 169 là một tam giác vuông có các cạnh tỉ lệ với các số 5, 12, 13 và có các chiều cao bằng 156, 65, 60). Nếu bạn buộc lòng phải trả lời rằng "không", thì bạn hãy cố cải tiến phương pháp của mình.

46. Hãy dựng một tam giác biết a, α, R.

47. Nếu *nhìn lại* cách giải bài tập 46, bạn có thể nêu lên một loại vấn đề bổ ích và đặt ra một số bài toán cùng loại.

a) Bài toán nào tương tự với bài toán đã khảo sát?

b) Có thể khái quát hoá bài toán đó như thế nào?

c) Hãy dựng tam giác biết a, β, R.

d) Hãy dựng tam giác biết a, r, R.

48. *Ba đài quan sát.* Tại ba đài quan sát, người ta đo được một cách chính xác thời gian tiếng đạn nổ từ khẩu đại bác địch vọng đến các đài đó. Dựa trên các dữ kiện này hãy ghi trên bản đồ vị trí X nơi địch đặt súng.

Tốc độ âm thanh coi như đã biết. Hãy giải thích sự giống nhau và khác nhau giữa bài toán này và bài toán về ba ngọn hải đăng (bài tập 15).

49. *Nhận xét về phương pháp hai quỹ tích.* Các quỹ tích trong bài tập 2, 5 và 6 có ích lợi gì trên quan điểm phương pháp hai quỹ tích? Hãy xem điều khẳng định ở cuối §2.

50. *Phương pháp ba quỹ tích.* Một khái niệm gặp trong hình học phẳng có thể có những cái tương tự trong hình học không gian. Chẳng hạn trong m.3 §6, ta đã coi các tam giác cầu và góc tam diện như những hình tương tự với tam giác phẳng thông thường. Cũng có thể coi hình chóp tam giác, tức là một tứ diện như hình tương tự của tam giác thông thường. Trên quan điểm đó, bài toán sau đây coi như tương tự với bài toán đã khảo sát ở m.1 §3.

Hãy vẽ một mặt cầu ngoại tiếp một tứ diện cho trước.

Ta sẽ nói thêm về sự tương tự đó. Ta đưa bài toán trên về việc tìm tâm của mặt cầu. Trong bài toán mới này:

ẩn là một điểm, mà ta kí hiệu là X;

các dữ kiện là bốn điểm (các đỉnh của tứ diện cho trước), chẳng hạn A, B, C và D;

điều kiện là sự bằng nhau của bốn khoảng cách:

$XA = XB = XC = XD$.

Ta có thể chia điều kiện đó thành ba phần:

phần thứ nhất $\quad XA = XB$,

phần thứ hai $\quad XA = XC$,

phần thứ ba $\quad XA = XD$.

Mỗi phần trên ứng với một quỹ tích. Nếu điểm X thoả mãn phần thứ nhất của điều kiện thì quỹ tích của điểm đó sẽ là một mặt phẳng (trên đó điểm có thể tự do di chuyển); mặt phẳng này vuông góc với đoạn AB và đi qua điểm giữa của đoạn thẳng đó. Mỗi phần còn lại của điều kiện ứng với một mặt phẳng tương tự. Rút cuộc, tâm phải tìm của mặt cầu chính là giao điểm của ba mặt phẳng đó.

Giả sử rằng ta có những dụng cụ có thể xác định được giao điểm của ba mặt cho trước, nếu mỗi mặt đó là mặt phẳng hay mặt cầu (thực ra thì ta đã ngầm giả thiết điều đó trước rồi. Đồng thời các giao điểm đó có thể tìm được bằng những dụng cụ mà ta khá quen thuộc như compa và thước; chỉ cần phải làm quen với môn hình học hoạ hình là được). Lúc đó ta có thể thiết lập và giải *các bài toán dựng hình trong không gian*. Bài toán vừa mới khảo sát có thể là một ví dụ của bài toán thuộc loại đó và cách giải của nó cho ta một kiểu mẫu để từ đó nhờ phép tương tự có thể suy ra được phương pháp tổng quát giải bài toán dựng hình trong không gian, *đó là phương pháp ba quỹ tích.*

51. Trong bài tập 50 ở trên cũng như ví dụ ở m.1 §3 ta có thể chia điều kiện bằng cách khác và do đó được một cách dựng khác (mặc dù là khá giống). Nhưng liệu kết quả lúc đó có khác không? Tại sao không thể khác được?

52. *Về các phép dựng hình.* Có nhiều bài toán dựng hình, trong đó hình phải dựng hiển nhiên là "tồn tại" nhưng lại không thể dựng được nó bằng thước và compa. (Có thể dựng được nó nếu sử dụng những dụng cụ khác đã được lí tưởng hoá). Một trong những bài toán nổi tiếng thuộc loại đó là bài toán chia ba một góc: không thể chia một góc: *tùy ý* thành ba phần bằng nhau nhờ thước và compa.

Phương pháp tốt nhất để giải toán dựng hình cần phải hoặc đưa đến dựng được hình đòi hỏi bằng compa và thước hoặc chứng minh được rằng không thể dựng được. Các phương pháp của ta (hai quỹ tích, hình đồng dạng, hình phụ) không hẳn là vô ích (tôi hi vọng rằng bạn đọc đã có dịp khẳng định điều đó), nhưng chúng không phải là phương pháp hoàn thiện bởi vì thường thường chúng dẫn đến một cách dựng cần thiết, nhưng nếu không được như vậy thì ta còn phải mò mẫm trong bóng tối mà không có một chỉ dẫn nào được cho trước một ngã ba đường đang làm ta bối rối: có phải là thực chất nó không được hay là nó có thể giải được mà ta cố gắng chưa đủ.

Có một phương pháp dựng hình khá quen thuộc và hoàn thiện hơn nhiều (*phương pháp đại số*, nhưng lúc này ta chưa nên đi vào chi tiết). Và dù sao, khi giải một bài toán nào đó, ta có thể không tìm ra ngay được phương pháp tốt nhất và đã quen thuộc, thì lúc đó ta buộc phải thử. Vì vậy, các phương pháp trên đây, mặc dù là không hoàn thiện, thường lại giúp ích cho ta khi giải toán.

53. *Những bài toán phụ.* Hãy nghĩ ra một số bài toán giống và đồng thời lại khác các bài toán đã nêu lên trong chương này, trước hết là đối với những bài toán mà bạn đã biết cách giải.

54. *Các tập hợp.* Ta không thể định nghĩa khái niệm tập hợp bằng những khái niệm khác đơn giản hơn, bởi lẽ không tồn tại những khái niệm như vậy. Thế nhưng chính khái niệm đó (tập hợp) lại quen thuộc đối với mọi người, mặc dù là người ta thậm chí không dùng đến từ "tập hợp". "Tập hợp các phần tử", về thực chất, cũng có nghĩa như "một lớp các vật", "một họ các đối tượng",... "Các học sinh đã thi một môn học nào đó vào loại giỏi" tạo thành một tập hợp, ngay cả khi bạn chưa có thể nêu lên họ tên tất cả các học sinh đó. "Các điểm trong không gian cách đều hai điểm cho trước" lập nên một tập hợp hoàn toàn xác định của các điểm, đó chính là một mặt phẳng. "Các đường thẳng nằm trong một mặt phẳng cho trước và cách một điểm cho trước một khoảng cho trước" tạo nên một tập hợp thú vị bao gồm mọi tiếp tuyến của một đường tròn nào đó. Nếu a, b và c là ba vật khác nhau nào đó thì tập hợp các phần tử của nó là ba vật đó cũng hoàn toàn được xác định.

Hai tập hợp là như nhau hay *bằng nhau*, nếu mỗi phần tử thuộc mỗi một tập hợp trong hai tập hợp đó thì cũng thuộc tập hợp kia. Nếu bất cứ phần tử nào thuộc tập hợp A cũng đồng thời thuộc tập hợp B, thì ta nói rằng A chứa trong B. Điều đó cũng có thể được diễn tả bằng nhiều cách khác nữa, chẳng hạn như, B chứa A, B bao hàm A, *A là tập hợp con* của tập hợp B,...

Đôi khi rất thuận tiện nếu xét tập hợp rỗng, tức là tập hợp không chứa một phần tử nào. Chẳng hạn, "tập hợp các học sinh đã thi một môn học nào đó vào loại giỏi" có thể là rỗng nếu như không một học sinh nào được điểm cao hơn điểm "tốt" hoặc nếu giáo viên bị ốm và kì thi sẽ không còn nữa. Số 0 là một số có ích như thế nào thì tập hợp rỗng cũng là một tập hợp có ích như thế. Sau nữa, cũng giống như số 0 là số nhỏ hơn bất kì số dương nào, tập hợp rỗng được coi là tập hợp con của *bất kì* tập hợp nào.

Tập hợp các phần tử chung của nhiều tập hợp gọi là *giao* của các tập hợp đó. Nói cách khác, giao của tập hợp $A, B, C,\ldots, L$ gồm và chỉ gồm những phần tử đồng thời thuộc mỗi tập hợp $A, B, C,\ldots, L$.

Giả sử A và B là hai mặt phẳng, mỗi mặt phẳng xem như một tập hợp điểm. Nếu các mặt phẳng đó không trùng nhau và không song song với nhau thì chúng cắt nhau theo một đường thẳng; nếu chúng không trùng nhau mà song song với nhau thì giao của chúng là một tập hợp trống; sau cùng, nếu chúng trùng nhau thì "giao" của chúng đồng nhất với mỗi mặt phẳng đó. Nếu A, B và C là ba mặt phẳng không đồng thời song song với một đường thẳng nào thì giao của chúng là một tập hợp gồm một phần tử duy nhất, gồm một điểm.

Thuật ngữ "quỹ tích" về thực chất cũng có nghĩa như thuật ngữ "tập hợp", có thể nói rằng tập hợp (thay cho "quỹ tích") những điểm của mặt phẳng cách đều một điểm cho trước một khoảng xác định là đường tròn.

Trong ví dụ này ta xác định tập hợp (hay quỹ tích) bằng *điều kiện* mà các phần tử của nó phải thoả mãn hoặc bằng *tính chất* mà các phần tử đó cần phải có: tất cả các điểm của đường tròn thoả mãn cùng một điều kiện hay có cùng một tính chất là chúng nằm trên cùng một mặt phẳng và cách một điểm cho trước (kí hiệu là O) một khoảng xác định (kí hiệu là r).

Các khái niệm "điều kiện" và "tính chất" liên quan chặt chẽ với khái niệm tập hợp. Trong nhiều bài toán có thể nhận ra một cách dễ dàng và đơn giản điều kiện hay tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp. Thậm chí, nếu không thể diễn tả một cách khá đầy đủ thì dù sao ta vẫn luôn luôn có thể nói rằng các phần tử của tập hợp S có tính chất là chúng thuộc tập hợp S hoặc thoả mãn điều kiện là chúng tham gia vào tập hợp S.

Sự nghiên cứu phương pháp ba quỹ tích (sau phương pháp hai quỹ tích, xem bài tập 50) có thể đã gợi ý cho ta về khả năng khái quát hơn nữa. Nghiên cứu các tập hợp là giao của chúng lại càng làm cho điều đó thêm hấp dẫn. Ta sẽ trở lại ý nghĩ đó trong một chương sau, còn bây giờ thì hãy để cho nó được chín muồi trong bạn đọc.

Một tập hợp gọi là hợp của nhiều tập hợp cho trước nếu tập hợp đó ít phần tử nhất và mỗi tập hợp cho trước đều là tập hợp con của nó. Nói cách khác, hợp của tập hợp A, B, $C,\ldots, L$ chứa mọi phần tử của A, mọi phần tử của $B\ldots$, mọi phần tử của L, thêm vào đó mỗi phần tử của hợp phải thuộc ít nhất một trong số các tập hợp $A, B, C,\ldots, L$ (phần tử ấy cũng có thể đồng thời thuộc nhiều tập hợp trong số các tập hợp đó).

Các khái niệm hợp và giao của các tập hợp quan hệ chặt chẽ với nhau và không thể thảo luận có kết quả một trong hai khái niệm đó nếu không nhắc đến khái niệm kia. Thực tế ta thường phải xét giao của các tập hợp cho trước nhiều hơn là hợp của chúng. Sẽ rất là bổ ích nếu bạn đọc làm quen với một cuốn sách nào đó trình bày những khái niệm cơ bản của lí thuyết tập hợp, mà rất có thể sẽ được đưa vào chương trình trung học trong tương lai gần.

CHƯƠNG 2. PHƯƠNG PHÁP ĐỀ-CÁC

§1. ĐỀ-CÁC VÀ QUAN NIỆM VỀ PHƯƠNG PHÁP TOÀN NĂNG

Rơ-nê Đề-các (1596 - 1650) là một trong những trí tuệ vĩ đại nhất của nhân loại. Nhiều người coi ông là cha đẻ của nền triết học hiện đại, các công trình nghiên cứu của ông đã làm thay đổi bộ mặt của toán học; ngoài ra tên tuổi ông còn chiếm một vị trí vinh dự trong lịch sử vật lí học. Ở đây, chủ yếu ta sẽ chú ý đến một tác phẩm của Đề-các, cụ thể là "Các nguyên tắc chủ đạo của trí tuệ" (xem chú thích " Các nguyên tắc của Đề-các" thuộc chương này).

Trong các "nguyên tắc" của mình, Đề-các muốn nêu ra một phương pháp toàn năng để giải toán. Đây là lược đồ mà Đề-các mong đợi có thể áp dụng được vào mọi dạng bài toán:

Bước một: Một bài toán dạng bất kì được đưa về một bài toán toán học.

Bước hai: Một bài toán toán học dạng bất kì được đưa về một bài toán đại số.

Bước ba: Một bài toán đại số dạng bất kì được đưa về giải một phương trình duy nhất.

Khối lượng kiến thức của bạn càng lớn thì bạn càng có thể nhận thấy những lỗ hổng trong chương trình đó. Dần dần chính Đề-các cũng phải thừa nhận rằng có những trường hợp lược đồ của ông tỏ ra không thích hợp; dù sao thì ông vẫn bỏ dở "nguyên tắc" của mình và chỉ đưa ra một vài đoạn trong dự án đó vào một tác phẩm sau đó (và nổi tiếng hơn) của mình là cuốn "Bàn về phương pháp".

Có thể thấy được trong ý định cơ bản của lược đồ Đề-các một cái gì đó rất đúng đắn. Tuy nhiên, thực hiện ý định đó thì thật là khó, bởi vì ở đây đã nảy sinh những khó khăn, phức tạp rất lớn mà thoạt tiên, Đề-các đầy nhiệt tình không thể hình dung hết được. Đề án của Đề-các không thành công, tuy vậy đó là một đề án vĩ đại và cho dù là không hiện thực, nó cũng ảnh hưởng đến khoa học lớn hơn cả nghìn đề án nhỏ, trong số đó có cả những đề án có thể thực hiện được.

Mặc dù lược đồ Đề-các không áp dụng được trong mọi trường hợp thì cũng không loại trừ một điều là nó lại thích hợp trong số rất lớn các trường hợp, bao gồm cả nhiều trường hợp quan trọng nhất. Ngay cả khi cậu học sinh trung học giải "bài toán bằng lời" nhờ "hệ thống phương trình" thì cậu ta đang đi theo lược đồ Đề-các và sẵn sàng vận dụng nghiêm túc quan niệm toàn năng làm nền tảng cho lược đồ đó.

Như vậy, có thể là bổ ích nếu ta bắt đầu bằng các tài liệu ở trường trung học.

§2. BÀI TOÁN NHỎ

Đây là một bài toán hóc búa, một bài toán có thể làm cho các em ham suy nghĩ ngày nay rất thích thú và cũng có thể đã rất hấp dẫn đối với các em trong nhiều thế kỉ qua:

Một chủ trại nọ - nuôi gà và thỏ, cả thảy 50 con, gồm 140 chân. Hỏi chủ trại có bao nhiêu gà và thỏ?

Ta hãy xét một cách giải bài toán này.

1. *Chọn cách giải:* tất cả có 50 con vật. Chúng không thể đều là gà cả vì như vậy sẽ chỉ có 100 chân. Cũng không thể nào tất cả đều là thỏ vì như vậy sẽ có 200 chân (mà số chân của chúng phải là 140). Nếu như đúng một nửa số súc vật là gà, nửa kia là thỏ thì chúng phải có...

Ta hãy khảo sát tất cả các trường hợp đó bằng bảng sau

Số gà	*Số thỏ*	*Số chân*
50	0	100
0	50	200
25	25	150

Nếu lấy số gà ít đi thì buộc ta phải lấy số thỏ nhiều hơn, như vậy thì số chân sẽ tăng lên. Ngược lại, nếu lấy số gà nhiều hơn thì... Đúng, gà phải nhiều hơn, hãy thử lấy 30 xem sao:

Số gà	*Số thỏ*	*Số chân*
30	20	140

Đây đúng là số cần tìm! Thế là bài toán giải xong!

Vâng, quả thật là ta đã tìm thấy lời giải nhưng may mà các số cho trước 50 và 100 tương đối không lớn lắm và được chọn rất khéo. Còn nếu như bài toán cũng được phát biểu bằng những lời như trên, nhưng trong đó có những số lớn hoặc không được chọn lựa một cách đặc biệt, thì ta sẽ phải thử rất nhiều và phải rất khéo để con đường của ta dẫn đến kết quả cuối cùng mà không sai sót, nhầm lẫn.

2. *Ý chói lọi.* Tất nhiên, bài toán của ta có thể giải theo cách ít "thực nghiệm" hơn mà "suy diễn" nhiều hơn, ý tôi muốn nói là ít phải thử hơn, ít phải đoán hơn mà phải vận dụng các lập luận nhất quán hơn.

Đây lại là một cách giải nữa.

Chủ trại bắt các con vật nuôi của mình phải đứng ở một tư thế rất kì quặc: mỗi con gà đứng trên một chân, còn mỗi con thỏ thì đứng trên hai chân sau. Tham gia vào cuộc biểu diễn đó là một nửa số chân, tức là 70. Có thể xem số 70 đó là số vật nuôi trong đó mỗi con gà được tính một lần, mỗi con thỏ được tính hai lần. Vì vậy, nếu lấy bớt ở số 70 đi số vật nuôi là 50 thì còn lại là số con thỏ, cụ thể là: 70 – 50 = 20 con thỏ (và dĩ nhiên là 30 con gà).

Phương pháp giải trên vẫn còn thích dụng ngay cả khi thay những số được chọn khá đặc biệt (50 và 140) trong bài toán của ta bằng những số tuỳ ý. Cách giải này (có thể trình bày ít phức tạp hơn) rất là hóm hỉnh, nó đòi hỏi phải nắm được vấn đề một cách thật rõ ràng, trực giác và phải rất nhanh trí, nhân đây tôi xin chúc mừng cậu bé 14 tuổi đã tự mình

tìm ra cách giải đó. Nhưng những ý chói lọi thường không xuất hiện dễ dàng, phải có cái may mắn hiếm hoi thì ý đó mới nảy sinh.

3. *Bằng đại số.* Ta có thể giải bài toán trên không phải dựa vào một sự ngẫu nhiên, cũng không trông mong ở một cái may mắn đặc biệt nào mà bằng một con đường chính quy hơn, nếu ta biết môn đại số, dù chỉ là ít ỏi thôi.

Đại số, đó là thứ ngôn ngữ không dùng đến lời mà chỉ sử dụng các kí hiệu toán học. Nếu ta quen với ngôn ngữ của các kí hiệu đó thì ta có thể phiên dịch sang ngôn ngữ đó những điều phát biểu trong ngôn ngữ thông thường. Bây giờ ta hãy thử phiên dịch bài toán của ta sang ngôn ngữ các kí hiệu toán học. Ta sẽ tuân theo lược đồ Đề-các: "hãy đưa bài toán bất kì về một bài toán đại số". Trong trường hợp này, việc phiên dịch đó không khó khăn gì.

Phát biểu bài toán

Bằng lời	*Bằng ngôn ngữ đại số*
Chủ trại có	
một số lượng gà nào đó	x
và một số lượng thỏ nào đó	y
Cả thảy có 50 con vật nuôi	$x + y = 50$
và một trăm bốn mươi chân.	$2x + 4y = 140$

Ta đã biến đổi bài toán trên thành một hệ hai phương trình có hai ẩn số x và y. Để giải bài toán này, chỉ cần những hiểu biết sơ bộ nhất của đại số. Ta viết lại hệ đó dưới dạng:

$$\begin{cases} x + 2y = 70, \\ x + y = 50; \end{cases}$$

Trừ từng vế hai phương trình ta tìm thấy: $y = 20$.

Với giá trị tìm được, ta tính được từ phương trình thứ hai: $x = 30$.

Phương pháp đó áp dụng được cả trong trường hợp các số lớn lẫn trường hợp các số nhỏ, áp dụng được trong một tập hợp vô hạn các bài toán, nó chẳng cần phải có những ý chói lọi hiếm hoi mà chỉ đòi hỏi phải nắm vững những điều cơ bản của ngôn ngữ đại số.

4. *Khái quát hoá.* Đôi lần ta đã bàn đến khả năng thay các số được cho trong các điều kiện của bài toán bằng những số khác (chủ yếu là lớn hơn) và các lập luận đó rất có ích. Còn bổ ích hơn nữa nếu thay số bằng chữ.

Trong bài toán trên, ta hãy thay 50 bằng h và 140 bằng f. Nói cách khác, giả sử kí hiệu h là số vật nuôi và f là số chân của chúng. Sau phép thay đó, bài toán có một dạng mới, ta hãy xét bản dịch của nó sang ngôn ngữ đại số:

Bằng lời	*Bằng ngôn ngữ đại số*
Chủ trại có	
một số lượng gà nào đó	x
và một số lượng thỏ nào đó	y
Cả thảy có h vật nuôi	$x + y = h$
và f chân.	$2x + 4y = f$

Hệ phương trình mà ta nhận được có thể viết lại như sau: $\begin{cases} x + 2y = \dfrac{f}{2}, \\ x + y = h; \end{cases}$

Trừ từng vế hai phương trình, ta được: $y = \dfrac{f}{2} - h$.

Ta hãy phiên dịch công thức đó ra ngôn ngữ thông thường: số thỏ bằng một nửa số chân trừ bớt đi số vật nuôi; đó cũng chính là kết quả của cách giải trực giác ở m.2^0.

Tuy nhiên, trong trường hợp này không đòi hỏi bất cứ một thủ thuật nào đặc biệt khéo léo hay một óc tưởng tượng tinh tế nào. Ta đã đạt tới kết quả nhờ một quá trình tuần tự và thẳng tắp tiếp sau ngay bước đầu tiên đơn giản là thay số bằng chữ: Bước này hiển nhiên là đơn giản, nhưng lại là bước quan trọng đi tới khái quát hoá(*).

5. *So sánh*. Có thể rất bổ ích nếu đem so sánh các cách giải khác nhau của cùng một bài toán. Nhìn lại bốn cách giải của ta, có thể nhận thấy rằng, mỗi cách đó, kể cả cách đầu tiên, đều có ưu điểm riêng và có một vẻ lí thú đặc biệt của nó.

Cách thứ nhất mà ta nêu lên như một *"phép chọn lọc hay ước toán"*, thường được gọi là phương pháp thử và sai. Về thực chất, nó gồm một loạt các phép thử và trong mỗi bước thử đó lại có hiệu chính những sai số của bước trước; thêm vào đó, nói chung các sai số ngày càng giảm dần và sau mỗi bước thử liên tiếp, ta lại tiến gần hơn đến kết quả mong muốn cuối cùng. Vì vậy, để đặc trưng cho quá trình đó, ta muốn có một thuật ngữ đúng hơn là "phương pháp thử liên tiếp", "phép hiệu chính liên tiếp", "phép lấy xấp xỉ liên tiếp". Thuật ngữ sau cùng có thể là thích hợp nhất về nhiều mặt. Thuật ngữ *phương pháp xấp xỉ liên tiếp* được áp dụng trong rất nhiều quá trình thuộc các lĩnh vực khác nhau và trên mọi mức độ. Bạn sử dụng phương pháp xấp xỉ liên tiếp để điều tra từ điển: bạn lật từ trang này sang trang kia tuỳ theo từ mà bạn thoạt nhìn thấy đứng trước hay sau từ bạn cần tìm trong thứ tự *abc*. Nhà toán học có thể dùng thuật ngữ đó trong một quá trình lao động để nghiên cứu một bài toán nào đó rất phức tạp, có nghĩa thực tiễn lớn lao nếu như không tìm thấy một cách giải quyết nào khác. Thuật ngữ đó cũng có thể áp dụng cho toàn bộ nền khoa học nói chung: các lí thuyết khoa học thay thế lẫn nhau, lí thuyết này mong muốn

(*) Xem Giải một bài toán như thế nào? - Khái quát hoá và Biến đổi bài toán.

giải thích một hiện tượng nào đó đúng đắng hơn lí thuyết kia và có thể xem chúng như những bước tiến ngày càng sát gần chân lí.

Vì vậy, giáo viên không được làm cho học sinh mất hứng thú khi áp dụng "phương pháp thử và sai" mà ngược lại, phải khuyến khích sử dụng hợp lí phương pháp quan trọng nhất đó. Đồng thời giáo viên cũng phải chứng minh một cách rõ ràng rằng, đối với những bài toán đơn giản, như bài toán về gà và thỏ, cũng như đối với nhiều vấn đề khác (quan trọng hơn) áp dụng trực tiếp đại số có hiệu quả hơn phương pháp xấp xỉ liên tiếp.

§3. LẬP PHƯƠNG TRÌNH

Ta đã phải (m.3 §2) phiên dịch bài toán ở trên từ ngôn ngữ thông thường bằng lời sang ngôn ngữ đại số gồm những kí hiệu toán học. Trong ví dụ đó, việc phiên dịch thật dễ; tuy nhiên, trong nhiều trường hợp, để biến đổi các điều kiện bài toán thành hệ phương trình đòi hỏi hoặc phải có nhiều kinh nghiệm hoặc phải có nhiều sáng tạo hoặc phải tốn nhiều công sức lao động(*).

Lao động đó phải như thế nào? Đề-các đã định giải đáp vấn đề đó trong phần thứ hai của cuốn "Các nguyên tắc" mà ông chưa viết xong. Tôi dự định rút ra từ văn bản đó (được dịch ra ngôn ngữ hiện đại) những yếu tố thích hợp nhất đối với giai đoạn nghiên cứu của chúng ta hiện nay. Đồng thời tôi buộc lòng phải bỏ qua nhiều điểm mà Đề-các đã nói đến và ngược lại, phải nhấn mạnh một số điều mà ông không trình bày rõ nhưng dù sao tôi vẫn hi vọng rằng, tôi không xuyên tạc ý đồ của ông.

Tôi thích theo cách trình bày kiểu Đề-các. Về từng điểm một trong lập luận, tôi thường nói trước "lời giới thiệu" vắn tắt (thực ra đó sẽ là phần tóm tắt), rồi sau đó tôi sẽ phát triển thêm thông qua những lời bình luận bổ sung.

1. *Khi đã hiểu rõ bài toán rồi thì trước hết bạn hãy đưa nó về việc tìm những lượng chưa biết nào đó* (Các nguyên tắc XIII – XVI).

Thật là phi lí nếu mất thời giờ với một bài toán mà ta không hiểu rõ. Bởi vậy, điều hiển nhiên nhất và trước hết là phải *hiểu* bài toán, ý nghĩa của nó.

Sau khi đã hiểu rõ toàn bộ bài toán, ta sẽ tập trung chú ý vào những phần chủ yếu nhất của nó. Ta phải phân biệt được thật rõ.

- Đối tượng phải tìm thuộc loại nào? (*ẨN* hay các ẩn là gì?);
- Cái gì đã cho hoặc đã biết? (các *DỮ KIỆN* là gì?);
- Các ẩn và các dữ kiện liên quan với nhau như thế nào, bằng những quan hệ nào? (*ĐIỀU KIỆN* là gì?).

(*) Xem Giải một bài toán như thế nào? - Đặt phương trình.

(Trong bài toán ở m.4 §2, các ẩn là x và y, các dữ kiện là h và f, tương ứng là số gà, số thỏ, số vật nuôi và số chân. Điều kiện lúc đầu được diễn đạt bằng lời và sau đó bằng các phương trình).

Sau đó, theo Đề-các, ta giới hạn trong phạm vi các bài toán mà ở đó ẩn là *số lượng* (nghĩa là số, không nhất thiết phải là số nguyên). Nhưng bài toán loại khác, chẳng hạn như các bài toán hình học hay vật lí thường cũng có thể dẫn được về những bài toán về lượng; ta sẽ giải thích điều đó ở phần sau (xem các ví dụ ở §5 và §6).

2. *Giả thiết rằng bài toán đã giải xong, hãy nghiên cứu nó một cách tự nhiên nhất và theo một trình tự thích ứng, hãy cố hình dung thật cụ thể mọi quan hệ, mà theo điều kiện cần phải giữ các ẩn và dữ kiện* (Nguyên tắc XVII).

Giả sử rằng, các lượng chưa biết có giá trị hoàn toàn thoả mãn điều kiện bài toán; điều đó căn bản dựa trên "giả thiết rằng bài toán đã giải xong" (xem §4 chương 1). Do đó, theo một ý nghĩa nhất định, ta coi các lượng đã biết và chưa biết là bình đẳng, ta hãy biểu diễn một cách cụ thể các quan hệ ràng buộc chúng như điều kiện đòi hỏi. Ta phải khảo sát và nghiên cứu các quan hệ đó giống như ta đã khảo sát và nghiên cứu hình khi giải toán dựng hình vậy (xem chương 1, phần cuối §7). Mục đích của ta là để có được những chỉ dẫn nào đó cho giai đoạn sau.

3. *Hãy tách ra một phần điều kiện cho phép biểu diễn cùng một lượng bằng hai phương pháp khác nhau để được một phương trình ràng buộc các ẩn số. Rút cuộc lại có bao nhiêu ẩn số, bạn phải phân chia điều kiện ra bấy nhiêu phần để bằng cách đó đi đến bấy nhiêu phương trình.* (Nguyên tắc XIX).

Đoạn trên đây là phỏng dịch hay lược tả điều khẳng định trong nguyên tắc XIX của Đề-các. Trong bản thảo Đề-các, sau nguyên tắc này có một khoảng trống lớn; không có một lời giải thích đáng lí phải có tiếp ngay sau điều khẳng định trong nguyên tắc đó (có thể là lời giải thích đó chưa bao giờ được viết ra). Bởi vậy chúng tôi phải đưa ra những lời bình luận của mình.

Mục đích đặt ra khá rõ ràng: ta cần có được một hệ n phương trình có n ẩn số. Cũng dễ hiểu là sau khi tính các ẩn số đó, ta phải được lời giải của bài toán. Vì vậy, hệ phương trình giải tương đương với điều kiện cho trước. Nếu toàn bộ hệ biểu diễn một cách đầy đủ điều kiện thì mỗi phương trình của hệ phải biểu diễn một phần nào đó của điều kiện. Vì thế cho nên, để thiết lập n phương trình, ta cần phải chia điều kiện ra n phần. Nhưng làm điều đó như thế nào?

Các lập luận ở m.1 và m.2 (lược đồ các nguyên tắc XIII-XVII của Đề-các) chỉ bao gồm một vài gợi ý cho việc giải quyết vấn đề, chứ chưa phải là những chỉ dẫn chính xác. Nhất thiết cần phải nghiên cứu kĩ bài toán, khảo sát thật kĩ các ẩn số, dữ kiện và điều kiện. Cũng có thể rút ra được điều bổ ích khi nghiên cứu riêng rẽ từng phần khác nhau của điều kiện và biểu diễn một cách trực quan mối liên hệ giữa các ẩn số và các dữ kiện. Tất cả những thao tác đó mang lại cho ta một hi vọng nào đó để được một hệ thống phương trình cần tìm, nhưng chưa làm cho ta tin tưởng hoàn toàn.

Trong lời khuyên ở trên (lược dịch Nguyên tắc XIX) đặc biệt nhấn mạnh một điều: muốn thiết lập một phương trình cần *biểu diễn cùng một lượng bằng hai phương pháp khác nhau* (Trong bài toán ở m.3 §2 phương trình biểu diễn *số chân* bằng hai phương pháp). Vận dụng nhận xét đó một cách thích hợp thường giúp ta thiết lập được phương trình ràng buộc các ẩn số và nó luôn luôn có thể giúp ta vạch ra ý nghĩa của phương trình nếu nó đã được thiết lập.

Có thể nói một cách vắn tắt rằng có một phương pháp tốt, nhưng không có nguyên tắc nào để phòng ngừa được các sai lầm khi thiết lập phương trình. Cũng được thôi, ở đâu các nguyên tắc cũng không giúp được gì, thì kinh nghiệm thực tiễn sẽ giúp ta.

4. *Hãy đưa hệ phương trình đến một phương trình duy nhất* (Nguyên tắc XXI).

Điều khẳng định trong nguyên tắc XXI của Đề-các mà ở đây ta chỉ phỏng dịch, không có những lời giải thích kèm theo (trong bản thảo của Đề-các đó là câu cuối cùng). Ta sẽ không nghiên cứu ở đây các điều kiện để một hệ phương trình đại số dẫn được về một phương trình, ta sẽ không đặt vấn đề là trong thực tiễn điều đó được tiến hành như thế nào: những vấn đề đó thuộc về phương diện toán học thuần tuý, phức tạp hơn. Hiện nay, những lí thuyết toán học tương ứng đã nghiên cứu khá tốt, nhưng bây giờ chúng ta quan tâm không phải đến vấn đề đó. Trong các trường hợp đơn giản đòi hỏi những hiểu biết như vậy ta chỉ cần sơ bộ làm quen với đại số là đủ.

Tuy nhiên, ở đây còn có những vấn đề khác chưa được nghiên cứu mà sau đây ta sẽ động chạm tới. Sẽ bổ ích hơn nếu chuyển sang các vấn đề đó khi đã phân tích một số ví dụ.

§4. NHỮNG BÀI TOÁN Ở TRƯỜNG

"Những bài toán bằng lời" hay gặp trong chương trình trung học có vẻ tầm thường đối với các nhà toán học, nhưng nó lại không phải là tầm thường trước con mắt học sinh, thậm chí đối với các thầy cô giáo của họ nữa. Tuy vậy, tôi cho rằng nếu giáo viên cố gắng thực hiện nghiêm túc những lời khuyên của Đề-các mà ta vừa nhắc tới trong điều kiện trường trung học và sẽ áp dụng những lời khuyên đó trong thực tiễn, thì sẽ vượt qua được những khó khăn thường xuyên xuất hiện khi giải các bài toán loại đó.

Trước hết, học sinh không được bắt tay vào giải bài toán khi chưa hiểu rõ bài toán đó. Trong một chừng mực nào đó có thể phải kiểm tra xem học sinh có thực sự hiểu rõ bài toán hay chưa: học sinh phải biết kể lại bài toán, phân biệt được các ẩn các dữ kiện và giải thích các điều kiện bằng "lời của mình". Nếu học sinh làm được điều đó một cách có ý thức thì họ có thể chuyển sang phần cơ bản của công việc.

Mỗi phương trình riêng biệt biểu diễn *một phần điều kiện*. Học sinh phải biết lí giải phần nào của điều kiện được biểu diễn bằng phương trình mà học sinh đã viết ra phần nào còn chưa sử dụng đến.

Mỗi phương trình đều thể hiện rằng *cùng một lượng được viết bằng hai cách khác nhau*. Học sinh phải biết trả lời câu hỏi lượng đó là gì?

Tất nhiên học sinh phải nắm vững những *kiến thức cần thiết*. Thiếu những kiến thức này thì học sinh không thể nào hiểu rõ bài toán được. Nhiều bài toán điển hình đối với trường trung học, đó là "các bài toán về tốc độ" (xem ba ví dụ sau). Trước khi bắt tay vào giải bài toán loại đó, học sinh phải nắm khá vững khái niệm "vận tốc" thay đổi đều, phụ thuộc tỉ lệ.

1. *Một vòi nước chảy đầy bể trong 15 phút, một vòi khác trong 20 phút và vòi thứ ba trong 30 phút. Nếu cả ba vòi cùng chảy thì trong bao lâu bể sẽ đầy nước.*

Giả sử rằng thể tích của bể bằng a lít. Khi đó vận tốc nước chảy qua vòi thứ nhất bằng $\frac{a}{15}$ lít trong 1 phút. Bởi vì:

Thể tích = vận tốc x thời gian;

nên lượng nước chảy trong t phút qua vòi thứ nhất sẽ bằng: $\frac{a}{15}t$ lít;

Nếu cả ba vòi cùng làm đầy bể trong t phút, thì *lượng nước* trong bể có thể biểu diễn bằng hai cách $\frac{a}{15}t+\frac{a}{20}t+\frac{a}{30}t=a$.

Vế trái của đẳng thức chỉ rõ phần nước chảy của từng vòi riêng biệt, còn vế phải là tổng hợp kết quả của cả ba vòi chảy. Chia cả hai vế của phương trình cho a ta được phương trình: $\frac{t}{15}+\frac{t}{20}+\frac{t}{30}=1$ từ đó có thể xác định được thời gian t phải tìm.

Đương nhiên có thể suy ra phương trình này bằng cách khác và có thể khái quát hoá, đặc biệt hoá bài toán đó bằng nhiều phương pháp khác nhau.

2. *Tôm có thể hoàn thành công việc trong 3 giờ, còn Đích trong 4 giờ và Ga-ri trong 6 giờ. Nếu cùng làm thì họ có thể hoàn thành công việc trong bao lâu?* (Giả thiết rằng họ không làm trở ngại cho nhau).

Trong 1 giờ, Tôm có thể làm xong $\frac{1}{3}$ công việc; ta có thể nói rằng Tôm làm việc với vận tốc $\frac{1}{3}$ toàn bộ công việc trong giờ. Bởi vậy trong t giờ, Tôm làm được $\frac{t}{3}$ công việc. Nếu cả 3 cùng làm (và không làm trở ngại cho nhau – điều kiện này khá là không xác định) và kết thúc công việc sau t giờ, thì toàn bộ khối lượng công việc có thể biểu diễn bằng hai cách: $\frac{t}{3}+\frac{t}{4}+\frac{t}{6}=1$, trong đó đơn vị ở vế phải biểu thị toàn bộ công việc, "được coi như một tổng thể".

Bài toán này hầu như đồng nhất với bài toán ở m.1 trên đây, cả về số cũng vậy, bởi vì 15: 20: 30 = 3: 4: 6.

Thật là bổ ích nếu đặt một bài toán tổng quát hơn (qua các kí hiệu bằng các chữ) bao hàm cả hai bài toán trên. Ngoài ra, cũng rất lí thú nếu đem so sánh các cách giải tìm được và cân nhắc ưu điểm, nhược điểm của việc đưa đại lượng a vào cách giải của ví dụ 1.

3. *Một máy bay tuần tra bay trong thời tiết lặng gió được 220 dặm một giờ. Nhiên liệu dự trữ được tính để bay trong 4 giờ. Máy bay có thể bay xa bao nhiêu nếu cần phải bay trở lại nơi cất cánh và nếu khi bay gió thổi với vận tốc 20 dặm 1 giờ ngược lại với hướng bay lúc đầu?*

Giả thiết rằng trong suốt thời gian bay, sức gió không thay đổi, rằng máy bay theo đường thẳng và thời gian để máy bay quay lại hướng bay (tại nơi xa nhất của địa điểm cất cánh) là rất nhỏ, không đáng kể,... Mọi bài toán bằng lời đều có những giả thiết được đơn giản hoá đòi hỏi người giải toán phải làm một số công việc sơ bộ để hiểu rõ ý nghĩa của chúng và một sự *trừu tượng hoá* thích hợp. Đó là nét căn bản của các bài toán bằng lời; công việc sơ bộ đó không phải lúc nào cũng tầm thường và ít ra đôi lúc phải được tiến hành một cách rành mạch.

Bài toán của ta sẽ trở nên bổ ích hơn, nếu các số

220 20 4

được thay bởi các đại lượng bằng chữ

v w T

biểu thị tương ứng tốc độ máy bay trong thời tiết lặng gió, vận tốc gió và toàn bộ thời gian bay cả hai chiều. Ba đại lượng đó là các dữ kiện của ta. Giải sử x biểu thị khoảng cách mà máy bay có thể bay xa, t_1 là thời gian bay đi (đến nơi quay lại), t_2 là thời gian bay trở lại. Cả ba đại lượng đó là *các ẩn số* của ta, một số đại lượng nói trên có thể được sắp xếp một cách đặc biệt trong bảng sau:

	Bay đi	*Bay trở lại*
Khoảng cách	x	x
Thời gian	t_1	t_2
Vận tốc	$v - w$	$v + w$

(Để viết được dòng cuối cùng đòi hỏi phải có những hiểu biết "đương nhiên" nào đó, nghĩa là không cần giải thích trước về động học).

Rồi thì ta cũng lại phải biết

Khoảng cách = vận tốc × thời gian.

Biểu diễn mỗi đại lượng trong ba đại lượng đó bằng hai cách:

$x = (v - w)\, t_1,$

$x = (v + w)\, t_2,$

$t_1 + t_2 = T,$

ta được một hệ thống ba phương trình có ba ẩn số x, t_1 và t_2. Trong bài toán chỉ đòi hỏi tìm một trong ba ẩn số đó, cụ thể là x, t_1 và t_2 đó là những *ẩn số phụ* được ta đưa vào để biểu diễn hoàn toàn điều kiện bài toán. Nếu khử t_1 và t_2 đi, thì ta tìm thấy.

$$\frac{x}{v-w} + \frac{x}{v+w} = T,$$

do đó $x = \dfrac{(v^2 - w)T}{2v}$.

Thay các giá trị bằng số đối với các dữ kiện v, w, T không có gì khó khăn cả. Lí thú hơn là việc phân tích kết quả và kiểm tra sự đúng đắn của kết quả bằng cách *thay đổi các dữ kiện xuất phát*.

Nếu $w = 0$, thì $2x = vT$. Điều đó tất nhiên là đúng vì trong trường hợp này máy bay đi và bay về trong thời tiết lặng gió.

Nếu $w = v$, thì $x = 0$. Điều này cũng rõ ràng vì máy bay không thể nào bay ngược gió có vận tốc v.

Nếu tốc độ w tăng từ $w = 0$ đến $w = v$, thì như công thức chứng tỏ, khoảng cách x giảm dần. Và công thức lại khẳng định rằng có thể thấy trước khi phân tích vấn đề trên quan điểm "phán đoán" mà không nhờ đến đại số.

Nếu như ta đã giải bài toán với các dữ kiện bằng số, chứ không phải bằng chữ thì nghiên cứu bổ ích trên công thức, cũng như cách kiểm tra có giá trị kết quả thu được đã bị bỏ qua đi mất. Ta nhận xét rằng, cũng còn có những cách kiểm tra lí thú khác.

4. *Một người bán hai loại lạc: một loại giá 90 xu một kilôgam, loại kia 60 xu một kilôgam. Người đó muốn có 50 kilôgam lạc hỗn hợp giá 70 xu một kilôgam. Hỏi phải trộn mỗi loại lạc bao nhiêu kilôgam?*

Đây là một loại "bài toán hỗn hợp" điển hình và khá đơn giản. Giả sử rằng người đó lấy x kilôgam lạc loại một và y kilôgam lạc loại hai; x và y là các ẩn số. Để cho thuận tiện, ta khảo sát các ẩn số cùng với các dữ kiện trong bảng sau:

	Loại một	*Loại hai*	*Hỗn hợp*
Giá 1kg	90 xu	60 xu	72 xu
Trọng lượng	x kg	y kg	50 kg

Ta biểu diễn *trọng lượng hỗn hợp* bằng hai cách $x + y = 50$.

Sau đó ta viết thành tiền hỗn hợp bằng hai cách $90x + 60y = 72.50$.

Ta được hệ phương trình có hai ẩn số x và y. Cách giải hệ đó xin nhường cho bạn đọc, kết quả ta được nghiệm: $x = 20$, $y = 30$.

Nếu chuyển các số thành chữ thì sẽ được một bài toán mà ta có thể giải thích theo cách khác (lí thú hơn), điều này sẽ thấy rõ trong phần sau.

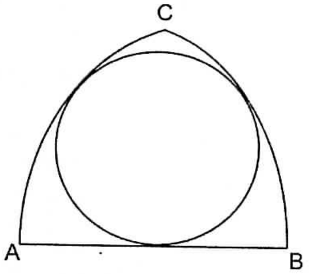
§5. CÁC VÍ DỤ HÌNH HỌC

Ta chỉ xét hai ví dụ sau đây:

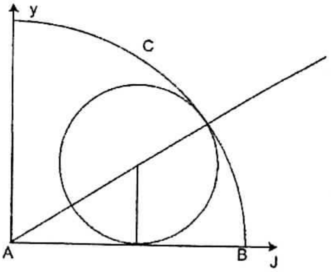
1. *Bài toán dựng hình.* Bất kì bài toán dựng hình nào cũng có thể đưa về bài toán đại số. Ở đây, ta không thể bàn đến lí thuyết tổng quát của vấn đề này; bởi vậy ta chỉ xét một ví dụ.

Đoạn thẳng AB và hai cung tròn AC và BC tạo thành một tam giác cong. Tâm của một đường tròn tại điểm A, tâm của đường tròn kia tại điểm B và mỗi đường tròn đó đi qua tâm đường tròn kia. Hãy nội tiếp trong tam giác cong đó một đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của tam giác.

Cấu hình tương tự như vậy (hình 2.1) đôi khi có thể thấy ở các đường nét trang hoàng trên các công trình kiến trúc gô-tích.



Hình 2.1. Một chi tiết của cửa sổ kiểu gô-tích



Hình 2.2. Ta bỏ đi một phần của điều kiện

Rõ ràng là bài toán của ta có thể quy về dựng một điểm duy nhất – tâm của đường tròn phải tìm. Một trong những quỹ tích mà điểm đó phải thuộc về, dĩ nhiên là đường thẳng vuông góc với đoạn AB tại điểm giữa của nó; đường thẳng vuông góc này là trục đối xứng của tam giác cong. Như vậy, ta chỉ còn phải tìm quỹ tích thứ hai.

Hãy chỉ giữ lại một phần của điều kiện và bỏ qua điều kiện kia. Ta hãy xét một đường tròn có bán kính biến thiên, tiếp xúc không phải với cả ba cạnh mà chỉ với hai cạnh của tam giác, cụ thể là với đoạn AB và cung BC (hình 2.2). Để tìm quỹ tích tâm của đường tròn biến thiên đó, ta sử dụng hình học giải tích. Ta đặt gốc của hệ toạ độ vuông góc trùng với điểm A, còn trục x hướng theo đoạn AB (hình 2.2). Ta kí hiệu x và y là các toạ độ của tâm đường tròn. Nối tâm đó với hai tiếp điểm mà ta cho là quan trọng. Một tiếp điểm thuộc đoạn AB, tiếp điểm kia thuộc cung BC. Các đoạn nhận được coi như các bán kính của cùng một đường tròn và có cùng một độ dài; độ dài đó có thể biểu diễn bằng hai cách khác nhau (giả sử $AB = a$): $y = a - \sqrt{x^2 + y^2}$.

Khử căn bậc hai rồi viết lại phương trình đó, ta có: $x^2 = a^2 - 2ay$.

Như vậy, quỹ tích tâm các đường tròn là *parabol*, tức là một đương cong không có ứng dụng trực tiếp trong các phép dựng hình.

Ta hãy trở lại quỹ tích mà ta nhắc đến lúc đầu, tức là đường thẳng vuông góc với đoạn AB tại trung điểm của nó. Phương trình của đường thẳng vuông góc đó có dạng đơn giản: $x = \frac{a}{2}$.

Thay biểu thức đó vào phương trình của parabol ta sẽ được biểu thức đối với tung độ của tâm đường tròn phải tìm: $y = \frac{3a}{8}$.

Dựng tung độ tìm được theo đoạn thẳng cho trước $a = AB$ không có gì khó khăn cả.

2. *Tương tự định lí Pi-ta-go trong hình học không gian.* Các phép tương tự có thể không phải là duy nhất, chẳng hạn, trong hình học không gian có một loạt mệnh đề mà ta có cơ sở đầy đủ để coi chúng như các tương tự của định lí Pi-ta-go. Ví dụ như, có thể được một mệnh đề như vậy nếu coi hình lập phương như là tương tự của hình vuông, còn tứ diện có được bằng cách cắt một góc của hình lập phương bởi một mặt phẳng nghiêng thì được xem như tương tự của tam giác vuông (có được bằng cách cắt một góc của hình vuông bởi một đường thẳng). Đỉnh góc vuông của tam giác vuông tương ứng với đỉnh của tứ diện và đỉnh của tứ diện ta sẽ gọi là *đỉnh góc tam diện vuông.* (Thật vậy, ba cạnh của tứ diện xuất phát từ đỉnh đó vuông góc với nhau, tức là tạo nên ba góc vuông).

Định lí Pi-ta-go có thể coi như lời giải của bài toán sau đây: trong một tam giác vuông ở đỉnh O, cho trước các độ dài a và b của cạnh xuất phát từ đỉnh đó; hãy tìm độ dài của c của cạnh đối diện điểm O.

Bài toán tương tự trong không gian có thể phát biểu như sau: *trong một tứ diện có một góc tam diện ở đỉnh O, cho trước các diện tích A, B và C của ba mặt xuất phát từ đỉnh đó. Tìm diện tích S của mặt đối diện điểm O.*

Ta cần phải biểu thị S theo A, B và C. Đương nhiên có thể chờ đợi sẽ được một công thức tương tự với định lí Pi-ta-go: $c^2 = a^2 + b^2$, công thức này biểu diễn lời giải của bài toán hình học phẳng tương ứng. Một học sinh trung học cho rằng: $S^3 = A^3 + B^3 + C^3$.

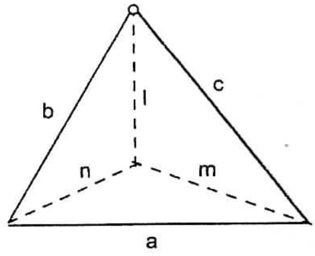
Đó là một giả thuyết hợp lí bởi vì sự thay đổi giá trị của số mũ phản ánh đúng việc chuyển từ không gian hai chiều sang ba chiều.

3. *Ẩn là gì?* Là diện tích tam giác S.

Làm thế nào để tìm được ẩn đó? *Làm thế nào để có được một hình tương tự?* Nếu đã biết ba cạnh của tam giác, thì diện tích của nó có thể tính được theo công thức Hê-rôn. Diện tích tam giác của ta bằng S. Giả sử a, b, c là độ dài của các cạnh của tam giác và $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi của nó, vậy thì: $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$.

(Đó là một trong những dạng của hệ thức Hê-rôn). Trên hình vẽ (hình 2.3) ta biểu thị các cạnh của tam giác S bằng các chữ a, b và c.

Dường như thế là xong! Tuy nhiên các cạnh a, b và c ta đã biết hay chưa? Chưa, chưa biết, nhưng đó là các cạnh của tam giác vuông và nếu như trong các tam giác đó đã biết được các cạnh góc vuông (mà trên hình 2.3 ta kí hiệu là l, m và n) thì ta đã có thể biểu diễn a, b và c theo các cạnh vuông góc đó: $a^2 = m^2 + n^2$, $b^2 = n^2 + l^2$, $c^2 = l^2 + m^2$.



Hình 2.3. Định lí Pi-ta-go trong không gian

Như vậy là tốt. Tuy nhiên, ngay cả các đại lượng l, m và n phải chăng đã biết rồi? Chưa, nhưng chúng có liên quan tới các diện tích cho trước A, B và C nhờ các hệ thức:

$$\frac{1}{2}mn = A, \quad \frac{1}{2}nl = B, \quad \frac{1}{2}lm = C.$$

Điều đó đúng, nhưng dù sao thì liệu ta đã đạt được một kết quả tích cực nào đó chưa? Tôi thiết nghĩ là đã. Mặc dù bây giờ ta có những 7 ẩn số: S; a, b, c; l, m, n.

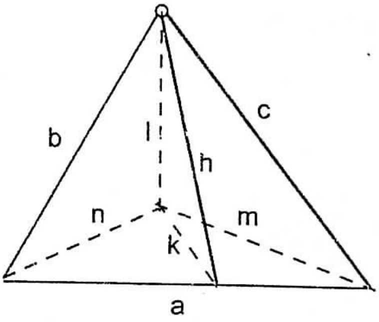
Nhưng đồng thời ta cũng có cả một hệ 7 phương trình để tìm các ẩn số đó.

4. Trong các lập luận của ta ở m.3 không có gì sai sót. Ta đã đạt được mục đích nêu trong nguyên tắc Đề-các (mà chúng tôi đã dẫn ra một cách không nguyên văn ở m.3 §3 chương 2), nghĩa là ta đã được một hệ có bao nhiêu ẩn số thì có bấy nhiêu phương trình. Quả thật là ở đây có ý kiến không tán đồng vì số 7 có thể là lớn quá, quá trình giải 7 phương trình có 7 ẩn số xem ra thì cực kì vất vả. Vả lại, ngay cả công thức Hê-rôn cũng không phải là đặc biệt hấp dẫn.

Nếu đồng ý với tất cả các điều đó thì phải chăng, tốt hơn hết là ta hãy làm lại tất cả từ đầu.

Ẩn là gì? Là diện tích của tam giác mà ta kí hiệu là S. Làm thế nào có thể tìm được ẩn đó? *Làm thế nào để có được cái tương tự?* Công thức đơn giản nhất để tính diện tích tam giác có dạng: $S = \frac{ah}{2}$ trong đó a là các cạnh đáy của tam giác, h là đường cao của nó; trên hình vẽ (hình 2.4) ta kí hiệu đường cao của tam giác là h.

Điều tốt là ta đã gặp a, nhưng còn đối với h thì sao? Chiều cao h của tam giác cần tìm có diện tích S có thể tính thử nếu dùng một tam giác phụ nào đó. Muốn vậy ta cắt tứ diện bởi mặt phẳng đi qua đường cao h và đỉnh của góc tam diện vuông. Thiết diện cho ta một tam giác vuông có cạnh huyền h và cạnh góc vuông l mà đã được nhắc đến; cạnh góc vuông thứ hai - ta kí hiệu nó là k - sẽ là chiều cao của tam giác có diện tích a hạ xuống cạnh có độ dài a.



Hình 2.4. Ý đồ mới

Như vậy, $h^2 = k^2 + l^2$.

Rất hay! Nhưng phải làm gì với k? Ta phải tìm đại lượng này bằng một cách nào đó.

Ta biểu diễn diện tích của tam giác có chiều cao là k bằng hai cách: $\frac{1}{2}ak = A$.

Bây giờ ta đã có bao nhiêu phương trình với bấy nhiêu ẩn số hay chưa? Vì có cả những phương trình cũ nữa, bây giờ không cần phải kể lại các phương trình đó làm gì. Đường lối, có lẽ, đã khá rõ. Tổng kết lại tất cả những gì đã có, ta được:

$$4S^2 = a^2h^2 \qquad = a^2(k^2 + l^2)$$

$$= 4A^2 + a^2l^2$$
$$= 4A^2 + (n^2 + m^2)l^2$$
$$= 4A^2 + (nl)^2 + (lm)^2$$
$$= 4A^2 + 4B^2 + 4C^2.$$

Từ đó ta có: $S^2 = A^2 + B^2 + C^2$.

Kết quả, dĩ nhiên là hoàn toàn tương tự với định lí Pi-ta-go. Điều ước đoán rằng chỉ số của luỹ thừa sẽ là ba, đã không được xác nhận, nhưng điều đó không được làm cho ta bối rối. Điều đáng ngạc nhiên là ở chỗ dự đoán của ta đã khá gần với chân lí.

Bạn hãy so sánh hai cách giải đối với bài toán đó, chúng khác nhau về nhiều phương diện và sự so sánh như vậy có thể rất bổ ích.

Bạn còn có thể nghĩ ra được một cái tương tự nào đó của định lí Pi-ta-go nữa hay không?

§6. VÍ DỤ TRONG VẬT LÍ

Ta bắt đầu từ vấn đề sau đây:

Một quả cầu bằng sắt thả nổi trên mặt thuỷ ngân đựng trong một cái chậu. Nước được đổ từ trên xuống và dần dần phủ kín quả cầu. Quả cầu sẽ chìm xuống, nổi lên hay vẫn ở độ sâu ban đầu?

Ta hãy so sánh hai trường hợp. Trong trường hợp thứ nhất phần trên quả cầu ở trong không khí (hoặc trong chân không), còn trong trường hợp thứ hai; phần trên có nước phủ kín (phần dưới quả cầu trong cả hai trường hợp chìm trong thuỷ ngân, tức là nằm dưới mức thuỷ ngân). Trong trường hợp nào phần quả cầu ở trên mặt thuỷ ngân sẽ lớn hơn?

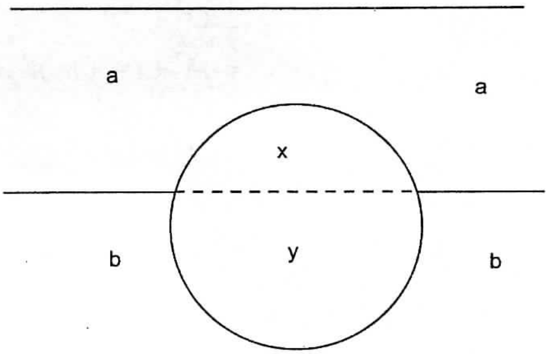
Vấn đề đó thuần tuý có tính chất định tính, nhưng cũng có thể làm cho nó có màu sắc định lượng cho phép chính xác hoá được vấn đề (cũng như làm cho nó trở nên dễ hiểu đối với việc khảo sát bằng các phương pháp đại số).

Trong mỗi trường hợp đó ta hãy tính phần thể tích quả cầu nằm trên mặt thuỷ ngân.

1. Nếu chỉ dựa trên trực giác mà lập luận thì cũng có thể trả lời vấn đề nêu ra một cách định tính và có lí. Muốn vậy, chỉ cần hình dung thật rõ ràng quá trình chuyển từ trạng thái này sang trạng thái khác được thực hiện một cách liên tục. Ta hãy hình dung một chất lỏng nào đó được đổ lên thuỷ ngân và phủ quanh phần quả cầu sắt và chất lỏng đó có *tỉ trọng thay đổi không ngừng*. Thoạt đầu, chất lỏng tưởng tượng đó có tỉ trọng bằng 0 (nghĩa là ta có chân không). Sau đó tỉ trọng của chất lỏng tăng lên, nó đạt tới tỉ trọng không khí và qua một thời gian nào đó đạt tới tỉ trọng của nước. Nếu bạn còn chưa thấy rõ sự thay đổi tỉ trọng đó có ảnh hưởng như thế nào đến quả cầu nổi, thì bạn giả định rằng *tỉ trọng còn tiếp tục tăng lên nữa.* Vào lúc tỉ trọng của chất lỏng tưởng tượng của ta đạt tới tỉ trọng của sắt thì quả cầu phải hoàn toàn nổi lên khỏi mặt thuỷ ngân.

Thật vậy, nếu như tỉ trọng còn tăng lên dù chỉ một đại lượng nhỏ nhất đi nữa thì quả cầu nổi lên trên và nhô một chút ra khỏi chất lỏng tưởng tượng.

Đương nhiên có thể giả thiết rằng, trong khi tỉ lệ của chất lỏng tưởng tượng tăng lên thì vị trí của quả cầu sẽ thay đổi *theo cùng một hướng*. Như vậy, ta nhất thiết phải đi tới kết luận rằng khi chuyển từ chân không hay không khí bao quanh quả cầu thành nước thì quả cầu sẽ *nổi lên*.



Hình 2.5. Quả cầu và hai chất lỏng

2. Để trả lời vấn đề nêu trên một cách định hướng, ta cần biết tỉ trọng của các chất cho trong bài toán. Đây là bảng các tỉ trọng đó:

	Nước	*Thuỷ ngân*	*Sắt*
Tỉ trọng	1,00	13,60	7,84

Tuy nhiên, nếu thay các dữ kiện bằng số bởi các chữ thì sẽ bổ ích hơn rất nhiều. Ta biểu thị:

a	*b*	*c*
là tỉ trọng tương ứng của chất lỏng ở trên	chất lỏng ở dưới	quả cầu

Giả sử kí hiệu v là thể tích (cho trước) của quả cầu; x là phần thể tích của v nằm trên mức phân cách hai chất lỏng, còn y là phần thể tích nằm dưới mức đó (hình 2.5). Các đại lượng a, b, c và v là các dữ kiện, x và y là các ẩn số. Tất nhiên là $a < c < b$.

Thể tích quả cầu có thể biểu diễn bằng hai cách: $x + y = v$.

Tuy nhiên, ta không thể tiếp tục tiến lên nếu không biết các định luật vật lí tương ứng. Ở đây ta muốn nói đến định luật *Ác-si-mét* mà thường thường được phát biểu như sau: *vật thể nhúng chìm trong một chất lỏng chịu một sức đẩy bằng trọng lượng của chất lỏng bị vật thể đó chiếm chỗ*. Quả cầu đang xét chiếm chỗ của chất lỏng trong hai lớp khác nhau. Trọng lượng của các chất lỏng bị chiếm chỗ bằng:

ax	và	*by*
tương ứng với lớp trên	và	lớp dưới

Hai lực thẳng đứng trên đó phải cân bằng với trọng lượng quả cầu nổi, vì vậy các tổng có thể biểu diễn bằng hai cách $ax + by = cv$.

Bây giờ đối với cả hai ẩn số x và y, ta có một hệ hai phương trình. Giải hệ đó, ta được: $x = \dfrac{b-c}{b-a}v$, $y = \dfrac{c-a}{b-a}v$.

3. Ta hãy trở lại phần đầu của mục này. Trong trường hợp thứ nhất, khi trên mặt thuỷ ngân là chân không, ta có: $a = 0$; $b = 13,60$; $c = 7,84$.

Lúc này thể tích của phần quả cầu ở trên mặt thuỷ ngân có giá trị $x = 0,423\ v$.

Trong trường hợp thứ hai, khi trên mặt thuỷ ngân là nước: $a = 1,00$; $b = 13,60$; $c = 7,84$, ta được $x = 0,457\ v$.

Số thứ hai *lớn hơn*, điều đó phù hợp với lập luận trực giác của ta.

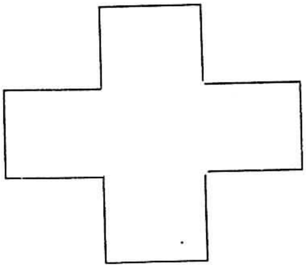
Công thức (bằng chữ) tổng quát đối với ta lí thú hơn bất cứ kết quả bằng số nào tính được nhờ công thức đó. Thật vậy, giả sử b, c và v là hằng số, còn a (tỉ trọng của lớp trên) tăng từ $a = 0$ đến $a = c$.

Khi đó mẫu số $b - c$ trong biểu thức đối với x giảm đi liên tục và vì vậy x, tức là phần thể tích v ở trên mức độ thuỷ ngân, tăng lên liên tục từ $x = \frac{b-c}{b}v$ đến $x = v$.

§7. VÍ DỤ VỀ MỘT BÀI TOÁN NÁT ÓC

Làm thế nào để từ năm hình vuông được hai hình vuông? Trên hình 2.6 là một tờ giấy có cắt hình chữ thập. Phải cắt hình chữ thập đó theo một đường thẳng nào đó thành hai phần, sau đó lại cắt một trong hai phần đó thành hai phần theo một đường thẳng khác sao cho ba mảnh giấy nhận được sắp xếp lại với nhau một cách thích hợp sẽ tạo thành hai hình vuông bằng nhau và kề tiếp nhau.

Hình chữ thập biểu diễn trên hình 2.6 là một hình rất đối xứng (nó có một tâm đối xứng và bốn trục đối xứng). Ta còn nhận xét rằng hai hình vuông bằng nhau, kề tiếp nhau tạo thành một hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Ngoài ra, trong điều kiện của bài toán, phải hiểu rằng các phần do hình chữ thập cắt ra phải hoàn toàn tạo thành một hình chữ nhật mà không có chỗ trống và không có phần phủ lên nhau.



Hình 2.6. Năm thành hai

Liệu bạn có thể giải được một phần của bài toán hay không? Đương nhiên là diện tích của hình chữ nhật phải tìm bằng diện tích của hình chữ thập cho trước và bởi vậy là $5a^2$, ở đây a là cạnh của mỗi hình vuông tạo nên hình chữ thập. Khi biết diện tích hình chữ nhật thì trong trường hợp của ta có thể tính được cả độ dài các cạnh của nó. Giả sử kí hiệu x là cạnh lớn (chiều dài) của hình chữ nhật; khi đó $x/2$ sẽ là cạnh nhỏ (chiều rộng). Ta biểu diễn diện tích hình chữ nhật bằng hai cạnh khác nhau, ta được: $x.\frac{x}{2} = 5a^2$.

Hay $x^2 = 10x^2$, từ đây có thể tìm được cả hai cạnh của hình chữ nhật. Bây giờ ta đã có đủ những hiểu biết về hình chữ nhật đó, hình dáng và kích thước của nó, nhưng bài toán vẫn chưa giải xong bởi vì ta còn phải chỉ ra trên hình chữ thập những chỗ cắt. Trong biểu

thức đối với x ở trên có thể nhận thấy được một chỉ dẫn phải làm như thế nào, đặc biệt nếu ta viết lại biểu thức đó dưới dạng: $x^2 = 9a^2 + a^2$.

Qua việc thảo luận bài toán hóc búa này có thể rút ra được điều gì đó bổ ích.

Một là, nó chứng tỏ rằng đại số có ích lợi cả trong trường hợp không thể giải được bài toán một cách hoàn toàn. Thật vậy, có thể giải một phần nào đó của bài toán bằng đại số và kết quả thu được có thể làm cho công việc còn lại trở nên dễ dàng hơn.

Hai là, cách làm đó có thể gây ra ấn tượng cho ta do tính chất mới mẻ của một phương pháp – *phương pháp giải mở rộng*. Lúc đầu, ta mới chỉ tìm thấy một phần nhỏ của cách giải, tức là dạng của hình chữ nhật cần tìm. Sau đó, ta sử dụng phần nhỏ đó để được phần lớn hơn, cụ thể là để tìm các kích thước của hình chữ nhật và, như vậy, ta biết được tất cả những gì cần thiết. Bây giờ ta thử dùng phần lớn đó để tìm một phần rộng lớn hơn nữa mà ta hi vọng sẽ có thể sử dụng để có được một cách giải trọn vẹn.

§8. NHỮNG VÍ DỤ RẮC RỐI

Các bài toán trong chương này cho đến bây giờ đều là "chỉnh" cả. Dĩ nhiên một bài toán đề ra là chỉnh nếu lời giải của nó được xác định một cách đơn trị. Và nếu ta thực sự chú ý đến bài toán thì cần phải xác định được càng sớm càng tốt (hoặc đoán nhận) xem bài toán có chỉnh hay không. Như vậy là ngay từ đầu ta có thể đặt ra vấn đề sau đây: *Có thể thoả mãn được điều kiện không? Ta có đủ các điều kiện để tìm ẩn hay không? Hay là ta có quá ít điều kiện? Và cũng có thể, ngược lại, điều kiện có nhiều đến mức nẩy ra vấn để liệu chúng có thể được thoả mãn cả hai không?*

Những vấn đề đó rất quan trọng(*). Ta sẽ bàn đến vai trò của các vấn đề đó một cách rộng rãi trong quá trình giải toán sau này, ở đây sẽ chỉ xét một vài ví dụ.

1. *Có một người đi dạo chơi trong 5 giờ, lúc đầu người đó đi trên một con đường bằng phẳng, sau đó leo lên núi và cuối cùng theo lối cũ quay trở lại địa điểm xuất phát. Tốc độ của người đi dạo chơi đó là 4km một giờ trên quãng đường bằng phẳng, 3km một giờ khi leo núi và 6km một giờ khi xuống núi. Tìm đoạn đường mà người đó đã đi qua.*

Bài toán đó có chỉnh không? *Các dữ kiện có đủ để xác định được ẩn không? Hay không đủ dữ kiện? Hay dữ kiện quá nhiều?*

Có lẽ còn *thiếu* dữ kiện: dường như ta chưa hiểu rõ được đoạn đường dốc. Giá mà ta biết được cần phải mất bao nhiêu thời gian để leo lên dốc và xuống dốc thì sẽ chẳng còn khó khăn nào nữa cả. Nhưng vì điều đó chưa rõ nên bài toán có lẽ không xác định.

Dù sao ta hãy cứ thử bắt tay vào giải bài toán này. Giả sử

x là khoảng cách đã đi và về,

y là chiều dài đoạn đường dốc.

(*) Xem Giải một bài toán như thế nào?- Có thể thoả mãn điều kiện của bài toán không?

Khoảng cách đã đi qua có thể chia thành bốn đoạn: đoạn bằng phẳng, lên dốc, xuống dốc, đoạn bằng phẳng.

Bây giờ ta có thể dễ dàng biểu diễn thời gian của cả đi lẫn về

$$\frac{\frac{x}{2}-y}{4}+\frac{y}{3}+\frac{y}{6}+\frac{\frac{x}{2}-y}{4}=5.$$

Ta mới chỉ có một phương trình gồm hai ẩn số, như vậy chưa đủ. Tuy nhiên, hãy thử nhóm các số hạng, lúc đó hệ số của y bằng 0 và còn lại đẳng thức: $\frac{x}{4}=5$ nghĩa là $x = 20$.

Như thế là các dữ kiện để xác định x đã có đủ. Việc giải bài toán đòi hỏi chỉ cần đưa vào một số ẩn. Rút cuộc lại mới rõ rằng bài toán không phải là không xác định. Chúng ta đã lầm.

2. Vâng, ta đã lầm. Điều đó không thể chối cãi được, nhưng có cơ sở để hoài nghi rằng tác giả đã cố tình lừa chúng ta bằng việc lựa chọn một cách đặc biệt các số 3, 6 và 4. Để thấy rõ được thực chất mưu kế của tác giả, ta hãy thay các số.

3,	6,	4
bằng các chữ		
u,	v,	w,
tương tự biểu thị tốc độ khi lên dốc	khi xuống dốc	trên đường bằng phẳng.

Ta hãy đọc lại điều kiện bài toán sau khi đã thay các số ban đầu bằng các chữ mà ta mới đưa vào, rồi biểu diễn thời gian cả đi lẫn về dưới các kí hiệu mới:

$$\frac{\frac{x}{2}-y}{w}+\frac{y}{u}+\frac{y}{v}+\frac{\frac{x}{2}-y}{w}=5 \text{ hay } \frac{x}{w}+\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}-\frac{2}{w}\right)y=5.$$

Từ phương trình này, có thể tìm được x chỉ khi *hệ số của y triệt tiêu.* Vì vậy, nếu không có hệ thức $\frac{1}{w}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right)$ thì bài toán quả thật là không xác định. Người ta lừa chúng ta bằng một mưu kế quỷ quyệt!

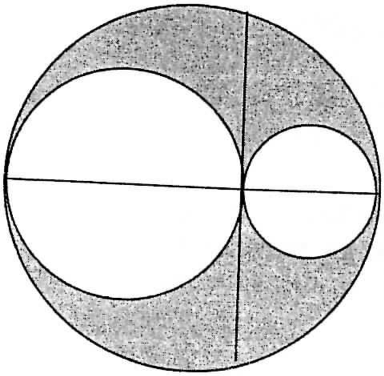
(Ta có thể biểu diễn hệ thức đó dưới dạng $w=\frac{2u.v}{u+v}$ và nói rằng tốc độ chuyển động trên đường bằng phẳng là trung bình điều hoà các tốc độ của chuyển động đi lên và đi xuống(*).

(*) Đại lượng x gọi là trung bình điều hoà các đại lượng dương a và b, nếu đại lượng nghịch đảo của là trung bình cộng của các đại lượng nghịch đảo của a và b. Từ điều kiện đó ta có được: $\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ hay $x=\frac{2ab}{a+b}$ (chú thích bản dịch tiếng Nga).

3. *Hai đường tròn ngoài nhau và cùng ở trong một đường tròn thứ ba lớn hơn hai đường tròn đó. Mỗi đường tròn đều tiếp xúc với hai đường tròn kia và tâm của chúng nằm trên một đường thẳng. Cho trước bán kính r của đường tròn lớn và đoạn t của tiếp tuyến hai đường tròn nhỏ vẽ tại điểm chung của chúng và ở phía trong đường tròn lớn. Tìm diện tích giới hạn giữa đường tròn lớn và hai đường tròn nhỏ* (Hình 2.7).

Bài toán đó có chỉnh không? *Các dữ kiện có đủ để xác định được ẩn không? Hay không đủ dữ kiện? Hay dữ kiện quá nhiều?*

Có lẽ bài toán của ta hoàn toàn chỉnh. Để xác định được hình tạo bởi ba đường tròn đó thì cần và đủ là phải biết, chẳng hạn, các bán kính của hai đường tròn nhỏ; nói chung cần biết hai dữ kiện độc lập bất kì. Các dữ kiện r và t của ta đương nhiên cũng độc lập với nhau; mỗi dữ kiện đó có thể thay đổi khi dữ kiện kia không đổi (chỉ có một điều hạn chế là phải có bất đẳng thức $t \leq 2e$). Các dữ kiện r và t dường như là vừa đủ, không ít quá mà cũng không nhiều quá.



Hình 2.7. Hai đại lượng đã cho

Bởi vậy ta bắt đầu giải. Giả sử S là diện tích cần tìm, x và y là các bán kính của hai đường tròn nhỏ. Dĩ nhiên

$$S = \pi r^2 - \pi x^2 - \pi y^2,$$

$$2r = 2x + 2y.$$

Ở đây có hai phương trình với ba ẩn số S, x và y. Để tìm phương trình thứ ba, ta hãy xét tam giác vuông nội tiếp trong đường tròn lớn có cạnh đáy chứa ba tâm, còn đỉnh đối diện với đáy trùng với một đầu mút của đoạn có độ dài t. Đường cao hạ từ đỉnh góc vuông đó của tam giác bằng $\frac{t}{2}$. Đường cao đó là trung bình nhân giữa các đường kính của hai đường tròn nhỏ: $\left(\frac{t}{2}\right)^2 = 2x \cdot 2y$.

Bây giờ ta có cả ba phương trình. Ta viết lại hai phương trình sau cùng dưới dạng:

$$(x + y)^2 = r^2,$$

$$2xy = \frac{t^2}{8}.$$

Trừ từng vế hai phương trình này, ta tìm được giá trị $x^2 + y^2$, sau đó thay giá trị đó vào phương trình thứ nhất ta được $S = \frac{\pi t^2}{8}$.

Như thế là các dữ kiện *quá nhiều*, trong hai đại lượng t và r thực ra chỉ cần đại lượng thứ nhất chứ không cần đại lượng thứ hai. Chúng ta lại bị lầm.

Chính Ac-si-mét đã nhận xét mối liên hệ thú vị làm cơ sở cho ví dụ vừa xét.

BÀI TẬP VÀ CHÚ THÍCH BỔ SUNG CHO CHƯƠNG 2

PHẦN 1

1. Bốp có $3\frac{1}{2}$ đô-la gồm những đồng tiền "ni-ken" và những đồng tiền "đai"" (1 đô-la bằng 100 "xen", 1 "ni-ken" bằng 5 "xen", 1 "đai" bằng 10 "xen" - N.D.). Hỏi Bốp có bao nhiêu đồng "ni-ken" và bao nhiêu đồng "đai", nếu tất cả là 50 đồng tiền như vậy? (Bạn đã gặp bài toán nào tương tự bài toán đó chưa?).

2. Hãy tổng quát hoá bài toán ở m.1 §4 bằng cách thay số bởi chữ và lấy nhiều vòi chảy vào bể và nhiều vòi tháo nước ra.

3. Hãy nghĩ ra cách giải thích khác đối với phương trình trong bài toán ở m.2. 4. (Hãy đặt các bài toán khác cũng dẫn đến lập một phương trình có dạng như vậy- N. D).

4. Hãy tìm những phương pháp bổ sung để kiểm tra lời giải bài toán 3 trong §4 về chiếc máy bay tuần tra.

5. Trong bài toán về "hỗn hợp" ở m.4 §4 hãy thay các số

90	60	72	50

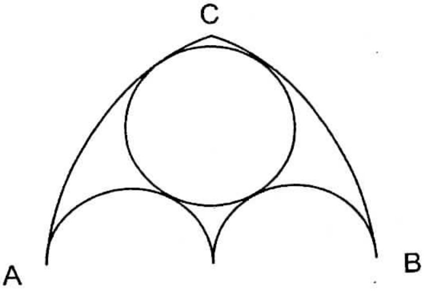
bằng các chữ

a	b	c	v

Hãy đọc lại điều kiện và viết ra phương trình. Các phương trình đó bạn quen không?

6. Trên hình 2.8 (mặc dù khác hình 2.1, nhưng liên quan đến hình đó) biểu diễn một cấu hình thường gặp trong các công trình kiểu gô-tích.

Hãy tìm tâm đường tròn tiếp xúc với bốn cung tròn tạo thành tứ giác cong. Hai cung có bán kính AB, tâm của một cung là điểm A, tâm của cung kia là điểm B. Hai nửa đường tròn có bán kính $\frac{AB}{4}$; tâm của chúng nằm ở trên đoạn AB; một cung tròn bắt đầu tại điểm B; cả hai cung tròn kết thúc tại điểm giữa của đoạn AB và tiếp xúc với nhau tại đó.



Hình 2.8. Một chi tiết của cửa sổ kiểu gô-tích

7. Hãy thực hiện kế hoạch đã được vạch ra ở m.3 §5; điều đó phải đưa bạn đến chính biểu thức đơn giản đối với S^2 qua A, B và C mà ta đã có được bằng một phương pháp khác ở m.4 §5.

8. Hãy so sánh các cách giải áp dụng trong m.4 và m.4 §5 (Hãy nêu ra những yếu tố giống nhau).

9. Tìm thể tích của tứ diện V có góc tam diện vuông tại đỉnh O, nếu cho trước các diện tích A, B và C của ba mặt xuất phát từ điểm O.

10. Dựa vào công thức Hê-rôn hãy tìm thể tích V của tứ diện có góc tam diện vuông tại đỉnh O, nếu cho trước độ dài a, b và c các cạnh của mặt đối diện với đỉnh O. (Nếu đưa đai lượng $p^2 = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$ vào biểu thức đối với thể tích V một cách thích hợp thì sẽ được công thức bề ngoài khá giống công thức Hê-rôn).

11. Dựa vào định lí Pi-ta-go. Tìm độ dài dường chéo của cái hộp (hình hộp chữ nhật), nếu cho trước chiều dài p, chiều rộng q và chiều cao r của nó.

12. Dựa vào định lí Pi-ta-go. Tìm độ dài đường chéo của một cái hộp nếu cho trước độ dài a, b và c của đường chéo của ba mặt xuất phát từ cùng một đỉnh của nó.

13. Dựa vào công thức Hê-rôn kí hiệu V là thể tích của tứ diện a, b, c là độ dài ba cạnh thuộc cùng một mặt và giả sử rằng mỗi cạnh còn lại của tứ diện đều bằng cạnh đối diện với nó. Hãy biểu thị V theo a, b và c.

14. Hãy kiểm tra các kết quả của bài tập 10 và 13 trong trường hợp suy biến khi thể tích V bằng không.

15. Hãy giải bài toán nát óc nêu ở §7 (các cạnh x và $x/2$ sẽ được biết khi hình chữ thập được cắt ra, nhưng trên hình vẽ phải sắp đặt đoạn có độ dài x như thế nào?)

16. Trên hình 2.9 biểu diễn một hình chữ nhật có một chỗ bị cắt đi cũng là hình chữ nhật. Các cạnh của hình chữ nhật ngoài bằng 9 và 12 đơn vị, các cạnh của hình chữ nhật ở trong tương ứng bằng 1 và 8 đơn vị. Tâm của hai hình chữ nhật trùng nhau, còn các cạnh thì song song với nhau. Phải cắt tờ giấy đó theo hai đường nào để được hai phần sao cho với hai phần đó có thể tạo được một hình vuông (hoàn toàn).

1) *Bạn có thể giải được bài toán này không?* Cạnh của hình vuông cần tìm phải lớn như thế nào?

2) Giả sử rằng bài toán đã giải song. Hãy tưởng tượng rằng tờ giấy của ta được cắt ra làm hai phần là "bên phải" và "bên trái". Hãy giữ phần bên trái tại chỗ, rồi dời phần bên phải đến vị trí đòi hỏi (tại đó nó cùng với phần bên trái tạo thành một hình vuông). Nếu giả định rằng bạn đã biết trả lời câu hỏi a) thì ở đây có thể trông đợi loại rời hình nào?

3) Có thể ước đoán được một phần của lời giải hay không? Tờ giấy này đối xứng đối với tâm của nó và cũng đối xứng hai trục vuông góc với nhau. Bạn có cho rằng một phép đối xứng nào đó trong các loại đối xứng đó được bảo toàn sau khi cắt thành những mảnh cần thiết không? Cụ thể đó là phép đối xứng nào?

PHẦN 2

Một phần các ví dụ sẽ xét đến sau đây họp thành những nhóm theo từng chủ đề; các chủ đề đó được chỉ ra ở trước bài toán đầu tiên trong mỗi nhóm như vậy (ví dụ như hình học phẳng, hình học không gian, linh tinh...). Ở cuối một số bài toán có ghi trong ngoặc đơn tên của các danh nhân Niu-tơn và Ơ-le; các bài toán đó lấy ra từ các cuốn sách tương ứng sau đây:

I.Niu-tơn. Số học đại cương. Nhà xuất bản Viện Hàn lâm khoa học Liên Xô, 1948 (nguyên bản bằng tiến La Tinh). (Các bài toán mà ở cuối có chỉ ra: "theo Niu-tơn" cũng lấy từ nguồn đó nhưng hoặc là cách phát biểu hoặc là các dữ kiện bằng số của chúng có thay đổi đôi chút).

L. Ơ-le. Cơ sở của đại số học. Nhà xuất bản Việt Hàm lâm khoa học hoàng gia, 1812 (nguyên bản bằng tiếng Đức).

I-Xắc Niu-tơn (1643 – 1727) được nhiều người coi là nhân vật vĩ đại nhất trong số những nhà bác học thời trước. Các công trình của ông đề cập đến những nguyên tắc cơ bản của cơ học, lí thuyết vạn vật hấp dẫn, các phép tính vi phân và tích phân, quang học lí thuyết và thực nghiệm; ngoài ra còn một loạt những vấn đề ít quan trọng hơn mà chỉ cần một trong các công trình nghiên cứu đó cũng đủ làm cho tác giả của nó giữ một địa vị rất vinh dự trong lịch sử khoa học.

Lê-ô-na Ơ-le (1707 – 1783) cũng thuộc vào số những nhà bác học vĩ đại; ông đã để lại dấu ấn ở hầu hết các ngành của toán học và trong một loạt ngành của vật lí học. Công lao đóng góp của ông vào sự phát triển các phép tính vi phân và tích phân, do Niu-tơn và Lép-nít sáng lập, vượt xa phần đóng góp của bất kì nhà toán học nào khác. Ta chú ý rằng cả hai nhà bác học lỗi lạc đó đều không coi nhẹ vai trò xứng đáng của các phân tích cặn kẽ và làm sáng tỏ việc áp dụng các phương trình để giải "những bài toán bằng lời".

17. *Linh tinh*. La và Lừa thồ nặng hàng trăm cân. Lừa than thân trách phận phàn nàn cùng La: "Chỉ cần chất thêm cho tôi 100 cân lấy ở trên lưng anh thì tôi phải thồ nặng gấp đôi anh". La liền đáp: "Phải, nhưng nếu anh lại trút cho tôi 100 cân trong cái gánh nặng của anh thì tôi lại phải thồ gấp những ba lần của anh cơ đấy".

Lừa và La mỗi con thồ nặng bao nhiêu? (Ơ-le)

18. Ông bà X-mít đi máy bay mang cả thảy 94kg hành lí. Vì mang nhiều hành lí vượt quá mức quy định phải trả cước phí, nên ông X-mít phải trả 1 đôla 50 xen, còn bà X-mít phải trả 2 đôla. Nếu ông X-mít đi máy bay một mình và mang theo hành lí của cả hai vợ chồng thì ông phải trả 13 đôla 50 xen cước phí. Hỏi mỗi hành khách có thể mang bao nhiêu kg hành lí không phải trả tiền cước phí?

19. Một người cha để lại cho ba con trai một gia tài gồm 1600 cua-ron (đơn vị tiền tệ ở một số nước châu Âu- N.D.) người con cả được hưởng nhiều hơn người con thứ 200 cua-ron và người con thứ được hưởng nhiều hơn người con út 100 cua-ron. Hỏi phần của mỗi người con? (Ơ-le)

20. Một người cha chia gia tài cho bốn con trai như sau:

- Người thứ nhất được một nửa toàn bộ số tiền bớt đi 3000 li-vơ-rơ (đơn vị tiền tệ N.D.);

- Người thứ hai được một phần ba bớt đi 1000 li-vơ-rơ;

- Người thứ ba được đúng một phần tư;

- Người thứ tư được 600 li-vơ-rơ và một phần năm toàn bộ số tiền.

Hỏi toàn bộ gia tài là bao nhiêu tiền và mỗi người con được hưởng bao nhiêu? (Ơ-le)

21. Một người cha sau khi chết đã để lại cho mỗi người con một phần gia tài theo cách sau đây:

- Người thứ nhất được chia 100 cua-ron và một phần mười số còn lại;

- Người thứ hai được chia 200 cua-ron và một phần mười số còn lại sau đó;

- Người thứ ba được chia 300 cua-ron và một phần mười số còn lại sau đó;

- Người thứ tư được chia 400 cua-ron và một phần mười số còn lại sau đó…

Rút cuộc lại thì gia tài đã được chia đều cho tất cả các con. Hỏi gia tài đó lớn như thế nào và mỗi người con được hưởng bao nhiêu cua-ron? (Ơ-le)

22. Ba người cùng dự một trò chơi. Ván đầu người thứ nhất thua cả hai người kia một số tiền bằng số tiền mà hai người đó có. Ván thứ hai, người thứ hai thua cả người thứ nhất và người thứ ba một số tiền lớn gấp đôi số tiền mà hai người này có vào lúc đó. Sau cùng, trong ván chót cả người thứ nhất và người thứ hai đều thắng người thứ ba và mỗi người đều được một số tiền đúng bằng số tiền họ có trước lúc đó. Đến đây cả ba kết thúc trò chơi và thấy rằng số tiền còn lại của họ đều bằng 24 lu-i (đơn vị tiền tệ N.D.). Hỏi trước khi chơi mỗi người có bao nhiêu tiền? (Ơ-le)

23. Ba công nhân cùng làm một công việc. *A* có thể hoàn thành công việc đó trong 3 tuần lễ, *B* có thể hoàn thành một khối lượng lớn gấp ba công việc đó trong 8 tuần lễ và *C* có thể hoàn thành một khối lượng lớn gấp năm công việc đó trong 12 tuần lễ. Hỏi trong bao lâu ba công nhân có thể cùng nhau kết thúc công việc đó? (Niu-tơn)

24. Cho các độ lớn của một số lực có ích. Tìm thời gian để chúng có thể cùng sản ra một công xác định (Niu-tơn).

25. Một người mua 40 bu-sen (đơn vị đo dung tích ở Anh, ở Anh một bu-sen bằng 36,3 lít, ở Mĩ một bu-sen bằng 35,2 lít – N.D.) lúa mạch, 24 bu-sen đại mạch và 20 bu-sen kiều mạch, đã trả tất cả là 15 phun 12 si-linh (phun là đơn vị tiền tệ ở một số nước; một phun Anh bằng 20 si-linh – ND).

Lần thứ hai người đó cũng mua lúa có chất lượng như vậy; 26 bu-sen lúa mạch, 30 bu-sen đại mạch và 50 bu-sen kiều mạch, đã trả tất cả là 16 phun.

Và lần thứ ba cũng lại mua lúa có chất lượng đó: 24 bu-sen lúa mạch, 120 bu-sen đại mạch và 100 bu-sen kiều mạch, đã trả tất cả là 34 phun.

Hỏi rằng, giá mỗi loại lúa đó là bao nhiêu? (Niu-tơn)

26. (Tiếp theo). Hãy tổng quát bài toán trên.

27. 12 con bò ăn hết cỏ trên $3\frac{1}{2}$ a-cơ-rơ đồng cỏ trong 4 tuần lễ (a-cơ-rơ là đơn vị đo diện tích ở Anh, Mĩ; một a-cơ-rơ bằng 4047 m^2), còn 21 con bò ăn hết cỏ trên 10 a-cơ-rơ đồng cỏ trong 9 tuần lễ. Bao nhiêu con bò sẽ ăn hết cỏ trên 24 a-cơ-rơ trong mười hai tuần lễ? (Niu-tơn)

28. Cuộc đời Đi-ô-phăng dài bao lâu? Theo truyền thuyết, bài toán được nêu dưới dạng những dòng khắc trên mộ chí của Đi-ô-phăng. Nguyên bản những dòng đó bằng thơ.

Đây là Đi-ô-phăng. Nếu bạn tinh thông nghệ thuật (tính toán) của ông thì hòn đá này sẽ kể bạn nghe về tuổi tác của ông. Thượng đế cho ông sống một phần sáu cuộc đời là tuổi niên thiếu. Tiếp đến lúc lấy vợ thì một phần bảy nữa của cuộc đời đã trôi qua. Sau năm năm vợ chồng sinh hạ được một đứa con. Than ôi, đứa con trai yêu quý chỉ mới sống một nửa đời cha thì đã mất. Lòng nặng đau thương, suốt bốn năm ròng, ông tìm nguồn an ủi trong toán học rồi vĩnh biệt thế giới này.

29. *Bài toán Ai-Cập.* Bây giờ chúng ta sẽ giới thiệu một bài toán trong bản thảo Ra-in-đa (*); tập này chủ yếu để ta làm quen với toán học cổ Ai-cập. Trong nguyên bản nói đến 100 hạt lúa mì được chia cho năm người, nhưng phần lớn điều kiện không cho trước (hoặc diễn tả không rõ ràng). Giải được là nhờ phỏng đoán và điều chỉnh liên tiếp các phỏng đoán.

Chúng tôi trình bày bài toán Ai-Cập đó dưới hình thức trừu tượng và bằng thuật ngữ hiện đại. Xin nhường cho bạn đọc làm bước tiếp theo và đưa bài toán đó đến một hệ thống phương trình:

Cấp số cộng gồm năm số hạng, tổng của chúng bằng 100; tổng của ba số hạng lớn nhất gấp bảy lần tổng của hai số hạng nhỏ nhất. Tìm cấp số đó.

30. Một cấp số nhân có ba số hạng. Tổng của các số hạng đó bằng 19 và tổng các bình phương của chúng bằng 133. Tìm các số hạng của cấp số đó (Niu-tơn).

31. Một cấp số nhân có bốn số hạng. Tổng hai số hạng đầu và cuối bằng13 và tổng hai số hạng ở giữa bằng 4. Tìm các số hạng của cấp số đó (theo Niu-tơn).

32. Một số thương gia có một số vốn chung là 8240 cua-ron. Mỗi người lại góp thêm vào đó một số cua-ron nữa bằng 40 lần số thương gia. Với toàn bộ số tiền đó họ nhận được số phần trăm tiền lãi bằng số thương gia. Sau khi chia lãi xong thì thấy mỗi người

---

(*) Bản thảo Ra-in-đa gọi theo tên nhà bác học Anh nghiên cứu về Ai-Cập cổ và đã phát hiện ra bản này. Đó là một bản thảo nổi tiếng có nội dung toán học được lưu trữ trong Viện Bảo tàng Anh quốc ở Luân đôn. Gần đây, người ta thường gọi nó là *"bản thảo Ac-mét"* theo tên của một người Ai-Cập đã sao chép bản đó. Như vậy có lẽ đúng hơn (chú thích bản dịch tiếng Nga).

nhận được một số cua-ron bằng mười lần số thương gia và còn thừa lại 224 cua-ron. Hỏi số thương gia là bao nhiêu? (Ơ-le)(*).

33. Hình học phẳng. Trong một hình vuông cạnh a có năm hình tròn không cắt nhau có bán kính như nhau r. Một trong các hình tròn đó có tâm trùng với tâm của hình vuông và đường tròn của nó tiếp xúc với bốn đường tròn kia, còn bốn đường tròn kia lại tiếp xúc với hai cạnh liên tiếp của hình vuông. Hãy biểu thị r qua a.

34. Niu-tơn với việc thiết lập phương trình khi giải các bài toán hình học. Nếu có tam giác cân nội tiếp trong một đường tròn và cần tìm mối liên hệ giữa các cạnh của tam giác với đường kính của hình tròn đó thì có thể làm như sau: hoặc là biểu thị đường kính theo các cạnh bên và cạnh đáy đã biết hoặc là biểu thị cạnh đáy theo các cạnh và đường kính cho trước hoặc là biểu thị các cạnh bên theo cạnh đáy và đường kính cho trước; nhưng dù chọn con đường nào thì cũng dẫn đến cùng một phương trình mà thôi, phương trình này có được trong quá trình phân tích tổng quát đối với cả ba con đường đó (Niu- tơn).

Giả sử d, a và b tương ứng là đường kính, cạnh bên và đáy (tức là các cạnh của tam giác bằng d, a và b); hãy tìm phương trình ràng buộc d, a và b và giải đồng thời cả ba bài toán: bài thứ nhất có ẩn số là d, bài toán thứ hai có ẩn số là b và thứ ba có ẩn số là a (số các đại lượng cho trước luôn luôn là hai).

35. (Tiếp theo). Hãy nghiên cứu phương trình là lời giải bài tập số 34.

a) Ba bài toán nêu ra có khó ngang nhau hay không?

b) Trong cả ba trường hợp kể trên phương trình tìm được (tương ứng đối với d, b và a) cho những giá trị dương của những điều kiện xác định. Các điều kiện đó có tương ứng với bản chất hình học của bài toán không?

36. Bốn điểm G, H, V và U (theo thứ tự đó) là các đỉnh của một tứ giác. Người ta muốn tìm độ dài $UV = x$. Biết rằng độ dài $GH = 1$ và độ lớn của bốn góc

$\widehat{GUH} = \alpha$, $\widehat{HUV} = \beta$, $\widehat{UVG} = \gamma$, $\widehat{GVH} = \delta$.

Hãy biểu thị x theo α, β, γ, δ và 1.

Hãy nhớ lại bài tập 34 và theo lời khuyên của Niu-tơn, bạn hãy chọn các DỮ KIỆN và cái PHẢI TÌM sao cho có thể lập được phương trình cần thiết một cách dễ dàng nhất.

37. Từ đỉnh một tam giác kẻ đường phân giác, trung tuyến và đường cao. Hãy tìm góc... ở đỉnh đó nếu biết rằng ba đường này chia góc thành bốn phần bằng nhau.

(Có thể là bạn muốn biết tam giác đó có dạng như thế nào. Vậy thì hãy chú ý đến từng phần của điều kiện một cách riêng biệt).

38. Cho diện tích và chu vi của một hình vuông. Hãy tìm cạnh huyền (Niu-tơn).

(*) Trong bản dịch tiếng Nga, bài toán này dịch không đúng. Chúng tôi dựa vào bản tiếng Anh để dịch lại cho đúng (N.D).

39. Giả sử cho trước cạnh đáy, đường cao và tổng các cạnh của tam giác, hãy tìm tam giác đó (Niu- tơn).

40. Giả sử cho trước các cạnh của một hình bình hành và một đường chéo của nó, hãy tìm đường chéo kia (Niu- tơn).

41. Cho một tam giác cân có các cạnh *a*, *a* và *b*. Phải cắt từ tam giác đó ra hai tam giác đối xứng với nhau qua đường cao hạ xuống cạnh đáy *b* sao cho ngũ giác đối xứng còn lại là ngũ giác đều. Hãy biểu thị cạnh *x* của ngũ giác đó theo *a* và *b*.

(Lê-o-na Pi-đan-xki, nổi tiếng dưới tên Phi-bô-na-xi(*), đã xét bài toán này với các dữ kiện bằng số $a = 10$, $b = 12$).

42. Cho một lục giác có cạnh đều, mỗi cạnh bằng *a*. Ba góc của nó vuông; các góc đó xen kẽ với ba góc tù (giả sử đó là lục giác *ABCDEF*, trong đó các góc ở đỉnh *A*, *C* và *E* là vuông, còn các góc ở đỉnh *B*, *D* và *F* là tù). Hãy tìm diện tích của lục giác đó.

43. Cho một tam giác vuông có cạnh huyền *c* và diện tích *S*. Hãy dựng ra phía ngoài trên mỗi cạnh của nó một hình vuông và hãy xét hình lồi nhỏ nhất tạo bởi một dây cao su kéo căng trên các cạnh của ba hình vuông, đó sẽ là hình lục giác (không đều, nó có một cạnh chung với mỗi hình vuông và một trong các cạnh của nó, đương nhiên là bằng *c*).

Hãy tìm diện tích của lục giác đó.

44. Trong một tam giác vuông, *c* là cạnh huyền, *a* và *b* là hai cạnh góc vuông, *d* là đường bán kính của đường tròn nội tiếp. Hãy chứng minh rằng $a + b = c + d$.

(Bài toán này có thể phát biểu bằng cách khác: tìm *d* theo *a*, *b* và *c*).

45. Một tam giác đều nội tiếp trong một tam giác đều lớn hơn sao cho các cạnh tương ứng của chúng vuông góc với nhau. Do vậy diện tích của tam giác lớn được chia thành bốn mẩu. Diện tích của mỗi mẩu như vậy chiếm mấy phần diện tích của cả tam giác?

46. Hãy cắt một tam giác theo ba đường thẳng thành bảy phần sao cho trong đó bốn phần là các tam giác (các phần còn lại là ngũ giác). Ở đây một trong các tam giác sẽ nằm giữa ba đường cắt và mỗi tam giác còn lại thì nằm giữa hai đường cắt và một cạnh của tam giác cho trước. Phải chọn ba đường đó như thế nào để tất cả các tam giác đều bằng nhau? Diện tích của mỗi tam giác được cắt ra như thế chiếm mấy phần của diện tích tam giác ban đầu?

(Trước hết, hợp lí nhất là hãy xét một dạng tam giác đặc biệt nào đó để cho cách giải có thể dễ dàng hơn).

47. Điểm *P* nằm trong một hình chữ nhật; khoảng cách từ điểm đó đến một đỉnh bằng 5 cm khoảng cách đến đỉnh đối diện bằng 14 cm, còn khoảng cách đến đỉnh thứ ba bằng 10 cm. Khoảng cách từ *P* đến đỉnh thứ tư bằng bao nhiêu?

(*) Le-ô-na Pi-dan-xki, tên hiệu là Phi-bô-na-xi (có nghĩa là "con trai của Bô-na-xô, "Bô-na-xô" là tên hiệu của cha ông) là nhà toán học lỗi lạc người Ý thời Trung cổ (sống vào khoảng từ 1170 đến 1240), có thể là nhà toán học xuất sắc nhất trong tất cả các nhà toán học châu Âu thời Trung cổ.

48. Cho các khoảng cách a, b và c từ một điểm của mặt phẳng đến ba đỉnh của một hình vuông nằm trong cùng một mặt phẳng đó; ở đây a và c là các khoảng cách đến các đỉnh đối diện.

1) Tìm cạnh u của hình vuông;

2) Kiểm tra kết quả tìm được trong bốn trường hợp sau đây:

a) $a = b = c$;

b) $b^2 = 2a^2 = 2c^2$;

c) $b = c$;

d) $b = 0$.

49. Những đồng xu như nhau (những hình tròn nhỏ như nhau) nằm rải rác trên một cái bàn lớn (đúng hơn phải nói, trên một cái bàn rất lớn, tức là trên một mặt phẳng vô hạn). Ta sẽ nghiên cứu hai cách sắp đặt.

Trong cách xếp đặt thứ nhất, mỗi đồng xu tiếp xúc với bốn đồng xu khác, còn các đường thẳng nối tâm của các đồng xu tiếp xúc thì phân chia mặt phẳng thành những hình vuông góc như nhau.

Trong cách xếp đặt thứ hai, mỗi đồng xu tiếp xúc với sáu đồng xu khác, còn các đường thẳng nối tâm của các đồng xu tiếp xúc thì phân chia mặt phẳng thành các tam giác đều như nhau.

Hãy tính phần diện tích bao phủ bởi các đồng xu (các hình tròn nhỏ trong mỗi cách xếp đặt trên).

(Hình 3.11 có thể xem như là minh hoạ cách xếp đặt thứ hai, còn hình thứ nhất trong hình 3.12 là sự minh hoạ của cách thứ nhất).

50. Hình học không gian. Trong một hình lập phương cạnh a có 9 hình cầu không cắt nhau và có cùng bán kính (trong một cái hình hộp lập phương đựng 9 quả bóng bàn). Một hình cầu có tâm là tâm của hình lập phương và tiếp xúc với 8 hình cầu khác (những quả bóng được xếp vừa khít); mỗi hình cầu đó lại tiếp xúc với ba mặt của hình lập phương (chuyển dịch ở góc). Hãy biểu thị r theo a.

(Hoặc theo a là r – cần làm một cái hộp để đựng những quả bóng bàn. Trong hình học phẳng có bài toán tương tự, xem bài tập số 33, có thể sử dụng kết quả hay phương pháp giải bài toán đó không?)

51. Hãy đặt một bài toán không gian tương tự bài tập 47.

52. Hình chóp gọi là đều nếu đáy của nó là đa giác đều và đường cao đi qua tâm của đa giác đó.

Cho một hình chóp tứ diện đều có đường cao h, cả năm mặt đều đẳng tích. Tìm diện tích toàn phần của hình chóp.

53. (Tiếp theo). Giữa hình chóp đều và tam giác cân có một sự tương tự nào đó; nếu đã biết số mặt bên của hình chóp thì cả hai hình, hình không gian cũng như hình phẳng, đều được xác định bởi hai dữ kiện.

Bạn hãy đặt một bài toán nữa về hình chóp đều.

54. Bạn hãy đặt một bài toán không gian tương tự bài tập 40 (bài tập 12 có thể dùng ở đây làm chìa khoá).

55. Đây là một bài toán không gian tương tự bài tập 49.

Bạn hãy bắt đầu từ việc phân chia không gian ba chiều thành các hình lập phương bằng nhau.

Phương pháp thứ nhất lấp đầy không gian: đặt tương ứng mỗi hình lập phương với một mặt cầu đồng tâm và tiếp xúc với sáu mặt của hình lập phương.

Phương pháp thứ hai lấp đầy không gian: đặt tương ứng "mỗi hình lập phương thứ hai" với một mặt cầu đồng tâm và tiếp xúc với mười hai cạnh cấu hình lập phương (cần chú ý rằng trong hai hình lập phương có chung mặt thì một hình chứa tâm của mặt cầu tương ứng với nó, còn hình kia thì không chứa tâm ấy).

Đối với mỗi phương pháp, hãy tính thể tích phần không gian ở trong các mặt cầu chiếm mấy phần toàn bộ thể tích không gian?

56. Tìm mặt tứ diện trong bài tập số 13, nếu cho trước a, b và c. (Bạn có nhìn thấy ở đây một sự tương tự nào không?).

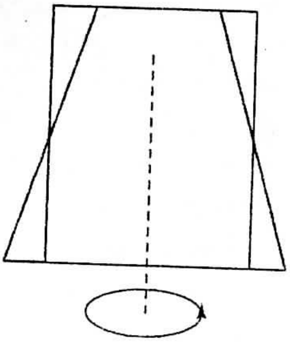
57. Trong mười hai tam giác đều như nhau, tám tam giác là các mặt của một bát diện đều, còn bốn tam giác là các mặt của một tứ diện đều. Hãy tìm tỉ số thể tích bát diện và thể tích tứ diện.

58. Một chiếc bánh ngọt có hình dạng một tựa lăng trụ tứ giác đều (hình hộp chữ nhật) phủ đường mứt ở phía trên và bên cạnh (tức là đường mứt phủ mặt trên và bốn mặt bên của lăng trụ).

Đường cao của lăng trụ bằng 5/16 cạnh đáy của nó. Hãy cắt chiếc bánh ngọt thành 9 miếng sao cho trọng lượng của chúng như nhau và ngoài ra tất cả các miếng đều có một lượng đường mứt như nhau. Một trong các miếng bánh phải có hình lăng trụ tứ giác đều và có đường mứt chỉ phủ ở mặt trên. Hãy tính tỉ số đường cao và cạnh đáy của nó và mô tả tỉ mỉ tất cả 9 miếng.

59. Một tam giác quay quanh cạnh a của nó, rồi sau đó quanh cạnh b và cuối cùng quanh cạnh c tạo nên ba cố thể tròn xoay. Hãy tìm tỉ mỉ số thể tích của các số cố thể đó cũng như tỉ số diện tích toàn phần của chúng.

60. *Bất đẳng thức*. Một hình chữ nhật và một hình thang cân được sắp xếp như trên hình 2.10 tức là chúng có trục đối xứng (thẳng đứng) chung, có cùng một đường cao h và cùng một diện tích; nếu độ dài các đáy trên và đáy dưới của hình thang biểu thị qua $2a$ và $2b$ thì đáy của hình chữ nhật sẽ bằng $a + b$. Khi quay quanh trục đối xứng thì hình chữ nhật tạo nên một hình trụ, còn hình thang tạo nên một hình nón cụt. Cố thể nào trong hai cố thể đó có thể tích lớn hơn? (Bạn có thể trả lời dựa trên những kiến thức hình học, nhưng cần phải được chứng minh bằng đại số).



Hình 2.10. Hãy quay

61. *Cầu kế*. Trên một mặt cầu có bốn điểm A, B, C và D. Các điểm A, B, C tạo thành tam giác đều có cạnh là a. Từ điểm D hạ một đường vuông góc xuống mặt phẳng của tam giác ABC, đường vuông góc đó có độ dài h và chân là tâm của tam giác.

Hãy tìm bán kính hình cầu R theo a và h cho trước.

(Cấu hình hình học trên làm cơ sở cho cầu kế, một dụng cụ để xác định độ cong của thấu kính. Ở cầu kế như vậy, các điểm A, B và C đầu mút của ba cái "chân cắm" tháo vặn được tại vị trí D, thêm vào đó khoảng cách h được đo bằng số vòng quay của vít).

62. Năm cạnh của một tứ diện có cùng độ dài a, cạnh thứ sáu có độ dài b.

1) Biểu thị bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện theo a và b.

2) Có thể sử dụng kết quả phần 1 như thế nào trong thực tế đã tìm bán kính mặt cầu (chẳng hạn thấu kính).

63. Nguyên tử *cac-bon* có hoá trị bốn. Khi biểu diễn nguyên tử đó trong không gian quan hệ hoá trị đó là đối xứng.

Hãy nối tâm của tứ diện đều với bốn đỉnh của nó bằng các đoạn thẳng và hãy tính góc của a giữa bất cứ hai đoạn nào trong các đoạn thẳng đó.

64. *Quang kế*. L là một bóng đèn có độ sáng I nến, L' là một bóng đèn có độ sáng I' nến. Hai bóng đèn đặt cách nhau một khoảng d. Hãy tìm vị trí của màn hình đặt ở giữa hai bóng đèn và vuông góc với trục nối hai bóng đèn ấy, nếu biết rằng độ rọi ở hai phía của màn ảnh là như nhau.

(Nếu cường độ ánh sáng của nguồn điện L bằng I thì độ rọi của mặt đất cách L một khoảng x và vuông góc với tia sáng bằng I/x^2. Để hiểu rõ vấn đề này, ta hãy hình dung hai mặt cầu đồng tâm tại L có bán kính 1 và x).

65. Đồ thị của chuyển động. Trong các bài toán về chuyển động của một số phần tử (các chất điểm) trên cùng một đường, người ta thường đưa vào hệ toạ độ vuông góc, trong đó trục hoành chỉ thời gian t, còn trục tung chỉ khoảng cách đi được S tính từ một điểm cố định nào đó. Để thấy rõ ích lợi của việc biểu diễn đó, hãy xét bài toán mà ta nghiên cứu tỉ mỉ ở m.3 §4.

Ta sẽ tính thời gian t kể từ lúc cất cánh và khoảng cách đi được S tính từ điểm xuất phát của máy bay. Như vậy, sau t giờ bay, khoảng cách tính từ điểm xuất phát sẽ bằng: $S = (v - w)t$.

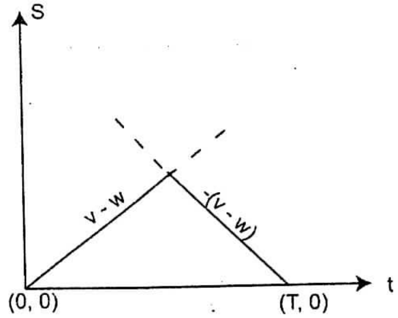
Trong phương trình này v và w cố định còn S và t biến thiên. Biểu diễn phương trình đó có trong hệ toạ độ vuông góc bằng một đường thẳng có hệ số góc $v - w$ (tốc độ bay) và đi qua gốc toạ độ (điểm (0, 0) biểu diễn vị trí xuất phát của máy bay). Khi bay về khoảng cách S và thời gian t liên hệ bằng đẳng thức: $S = -(v + w)(t - T)$, đẳng thức này được biểu diễn bằng một đường thẳng có hệ số góc là $-(v + w)$ và đi qua điểm $(T, 0)$ (điểm này chỉ rõ rằng máy bay quay trở về vị trí xuất phát vào thời gian quy định T).

Giao điểm hai đường thẳng của ta vừa thuộc vào chuyến bay đi vừa thuộc vào chuyến bay về và biểu diễn theo không gian và thời gian của nơi quay trở lại. Tại điểm đó vừa xảy ra cả hai công thức đối với S, tức là phải có: $(v - w)t = -(v + w)(t - T)$.

Từ đó rút ra $t = \dfrac{(v + w)T}{2v}$ và như vậy (nếu sử dụng phương trình bất kì nào) ta cũng được biểu thức đối với khoảng cách S tính từ điểm quay trở về $S = \dfrac{(v^2 - w^2)T}{2v}$.

Ta cũng đã đi tới kết quả đó trong m.3 §4 (ở đó S được thay bằng x).

Trên hình 2.11 (không cần lưu ý đến những nét vạch) chuyến bay của máy bay được biểu diễn bằng một đường gấp khúc gồm hai đoạn; các đoạn này hội tụ tại một điểm mà tung độ của nó biểu thị khoảng cách lớn nhất mà máy bay đã đi tới. Toàn bộ đường gấp khúc phản ánh đầy đủ quá trình bay, thật vậy, nó chỉ rõ máy bay đang ở đâu vào bất kì thời gian nào và khi nào thì nó bay đến một địa điểm mà ta chú ý. Đường như vậy có cái tên đặc biệt là *đồ thị bay* (đồ thị chuyển động).



Hình 2.11. Đồ thị chuyển động

66. Hai người đưa thư A và B ở cách nhau 59 dặm sáng sáng đi đến gặp nhau. A đi trong 2 giờ được 7 dặm và B trong 3 giờ được 8 dặm, thêm vào đó B lên đường muộn hơn A một giờ. Phải tìm xem A phải đi bao nhiêu dặm để gặp được B? (Niu-tơn).

67. (Tiếp theo). Hãy tổng quát hoá bài toán trên.

68. Ác và Bin, người sống đầu phố, người ở cuối phố. Ác cần mang đến nhà Bin một gói bưu phẩm và Bin cần mang đến nhà Ác một gói khác. Họ ra khỏi nhà đồng thời và đi với tốc độ không đổi và mỗi người trở về nhà mình ngay sau khi đã giao bưu kiện theo dự định. Lần thứ nhất họ gặp nhau cách nhà Ác a m, lần thứ hai cách nhà Bin b m.

1) Đường phố dài bao nhiêu?

2) Nếu $a = 30$m và $b = 400$m thì ai nhanh hơn?

69. Bốp, Pit và Pôn cùng đi du lịch. Pit và Pôn đi bộ khoẻ, mỗi người mỗi giờ đi được p km. Còn Bốp thì chân bị đau nên anh ta đi trên một chiếc ô tô nhỏ không ngồi được quá hai người; ô tô đó chạy mỗi giờ được c km. Ba anh bạn thông qua kế hoạch đi đường như sau: họ lên đường đồng thời và Pôn sẽ cùng đi ô tô với Bốp, còn Pit thì đi bộ. Sau một thời gian nhất định. Bốp và Pit sẽ cùng nhau đi ô tô cho đến khi nào đuổi kịp Pôn và Pit và Pôn lại thay đổi vai trò cho nhau, tức là Pôn lại lên đi ô tô và Pit thì đi bộ. Ở đây xuất hiện tình huống đúng như lúc khởi hành và tất cả quá trình đó cứ lặp đi lặp lại một số lần cần thiết.

1) Trong một giờ nhóm đó đi được một đoạn đường là bao nhiêu (bao nhiêu kilômet)?

2) Thời gian mà trên ô tô chỉ có một người ngồi chiếm mấy phần thời gian của cả hành trình.

70. (Tiếp theo). Hãy tổng quát hoá bài toán trên đây: Bốp (anh bạn có chân bị đau và chủ nhân của chiếc ô tô có hai chỗ ngồi) sẽ làm như trên không phải với hai người bạn mà là n và người bạn $A, B, C, \ldots L$, mỗi người này đều đi bộ p km một giờ (hãy vẽ đồ thị chuyển động đối với trường hợp $n = 3$. Hãy kiểm tra lại khi xét các trường hợp tới hạn tương ứng với các giá trị $p = 0$, $p = c$, $n = \infty$).

71. Hòn đá rơi xuống giếng, hãy tìm độ sâu của giếng dựa theo tiếng chạm của hòn đá vào đáy giếng (Niu-tơn).

Bạn cần phải đo thời gian T giữa hai thời điểm, lần thứ nhất khi bạn thả hòn đá xuống và lần thứ hai khi bạn nghe thấy tiếng hòn đa chạm vào đáy giếng. Ngoài ra, bạn còn biết: vận tốc âm thanh c, gia tốc trọng lực g. Khi biết T, c và g hãy tìm độ sâu d của giếng.

72. Giả sử sao chổi chuyển động thẳng và đều, hãy xác định quỹ đạo của nó theo không gian theo ba lần quan sát.

Giả sử O là mắt quan sát, A, B và C là các vị trí của sao chổi tương ứng với lần quan sát thứ nhất, thứ hai và thứ ba. Do các quan sát đó, ta biết được các góc: $\widehat{AOB} = w$, $\widehat{AOC} = w'$ và thời gian t, t' tương ứng là khoảng thời gian giữa lần quan lần quan sát thứ nhất và thứ hai, giữa lần quan sát thứ nhất và thứ ba.

Do giả thiết rằng chuyển động là đều, ta có: $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{t}{t'}$

Coi như w, w', t và t' đã biết. Hãy tìm góc $\beta = \widehat{ABO}$.

(Hãy biểu thị một hàm lượng giác nào đó của góc β, chẳng hạn ctg β, qua w, w', t và t').

73. *Số phương trình bằng số ẩn số*. Hãy tìm x, y và z từ hệ ba phương trình.

$$\begin{cases} 3x - y - 2z = a, \\ -2x + 3y - z = b, \\ -x - 2y + 3z = c. \end{cases}$$

coi là a, b và c là đã cho.

(Liệu có thoả mãn điều kiện hay không? Điều kiện có đủ để xác định các ẩn số hay không?)

74. Số phương trình lớn hơn số ẩn số. Hãy tìm ba số p, q và r sao cho biến số x đồng nhất thoả mãn với phương trình $x^4 + 4x^2 - 2x^2 - 12x + 9 = (px^2 + qx + r)^2$.

(Trong bài toán của ta đòi hỏi đa thức bậc bốn cho trước phải là một bình phương đúng, điều đó xảy ra trong một trường hợp đặc biệt nào đó, chứ không phải trong trường hợp tổng quát (Tại sao?).

75. Hãy chứng minh rằng, không thể chọn được các ẩn số a, b, c, A, B và C (thực hay phức) để cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = (ax + by + cz)(Ax + By + Cz)$ thoả mãn một số cách đồng nhất với mọi giá trị (độc lập) của x, y và z.

76. Số phương trình nhỏ hơn số ẩn số. Một người mua một số lợn, dê, cừu, cả thảy 100 con với giá 100 cua-ron, người đó phải trả với giá $3\frac{1}{2}$ cua-ron một con lợn, $1\frac{1}{3}$ cua-ron một con dê và $\frac{1}{2}$ cua-ron một con cừu; người đó mua được bao nhiêu lợn, dê, cừu? (Ơ-le).

Ơ-le đã giải bài toán đó bằng một thuật toán mà ông gọi đó là "quy tắc của người mù". Giả sử x, y và z tương ứng biểu thị số lợn, dê, cừu đã mua; hiển nhiên rằng x, y và z phải là những số nguyên dương. Lúc đầu biểu diễn tổng số con vật đã mua, rồi sau đó biểu diễn giá tiền phải trả, ta được:

$x + y + z = 100,$

$21x + 8y + 3z = 600;$

phương trình thứ hai ở đây đã hơi biến đổi đi (được viết dưới dạng tiện lợi hơn cho sau này). Nếu ta khử z và phương trình có được đối với y thì sẽ được $y = 60 - \frac{18x}{5}$, do đó rút ra rằng $\frac{x}{5} = t$ phải là một số nguyên dương.

Bạn hãy kết thúc cách giải.

77. Một tên làm tiền giả (ta hi vọng rằng những đồng tiền do hắn làm ra không giống những đồng tiền thật nhiều lắm) có ba loại bạc tuổi khác nhau; loại thứ nhất một mác có 7 un-xi (mà là đơn vị tiền tệ ở Đức, một un-xi bằng 29,8g – N.D) (một mác thật bằng 8 un-xi), loại thứ hai một mác có $5\frac{1}{2}$ un-xi, loại thứ ba một mác có $4\frac{1}{2}$ un-xi. Tên đó muốn làm một hỗn hợp trọng lượng 30 mác, mỗi mác chứa 6 un-xi (bạc nguyên chất trong một mác); hắn ta phải lấy mỗi loại bao nhiêu đồng mác? (Ơ-le, lời giải thích ghi trong các dấu ngoặc).

Giả thiết rằng lời giải biểu thị bằng những số nguyên dương. Phương trình mà theo điều kiện chỉ có những nghiệm nguyên thì gọi là phương trình Đi-ô-phăng.

78. Tồn tại một số (nguyên dương) mà nếu thêm vào số đó 100 thì sẽ trở thành bình phương đúng và lại trở thành bình phương đúng nếu thêm vào số đó 168. Số đó là số nào?

79. Trong bộ sưu tập tem của Bốp gồm ba quyển. Tập thứ nhất gồm hai phần mười bộ số tem, trong tập thứ hai gồm vài phần bảy, còn trong tập thứ ba có 303 con tem. Bốp có bao nhiêm tem? (Các điều kiện có đủ để xác định các ẩn số không?)

80. Một kiểu bút bi mới bán ở hiệu trước cửa trường với giá 50 xen, nhưng ít có khách mua. Khi cửa hiệu hạ giá thì toàn bộ số bút đã bán được với số tiền là 31 đô-la và 93 xen (đã chú thích ở bài tập 1 – N.D). Vậy giá bút sau khi hạ là bao nhiêu? (Có đủ điều kiện để xác định ẩn số hay không?)

81. *Các nguyên tắc của Đề-các.* Cuốn sách của nhà triết học và nhà toán học nổi tiếng Rơ-nê Đề-các mà chúng tôi trích dẫn trong §1 có ý nghĩa đặc biệt quan trọng đối với sự nghiên cứu của chúng ta.

"Các nguyên tắc dưới dạng chưa đầy đủ được tìm thấy trong các giấy tờ của Đề-các sau khi ông chết. Ông dự định viết 36 mục nhưng thực ra chỉ có 18 mục tương đối đầy đủ và toát yếu của ba mục: rất có thể là phần còn lại chưa viết được. Trong 12 mục đầu bàn về vấn đề quá trình lao động trí óc khi giải toán như thế nào, trong một mục tiếp theo phân tích những bài toán chỉnh, còn 12 mục sau dự định nêu ra những bài toán không chỉnh.

Mỗi một mục mở đầu bằng một "nguyên tắc", một lời khuyên ngắn gọn đối với bạn đọc; phần còn lại dành cho việc lí giải, nghiên cứu trên các ví dụ hoặc trình bày chi tiết hơn ý niệm cơ bản cô đọng trong nguyên tắc. Chúng tôi sẽ trích ra những đoạn khác nhau của một mục dành cho một nguyên tắc cần thiết và chỉ số thứ tự của nguyên tắc đó.

Các ý kiến của Đề-các sẽ là những chỉ dẫn quý báu đối với chúng ta, nhưng thật là thiếu tôn trọng đối với vong linh của nhà sáng lập ra những quan niệm hoài nghi, nếu bạn đọc tin vào tất cả những gì Đề-các đã nói chỉ bởi rằng Đề-các nói như vậy(*). Bạn đọc cần phải có thái độ phê phán đối với những điều mà tác giả của bất kì cuốn sách nào nói đến và không nên quá tin vào những ấn tượng bề ngoài của mình. Khi đã chú ý một cách đầy đủ các ý kiến của tác giả, bạn đọc chỉ nên đồng ý với những ý kiến nào của tác giả mà bạn đọc thấy là hoàn toàn rõ ràng hoặc khẳng định được qua kinh nghiệm mà bạn đọc đã tích luỹ. Chỉ có hành động như vậy, bạn đọc mới theo đúng với tinh thần "các nguyên tắc" của Đề-các.

82. *Hãy hiểu thật rõ bài toán và phân chia nó ra.* Ta hãy trích dẫn Đề-các: *Hãy lược bỏ khỏi vấn đề những cái dư thừa và dẫn nó đến những yếu tố đơn giản nhất.*

Ta áp dụng lời khuyên này cho những bài toán có nội dung tuỳ ý và có mức độ khó khăn bất kì. Tuy nhiên, chúng ta sẽ áp dụng cụ thể. Hãy lấy một bài toán về chuyển động thông thường trong trường trung học, "bài toán về tốc độ" (chẳng hạn bài toán đã xét ở m.3 §4). Trong bài toán tương tự vật chuyển động có thể hiểu là con người, là ô tô, tàu

---

(*) Tác giả muốn nói đến một trong những điều cơ bản của triết học Đề-các khẳng định rằng trong thành phần của nhận thức do cảm giác và tư duy mang lại cho ta, không có một yếu tố nào mà tính chân thực của nó lại không thể hoài nghi (chú thích của bản dịch tiếng Nga).

hoả hay máy bay. Nhưng về bản chất ở đây đòi hỏi phải chính xác hoá: khi giải những bài toán đơn giản nhất kiểu đó thực ra chúng ta đã xem vật như một chất điểm chuyển động theo đường thẳng. Việc đơn giản hoá như vậy trong một số trường hợp là hoàn toàn hợp lí, còn trong một số trường hợp khác thì lại là mạo hiểm. Tuy nhiên, khi dẫn bài toán nói về những đối tượng hiện thực đến những bài toán toán học, ta không thể không sử dụng một sự *đơn giản hoá và trừu tượng hoá* nhất định. Và điều đó là lẽ đương nhiên bởi vì, bài toán toán học đụng chạm đến những đại lượng trừu tượng; nó chỉ có quan hệ gián tiếp với các đối tượng hiện thực vì trước đó đã thực hiện việc chuyển từ những dữ kiện cụ thể sang những đại lượng trừu tượng rồi.

Các kĩ sư và những nhà vật lí khi giải những bài toán của mình phải chú ý nghiêm túc đến vấn đề: sự trừu tượng hoá và đơn giản hoá phải đến giới hạn nào, những chi tiết nào có thể bỏ qua được và những kết quả ít có giá trị nào có thể không cần chú ý tới. Thêm vào đó họ phải tránh hai điều nguy hiểm trái ngược nhau: không được làm cho bài toán trở nên quá rắc rối về phương diện toán học, nhưng đồng thời cũng không nên đơn giản hoá quá đáng khía cạnh vật lí của vấn đề. Ta đã có dịp làm quen với tình trạng lưỡng nan đó khi giải những bài toán "bằng lời" đơn giản nhất. Kinh nghiệm chứng tỏ rằng, thường thường khá là khó có thể xác lập được ranh giới của những mức độ đơn giản hoá, nhưng người tập sự thì phải học làm điều đó, vì nếu khó khăn đó không được khắc phục kịp thời thì sau này nó có thể trở thành nghiêm trọng hơn.

Ở đây còn có một khó khăn nữa. Nhưng bài toán trong các sách hướng dẫn thường ngầm cho phép những sự đơn giản hoá nhất định; chẳng hạn vận tốc thực tế có thể thay đổi, còn trong các lập luận cơ bản thì tốc độ không thay đổi. Người tập sự phải quen với những giả thiết ngầm như vậy, phải biết giải thích đúng đắn một số cách diễn đạt vắn tắt thường dùng; và khó khăn đó cần phải được thể hiện rõ ràng và thường xuyên. (Ta cần nhấn đến một điều nữa do tầm quan trọng của nó, mặc dù là rất ngắn thôi bởi vì nó ở ngoài lề con đường chính ta đang đi. Đối với những sự đơn giản hoá và bỏ qua ngụ ý trong các cách phát biểu của bài toán ta cũng phải thực hiện với một mức độ chính xác như ta đã thực thực hiện khi tính toán bằng số để tìm ẩn số. Vượt quá hay bỏ qua những khả năng do điều kiện quy định ta có thể phạm sai số nếu tính toán với một số chữ số thập phân lớn hơn là các dữ kiện của bài toán cho phép hoặc ngược lại, với một số chữ số thập phân nhỏ hơn. Không có nhiều dịp để có thể giải thích điều đó trên những bài toán sơ cấp, nhưng không được bỏ qua những trường hợp đó).

83. Những hiểu biết phụ cần thiết thể giải bài toán. Động viên và tổ chức. Rõ ràng là ta không thể nào diễn đạt một bài toán vật lí bằng ngôn ngữ phương trình, nếu như không biết những sự kiện vật lí tương ứng (hoặc nếu không giả thiết rằng chúng ta đã biết những điều đó). Chẳng hạn, ta đã không thể giải được bài toán ở §6, nếu như không biết định luật Ac-si-met.

Khi diễn đạt một bài toán hình học bằng các phương trình, ta sử dụng những sự kiện hình học tương ứng. Chẳng hạn, ta có thể áp dụng định lí Pi-ta-go, hay tính tỉ lệ giữa các cạnh của tam giác đồng dạng, hay công thức tính diện tích hoặc thể tích...

Nếu không sử dụng những điều hiểu biết có liên quan đến công việc thì không thể trình bày bài toán bằng ngôn ngữ các phương trình. Nhưng, nếu như ta đã có những kiến thức từ trước, thì ta có thể không phải nhớ lại vào những lúc chúng cần cho ta; hoặc nếu coi như chúng được ghi nhớ trong đầu thì ta có thể không cần phải nhận thức về lợi ích của chúng trong vấn đề đang xét. Điều sau đây hoàn toàn rõ ràng; có những kiến thức cần thiết khi chưa đủ trong một tình thế nào đó; ta phải nhớ lại chúng khi cần thiết, làm cho chúng sống lại, phải huy động chúng, làm cho chúng giúp ích để đạt được mục đích của ta, làm chúng chúng thích dụng đối với bài toán của ta, phải tổ chức chúng lại.

Trong khi quá trình giải đang tiến triển, cách nhìn bài toán của ta không ngừng thay đổi; trên hình vẽ xuất hiện ngày càng nhiều những đường phụ, trong các phương trình của ta có thêm những ẩn số phụ mới, những yếu tố ngày càng mới được huy động và đưa vào cấu trúc của bài toán và cứ như vậy chừng nào hình vẽ của ta chưa bão hoà những đường, chừng nào số phương trình chưa bằng số ẩn số và những yếu tố, cả những yếu tố xuất phát lẫn các yếu tố được huy động trong quá trình giải, chưa hoà hợp với nhau trong một thể thống nhất hữu cơ (m.3 §5 đã minh hoạ tốt cho điều này).

84. *Tính độc lập và tính tương thích.* Đề-các khuyên có bao nhiêu ẩn số thì nên thiết lập bấy nhiêu phương trình(*). Giả sử có n ẩn số được biểu thị bằng $x_1, x_2,\ldots x_n$; khi đó hệ phương trình mà ta quan tâm có thể viết dưới dạng.

$r_1(x_1, x_2,\ldots, x_n) = 0,$

$r_2(x_1, x_2,\ldots, x_n) = 0,$

....

$r_n(x_1, x_2,\ldots, x_n) = 0.$

Ở đây $r_1(x_1, x_2,\ldots, x_n)$, cũng như vế trái các phương trình còn lại là đa thức đối với $r_2(x_1, x_2,\ldots, x_n)$. Đề-các khuyên ta đưa hệ phương trình đó về một phương trình(**). "Nói chung" ("trong trường hợp thông thường", "thường thường"...) có thể làm được điều đó và, "nói chung" hệ thống hoặc có một nghiệm duy nhất (là tập hợp những giá trị bằng số của các biến số $x_1, x_2,\ldots, x_n$ thực hoặc phức, thoả mãn đồng thời cả n phương trình) hoặc là một tập hợp hữu hạn các nghiệm (số nghiệm phụ thuộc vào bậc của phương trình hợp thành).

Nhưng cũng có những trường hợp đặc biệt; ở đây ta không thể nghiên cứu chúng thật đầy đủ mà chỉ giới hạn trong một ví dụ cụ thể.

Hãy xét một hệ thống ba phương trình tuyến tính có ba ẩn số:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2 + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0. \end{cases}$$

(*) Nguyên tắc XIX.

(**) Nguyên tắc XXI.

Ở đây x, y, z là các ẩn số, còn 12 chữ a_1, b_1 ,..., d_3 là các số thực đã biết. Giả thiết rằng a_1, b_1 và c_1 cũng như a_2, b_2, c_2 và a_3, b_3, c_3 không đồng thời bằng không. Nếu xem x, y và z như tọa độ vuông góc của một điểm trong không gian thì mỗi phương trình viết ở trên sẽ làm một mặt phẳng như vậy, hệ ba phương trình của ta tương ứng với hệ thống ba mặt phẳng có vị trị xác định trong không gian.

Khi giải một hệ tương tự gồm ba phương trình tuyến tính, ta chia ra một số trường hợp:

1) Nghiệm không tồn tại, nghĩa là không có một tập hợp ba số thực nào thoả mãn đồng thời cả ba phương trình. Trong trường hợp đó ta nói rằng các phương trình không tương thích và ta gọi hệ là *không tương thích hay mâu thuẫn bên trong*.

2) Vô số nghiệm; lúc đó ta gọi hệ là không xác định. Chẳng hạn như trong trường hợp bất kì bộ ba số z, y, z thoả mãn hai phương trình cũng thoả mãn phương trình thứ ba. Trong trường hợp đó ta nói rằng phương trình thứ ba không độc lập đối với hai phương trình kia.

3) Nghiệm duy nhất; trong trường hợp này, các phương trình độc lập, hệ thống tương thích hay xác định.

Hãy hình dung một cách hình học ba trường hợp đó bằng cách xét ba mặt phẳng của ta (vẽ vị trí tương đối của chúng).

85. *Tính duy nhất của lời giải*. Nhìn lên phía trước. Nếu bài toán đánh cờ hay bài toán hóc búa có một số lời giải thì ta coi là không chỉnh. Nói chung, có lẽ ta ưu tiên những bài toán có một lời giải duy nhất hơn; đối với ta, chúng dường như "hợp lí" hay "chỉnh". Chính Đề-các cũng hầu như đồng ý với quan điểm đó; ông nói: "*Muốn cho vấn đề đầy đủ, nó cần phải được xác định một cách chặt chẽ, chính xác, nhờ thế ta đã không thể phát hiện được cái gì khác ngoài cái có thể rút ra từ những khái niệm cho trước*"[(*)].

Lời giải của bài toán có phải là duy nhất không? Các điều kiện có đầy đủ để xác định ẩn số hay không? Ta rất hay đặt các câu hỏi đó ngay từ đầu (và điều đó nên làm), khi bắt tay vào giải toán. Nếu các câu hỏi đó sớm như thế, về thực chất, ta chưa cần một câu trả lời triệt để hay chưa hi vọng có được câu trả lời như vậy (nó sẽ xuất hiện khi bài toán đã giải xong hoàn toàn): ta chỉ cần một câu trả lời sơ bộ, một dự đoán, một tiên đoán (có thể làm cho ta thâm nhập sâu hơn vào bài toán).

Đôi khi câu trả lời sơ bộ như vậy là đúng, nhưng đôi khi ta có thể sa vào bẫy như các ví dụ trong §8. Tiện đây cũng nói lời giải có thể là duy nhất ngay cả trong trường hợp nó là nghiệm của một phương trình bậc n có n nghiệm phân biệt (ở đây $n > 1$). Điều đó sẽ xảy ra khi, theo điều kiện, giá trị của ẩn số phải thực, hay dương, hay nguyên, mà phương trình đó chỉ có nghiệm như vậy thôi.

86. *Bài toán bằng lời cần để làm gì?* Tôi mong rằng, tôi chỉ làm phật lòng một số ít nhà toán học, khi tôi khẳng định rằng, nhiệm vụ thường xuyên và quan trọng nhất của

---

(*) Nguyên tắc XIII.

việc giáo dục toán học ở trường trung học chính là dạy thiết lập các phương trình để giải những bài toán bằng lời. Chắc chắn có nhiều lí lẽ mạnh mẽ để bênh vực cho ý kiến đó.

Khi giải những bài toán bằng lời nhờ các phương trình, học sinh phải phiên dịch một tình trạng hiện thực sang ngôn ngữ toán học và như thế khẳng định được trên kinh nghiệm rằng những khái niệm toán học có thể liên hệ với thực tế, mặc dù các mối liên hệ đó cần phải được nghiên cứu một cách tỉ mỉ. Chính là ở đây chương trình giảng dạy có thể có được kinh nghiệm quý giá nhất. Đối với những học sinh không phải sử dụng toán học trong nghề nghiệp tương lai của mình thì vấn đề đó sẽ chẳng giúp ích gì nhiều. Nhưng các kĩ sư và nhà toán học mà nghề nghiệp đòi hỏi áp dụng toán học, sẽ sử dụng toán học chủ yếu là để phiên dịch những bài toán thực tiễn sang ngôn ngữ của những khái niệm toán học. Trong cuộc sống, tiền thu nhập của kĩ sư cao hơn tiền thu nhập của nhà toán học và như vậy người kĩ sư có thể thuê nhà toán học làm người phục vụ để giải cho mình những bài toán toán học cần thiết(*); vì thế người kĩ sư tương lai, nói chung, không cần phải nghiên cứu toán học nhằm mục đích giải toán. Tất nhiên ở đây có một điều mà người kĩ sư không thể hoàn toàn tin cậy vào nhà toán học được; đó là vì người kĩ sư phải biết toán học đến mức biết đặt những bài toán của mình dưới dạng toán học. Và như thế là người kĩ sư tương lai, khi còn ngồi trên ghế nhà trường phải học thiết lập những phương trình cần thiết để giải "những bài toán bằng lời", lần đầu tiên động chạm đến việc sử dụng toán học một cách cơ bản cần thiết cho nghề nghiệp và lần đầu tiên có dịp rèn luyện những thói quen quan trọng nhất đối với nghề nghiệp.

87. *Những bài toán phụ.* Hãy nghĩ ra những bài toán, tương tự những bài toán đã nêu ra trong chương này và đồng thời lại khác những bài toán đó, trước hết là những bài toán mà chính bạn có thể giải được.

(*) Đương nhiên đó là ý kiến của các tác giả đối với những điều kiện ở Mỹ: vị tất điều đó nhất thiết phải đúng hiện nay, thậm chí đối với cả nước Mỹ (chú thích bản dịch tiếng Nga).

CHƯƠNG 3. PHÉP ĐỆ QUY

§1. LỊCH SỬ MỘT PHÁT MINH NHỎ

Có một giai thoại về một cậu bé Gao-xơ mà sau này trở thành Kac Phơ-ri-e-đơ-ric Gao-xơ vĩ đại, princeps mathemticorum(*). Tôi rất thích mẫu chuyện sau đây mà tôi đã được nghe từ thuở nhỏ; câu chuyện có thực đúng như thế không, điều đó không làm tôi băn khoăn lắm.

"Chuyện xảy ra đã lâu, lúc đầu cậu bé Gao-xơ còn đang đi học trường tiểu học. Có một hôm, thầy giáo ra một bài toán khó như sau: cộng các số 1, 2, 3,.... cho đến 20. Ông thầy hi vọng có thể rảnh rang được chút ít thời gian trong khi các học trò còn đang bận bịu với việc tìm tổng của dãy số dài dằng dặc và chính vì vậy ông ngạc nhiên một cách khó chịu nhận thấy, trong lúc các trò khác vừa mới bắt tay vào tính toán thì cậu bé Gao-xơ đã đi tới, đặt chiếc bảng con lên bàn thầy và nói "đã làm xong". Ông thầy thậm chí cũng chẳng buồn nhìn qua cái bảng của Gao-xơ, vì ông tin chắc rằng đáp số không đúng và định bụng sẽ trừng phạt cậu bé thật nghiêm khắc về cái tính không khiêm tốn. Đợi cho các trò khác làm xong bài toán và đặt các bảng con của mình lên trên chiếc bảng của con cậu bé Gao-xơ, thầy giáo liền rút bảng của Gao-xơ ra xem (vì nó nằm ở dưới cùng). Ông thầy mới ngạc nhiên làm sao khi nhìn thấy trên chiếc bảng đó chỉ có một số, hơn nữa lại là một đáp số đúng. Vậy số đó là số nào và làm thế nào mà cậu bé Gao-xơ tìm ra được?"

Tất nhiên, ta không biết được đích xác cậu bé Gao-xơ đã làm như thế nào và cũng không bao giờ có thể biết được điều đó đâu. Tuy nhiên trí tưởng tượng có thể gợi cho ta một cái gì đó có lí. Dù sao đi nữa thì Gao-xơ lúc đó hãy còn bé mặc dù rất thông minh và phát triển sớm. Có lẽ cậu bé đã nắm ngay vào mục đích cuối cùng của bài toán nhanh hơn các trẻ khác cùng lứa tuổi và đã tập trung chú ý vào cái bản chất nhất. Cũng rất có thể là trong trường hợp đó, hơn hẳn các bạn nhỏ của mình, cậu bé đã hình dung được một cách rõ ràng minh bạch *bài toán đòi hỏi cái gì*, tức là làm thế nào tìm được tổng của các số.

$$\begin{array}{c}1\\2\\3\\.\\.\\.\\20\end{array}$$

(*) Princeps mathematicorum - tiếng La-Tinh có nghĩa là "vua của các nhà toán học"- đó là danh hiệu bán chính thức tặng cho Gao-xơ khi ông còn sống (những chữ đó được khắc vào huy hiệu kỉ niệm, lưu hành vào năm Gao-xơ mất (1855).

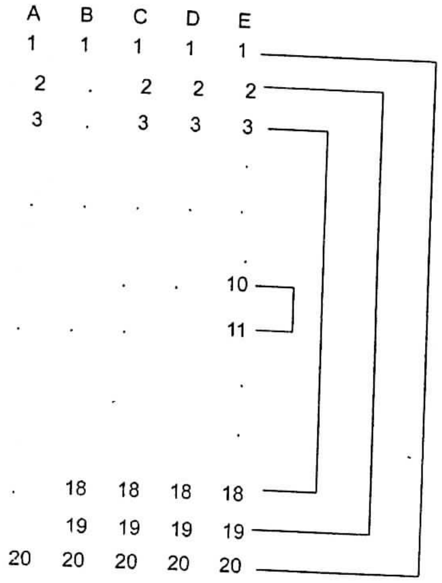
Chắc là cậu bé phải "nhìn" bài toán không như những người khác mà phải sâu sắc hơn, có thể gần giống như một dãy biểu đồ A, B, C, D và E trên hình 3.1.

Lúc đầu ta chỉ ghi rõ phần đầu của dãy số mà ta phải tìm tổng (A). Nhưng ta cũng có thể chỉ ra cả phần cuối của dãy (B) hoặc tốt hơn là viết *đồng thời* cả phần đầu và phần cuối (C). Như vậy, sự chú ý của ta có thể tập trung vào hai số ở ngoài cùng (số đầu tên và số cuối cùng) và có thể là ta đã nhận ra được một quan hệ nào đó giữa các số này (D). Và ở đây mở ra khả năng xuất hiện một ý (E)! Vâng, đúng như vậy, bất kì cặp số nào cách đều hai đầu đều có tổng bằng một số:

$$1 + 20 = 2 + 19 = 3 + 18 = \ldots = 10 + 11 = 21$$

và vì vậy tổng của các dãy bằng

$$10.\ 21 = 210.$$



Hình 3.1. Năm giai đoạn của một phát minh

Phải chăng trong thực tế Gao-xơ đã đi theo con đường này? Tôi không tin vào điều đó. Tôi chỉ nói rằng, giải bài toán theo tinh thần như vậy là tự nhiên. Dù sao thì nhờ đâu ta biết giải bài toán? Rút cuộc lại, đó là trong nhận thức của ta xuất hiện biểu đồ (E), ta "đã nhìn thấy chân lí một cách rõ ràng và minh bạch", như Đề-các đã nói, ta đã tìm thấy một phương pháp tiện lợi dễ áp dụng để tính tổng của dãy số. Lúc đầu ta còn phân vân do dự giữa hai cách trái ngược nhau để giải bài toán (A và B), nhưng kết quả là chúng lại hoà nhập vào nhau một cách cân xứng hơn (C). Mâu thuẫn ban đầu đã chuyển sang một sự thống nhất hài hoà, sau đó chuyển tiếp đến ý niệm cơ bản (D) là hoàn toàn dễ hiểu. Nhưng liệu ý quyết định của Gao-xơ có phải đúng là như vậy không? Gao-xơ có trải qua những giai đoạn như vậy trên đường đạt tới ý đó không? Hay cậu bé đã bỏ qua một một số giai đoạn? Hay cậu bé lần bước qua tất cả các giai đoạn? Liệu Gao-xơ có tiến thẳng đến kết luận cuối cùng hay không? Ta không thể giải đáp được tất cả những vấn đề đó. Thông

thường, ý sáng sủa nảy sinh sau một thời kì phân vân và hoài nghi, tương đối dài hay ngắn. Trong trường hợp này cũng vậy; một cái gì đó tương tự như thế có thể đã diễn ra trong tiềm thức của cậu bé Gao-xơ.

Ta hãy chuyển đến khái quát hoá bài toán. Dựa vào bài toán vừa giải và thay số 20 bằng số nguyên dương tuỳ ý n ta đi tới bài toán sau đây. *Tìm tổng S của n số nguyên dương đầu tiên.*

Thế là ta phải tìm tổng $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$.

Ý niệm mà ta vừa mới vận dụng (có thể đó cũng chính là ý niệm đã xuất hiện ở cậu bé Gao-xơ) là việc thiết lập những cặp số cách đều đầu và cuối cùng của dãy số. Chỉ cần làm qua một ít các phép biến đổi đại số thì có thể dễ dàng biến đổi dạng lược đồ của ta.

Ta hãy viết tổng S hai lần, trong dòng thứ hai thay đổi thứ tự của các số hạng theo chiều ngược lại.

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n,$$

$$S = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 3 + 2 + 1.$$

Các số hạng tạo thành cặp theo phương pháp giải mô tả ở trên bây giờ được sắp xếp thuận tiện hơn, số nọ dưới số kia. Cộng hai đẳng thức đó, ta được:

$$S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1) + (n+1);$$

$$2S = n\,(n+1);$$

$$S = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Đó chính là công thức tổng quát. Khi $n = 20$ công thức cho kết quả của cậu bé Gao-xơ, kết quả mà nó nhất thiết phải như thế.

§2. TRỜI CHO

Đây là một bài toán tương tự bài toán đã giải ở mục trên: *tìm tổng các bình phương của n số tự nhiên đầu tiên.*

Ta kí hiệu tổng phải tìm là S (không lệ thuộc vào các kí hiệu của mục trước), nghĩa là ta đặt: $S = 1 + 4 + 9 + 16 + \ldots + n^2$.

Phương pháp để tính tổng này không phải là dễ thấy. Một đặc điểm của con người là thường hay gặp lại những cách thức đã từng giúp ích trước đây trong những tình huống tương tự. Nếu nhớ lại mục trước, ta có thể viết tổng phải tìm hai lần, có thay đổi thứ tự của các số hạng ngược lại ở lần thứ hai:

$$S = 1 + 4 + 9 + \ldots + (n-2)^2 + (n-1)^2 + n,$$

$$S = n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \ldots + 9 + 4 + 1.$$

Tuy nhiên, nếu như trước đây phép cộng hai đẳng thức thật là hiệu nghiệm thì ở đây nó chẳng mang lại điều gì bổ ích cả, ý đồ của ta bị thất bại. Ta đã thực hiện ý đồ đó một cách lạc quan hơn là hiểu được bản chất vấn đề. Ta nhận thức rằng, việc bắt trước một

cách ngây thơ phương pháp mà có lần ta đã sử dụng như vậy thật là không thông minh. (Sự suy nghĩ của ta có sức ì quả là rất lớn, trí óc vẫn giữ mãi nếp cũ, mặc dù trong những điều kiện mới nó phải được thay đổi). Nhưng dù sao thì cũng không nên coi ý định hợp lí như vậy là hoàn toàn vô bổ vì nó có thể đưa đến một nhận định đúng đắn hơn; bài toán này, có lẽ, khó hơn bài toán ở mục trước.

Và bây giờ thì hãy xem xét giải bài toán đó như thế nào. Ta hãy bắt đầu xét trường hợp đặc biệt của công thức quá quen thuộc về lập phương của tổng hai số:

$(n + 1)^3 = n^3 + 3n^3 + 3n + 1.$

Công thức này có thể viết như sau:

$(n + 1)^3 - n^3 = 3n^3 + 3n + 1.$

Công thức đó đúng với mọi n; ta hãy viết công thức này một cách liên tiếp đối với $n = 1, 2, 3, \ldots, 2$:

$2^3 - 1^3 = 3.1.^2 + 3.\ 1 + 1,$

$3^3 - 2^3 = 3.2.^2 + 3.\ 2 + 1,$

$4^3 - 3^3 = 3.3.^2 + 3.\ 3 + 1,$

$(n + 3)^3 - n^3 = 3.\ n^2 + 3n + 1.$

Đối với n đẳng thức trên thì có thể thực hiện một phép tính nào hiển nhiên nhất? Dĩ nhiên là nên cộng chúng lại! Khi đó, nhờ một loạt các số hạng triệt tiêu lẫn nhau nên kết quả ở vế trái đẳng thức rất đơn giản. Còn ở vế phải thì phải cộng ba cột. Ở cột thứ nhất xuất hiện tổng phải tìm S, tức là tổng các bình phương của n số tự nhiên đầu tiên. Cột cuối cùng gồm n đơn vị, cột đó không có gì rắc rối cả. Cột giữa dẫn đến tổng của n số tự nhiên; nhưng tổng này thì ta biết tính từ mục trước. Kết quả ta có đẳng thức:

$$(n + 1\ )3 - 1 = 3S + 3\ \frac{n(n+1)}{2} + n.$$

Trong đó tất cả đều đã biết (nghĩa là được biểu thị qua n), từ S; như vậy từ đẳng thức có thể xác định S.

Sau một số phép biến đổi ta lại được:

$2(n^3 + 3n^2 + 3n) = 6S + 3(n^2 + n) + 2n.$

$$S = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \text{ hay } S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Cách giải đó làm bạn hài lòng không?

Tôi đồng ý ngay với bạn đọc nào không bằng lòng với cách giải như vậy với điều kiện là bạn đó biết đưa ra những lí lẽ có căn cứ làm bằng chứng cho sự không hài lòng của mình. Vậy thì cách giải đó tồi ở chỗ nào?

Ta thừa biết cách giải đó đúng. Hơn thế nữa, nó có hiệu quả và rõ ràng là ngắn. Bạn hãy nhớ lại, lúc đầu hai bài toán khó như thế nào, thật là lạc quan quá mức nếu chờ đợi một cách giải nào đàng hoàng hơn, ngắn gọn hơn. Và dù sao nếu không đồng ý thì cũng

có căn cứ: cách giải bỗng dưng từ đâu nảy ra, nó xuất hiện hoàn toàn đột ngột, giống như trời cho. Cách giải đó giống như một con thỏ được nhà ảo thuật kéo ra từ trong cái mũ. Bạn hãy so sánh cách giải này với cách giải ở mục trên. Ở đấy, trên một mức độ nào đó, ta còn có thể hình dung cụ thể cách giải đã được tìm ra bằng cách nào, ta có thể nhận ra phải đi theo những đường lối nào, thậm chí có thể hi vọng tự mình giải một bài toán nào đó tương tự. Còn ở đây thì không nói một lời nào về nguồn gốc của cách giải, người ta làm chúng ta phải sửng sốt, không hiểu lấy ở đâu ra một đẳng thức, rồi từ đẳng thức đó nhận được tất cả, mà thiếu hẳn những lời chỉ dẫn, làm thế nào ta có thể tự mình đạt đến đẳng thức đó.

Điều đó làm ta thất vọng, ta muốn học giải toán, vậy thì làm thế nào để đạt được mong muốn đó khi xét những cách giải tương tự.

§3. DÙ SAO NÓ CŨNG ĐÁNG ĐƯỢC CHÚ Ý

Vâng, chính thế, từ cách giải trên có thể rút ra một điều gì đó quan trọng đối với phương pháp giải. Đúng là việc trình bày cách giải đó, bản thân nó không bổ ích, bởi vì nguồn gốc của nó đối với ta còn bị giấu kín và vì vậy nó tựa như một trò quỷ thuật, một mưu mẹo xảo quyệt. Bạn có vén lên tấm màn bí mật của cái trò quỷ thuật đó không? Vậy thì hãy tự làm lấy điều đó và có thể bạn sẽ hiểu được vấn đề là ở chỗ nào. Mưu kế đã đạt được tới mức mà quả thực là không thể tự cho phép mình bỏ qua mà không lưu ý.

Ta hãy bắt đầu khái quát hoá. Hãy xét các bài toán đã nói ở các §1 và §2 trên một quan điểm thống nhất, muốn vậy, ta hãy viết tổng của các luỹ thừa bậc k của n số tự nhiên:

$S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$.

Trên mục trên ta đã xác lập được: $S_2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ và trước đó $S_1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$ còn có thể thêm vào đây một trường hợp đặc biệt hiển nhiên $S_0 = n$(*).

Trường hợp này cũng không phải là vô ích. Sau khi đã bắt đầu bằng những trường hợp đặc biệt $k = 0$, 1 và 2 thì có thể đặt một bài toán tổng quát: hãy biểu thị bằng cách tương tự S_k. Nếu nhìn kĩ vào các trường hợp đặc biệt thì ta cũng có thể giả thiết rằng, S_k được biểu thị dưới dạng một đa thức bậc $k+1$ đối với n.

Trong trường hợp tổng quát, đương nhiên có thể thử dùng cái mưu mẹo đã giúp ích ta trong trường hợp $k = 2$. Nhưng bước đầu hãy nghiên cứu trường hợp đặc biệt sau đây: $k = 3$. Ta phải thực hiện lại trên một mức độ mới, cao hơn những phép tính mà ta đã gặp ở §2 điều đó không phải là khó khăn.

Thật vậy, lúc đầu ta hãy viết nhị thức đối với số mũ 4:

(*) Vì $1^0 + 2^0 + 3^0 + \ldots + n^0 = \underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{n \text{ lần}}$.

$(n + 1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n +1.$

Do đó $(n + 1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n +1.$

Đẳng thức này đúng với mọi n; ta viết đẳng thức đó đối với các giá trị $n =1, 2, 3,\dots, n$.

$2^4 - 1^4 = 4.1^3 + 6.\ 1^2 + 4.\ 1 +1,$

$3^4 - 2^4 = 4.\ 2^3 + 6.\ 2^2 + 4.2 +1,$

$4^4 - 3^4 = 4.3^3 + 6.3^2 + 4.3 + 1,$

....

$(n + 1)^4 - n^4 = 4.n^3 + 6.n^2 + 4.n = 1.$

Cũng như trước, ta cộng n đẳng thức đó lại. Tất nhiên lúc đó một loạt số hạng ở bên trái triệt tiêu lẫn nhau. Còn ở bên phải ta phải cộng bốn cột; mỗi cột đó là cùng bậc của n số tự nhiên đầu tiên, tức là một trường hợp riêng của tổng S_k:

$(n + 1)^4 - 1 = 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + S_0.$

Nhưng trước ta đã biểu thị S_2, S_1 và S_0 qua n. Thay những biểu thức đó rồi biến đổi đẳng thức của ta như sau:

$$(n+1)^4 - 1 = 4S_3 + 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4\frac{n(n+1)}{2} + n.$$

Ở đây mọi số hạng, trừ S_3 đều được biểu diễn qua n. Bây giờ điểm để tìm S_3 chỉ còn phải thực hiện những phép biến đổi đại số đơn giản:

$$4S_3 = (n + 1)^4 - (n + 1) - 2n(n + 1) - n(n + 1)(2n + 1).$$
$$= (n + 1)[n^3 + 3n^2 + 3n - 2n - n(2n + 1)].$$
$$= (n + 1)\, n\, [n^2 + 3n + 1 - (2n + 1)].$$

$$S_3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Ta hãy đi đến kết quả mong muốn, thêm vào đó quá trình suy luận xem ra bổ ích hơn, bởi vì, sau khi đã dùng mưu mẹo lần thứ hai, ta có thể phát hiện ở đằng sau nó một lược đồ tổng quát. Bạn hãy nhớ lại câu châm ngôn của một nhà sư phạm nổi tiếng:

"*Phương pháp, đó là thủ thuật mà bạn sử dụng hai lần*".

§4. PHÉP ĐỆ QUY

Yếu tố nào trong công việc của ta ở mục trên là đặc trưng nhất? Để được S_3 ta đã quay trở lại với S_2, S_1 và S_0 tìm được từ trước. Điều đó là tia sáng rọi vào "mưu mẹo ở §2", mưu mẹo đã giúp ta xác định được S_2 bằng cách quay trở lại với S_1 và S_0 tìm được trước đó.

Về thực chất, ta có thể áp dụng lược đồ đó để tìm tổng S_0, mà ta đã tính ở §1 bằng những lí lẽ khác nhau. Theo một trong những công thức quen thuộc nhất của đại số:

$(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1,$

do đó:

$(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1.$

Ta hãy viết các trường hợp đặc biệt:

$2^2 - 1^2 = 2.1 + 1,$

$3^2 - 2^2 = 2.2 + 1,$

$4^2 - 3^2 = 2.3 + 1,$

....

$(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1.$

Cộng lại ta được:

$(n + 1)^2 - 1 = 2S_1 + S_0.$

Bởi vì $S_0 = n$ nên: $S_1 = \dfrac{(n+1)^2 - 1 - n}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$ là điều mà ta đã chứng minh ở §1 bằng đường lối khác hẳn.

Sau khi đã kiểm tra lược đồ của ta trong các trường hợp đặc biệt $k = 1$, 2 và 3, ta có thể không do dự áp dụng nó vào biểu thức tổng quát của tổng S_k. Ở đây ta cần nhị thức đối với mũ $k + 1$:

$$(n+1)^{k+1} = n^{k+1} + C_{k+1}^{1} n^k + C_{k+1}^{2} n^{k-1} + ... + 1,$$

$$(n+1)^{k+1} - n^{k+1} = (k+1)n^k + \frac{(k+1)k}{2} n^{k-1} + ... + 1.$$

Ta hãy viết các trường hợp đặc biệt:

$$2^{k+1} - 1^{k+1} = (k+1)1^k + \frac{(k+1)k}{2} 1^{k-1} + ... + 1,$$

$$3^{k+1} - 2^{k+1} = (k+1)2^k + \frac{(k+1)k}{2} 2^{k-1} + ... + 1,$$

$$4^{k+1} - 3^{k+1} = (k+1)3^k + \frac{(k+1)k}{2} 3^{k-1} + ... + 1,$$

$$(n+1)^{k+1} - n^{k+1} = (k+1)n^k + \frac{(k+1)k}{2} n^{k-1} + ... + 1.$$

Cộng lại ta được:

$$(n+1)^{k+1} - 1 = (k+1)S_k + \frac{(k+1)k}{2} S_{k-1} + ... + S_0.$$

Từ đẳng thức sau cùng có thể tìm được S_k (biểu thị qua n) nếu đã biết trước được S_{k-1}, S_{k-2},..., S_1 và S_0. Chẳng hạn, vì lẽ ở trên ta biết các biểu thức đối với S_0, S_1, S_2 và S_3, nên

bằng phép biến đổi đại số sơ cấp ta có thể có được biểu thức đối với S_4. Khi tìm được S_4, ta lại có thể tìm tổng S_5,...[*]

Như thế là, khi áp dụng một cách liên tục "mưu mẹo" ở mục §2 mà lúc đầu dường như "trời cho", ta đi tới một phương pháp. Nếu muốn nói đến khả năng áp dụng của phương pháp đó trong tương lai thì nó đáng được phát biểu và ghi nhớ một cách đặc biệt.

Nếu ta gặp một dãy sắp thứ tự hoàn toàn (chẳng hạn như dãy $S_0, S_1, S_2, S_3, \ldots, S_k \ldots$) thì luôn luôn có hi vọng tìm được tất cả các số hạng của nó *cái nọ kế tiếp cái kia*. Muốn vậy, cần có hai điều kiện: thứ nhất, bằng cách nào đó phải xác định cho được số hạng đầu tiên của dãy (trong trường hợp của ta tổng S_0 hiển nhiên là số hạng đầu tiên); thứ hai, phải tồn tại quan hệ ràng buộc số hạng tổng quát của dãy với các số hạng đứng trước nó (trong ví dụ của ta S_k liên hệ với $S_0, S_1, \ldots, S_{k-1}$ trong đẳng thức sau cùng của mục này, đẳng thức mà ta có thể thấy trước được nhờ "mưu mẹo ở §2).

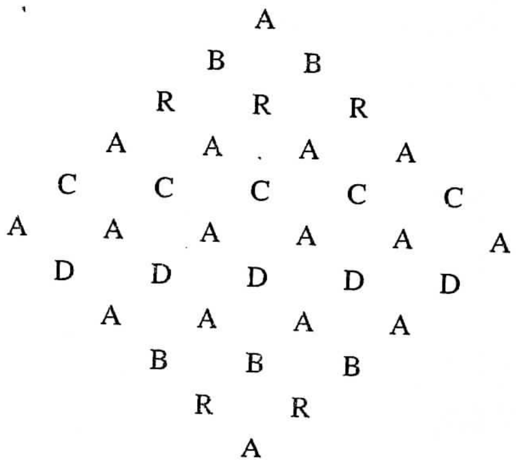
Nếu có hai nhân tố đó thì các số hạng của dãy có thể tìm được cái nọ tiếp theo cái kia, một cách liên tục, *truy toán* bằng cách quay trở lại sau, tức là mỗi lần đều trở về với những số hạng đã tìm được trước. Phương pháp quan trọng này gọi là *phép đệ quy*.[**]

§5. A-BRA-CA-ĐA-BRA

Từ ngữ "a-bra-ca-đa-bra" có nghĩa tương tự như một cái gì đó "vô nghĩa, rắc rối". Bây giờ thì người ta coi thường, nhưng đã có một thời từ ngữ đó được xem là kì diệu, như một lá bùa hộ mệnh được ghi dưới dạng bí hiểm (chẳng hạn, giống như trên hình 3.2) và người ta tin rằng, chiếc bùa hộ mệnh đó sẽ bảo vệ chủ nó tránh khỏi bệnh tật và bất hạnh.

Có bao nhiêu cách có thể đọc được từ ngữ "a-bra-ca-đa-bra" trên hình 3.2? Ở đây cần hiểu rằng ta bắt đầu từ đỉnh cao nhất *A* (ở góc trên, tại cực Bắc) và dọc từ trên xuống dưới, lần lần chuyển sang chữ bên cạnh (ở phía đông nam hay tây nam) chừng nào đạt chữ *A* ở dưới cùng (phía nam) mới thôi.

Vấn đề thật thú vị. Hứng thú đối với nó sẽ còn tăng lên hơn nữa, nếu bạn nhận xét rằng, đằng sau nó ẩn náu một cái gì quen quen. Thật thế, nó giống một cuộc dạo chơi trong thành phố vậy.

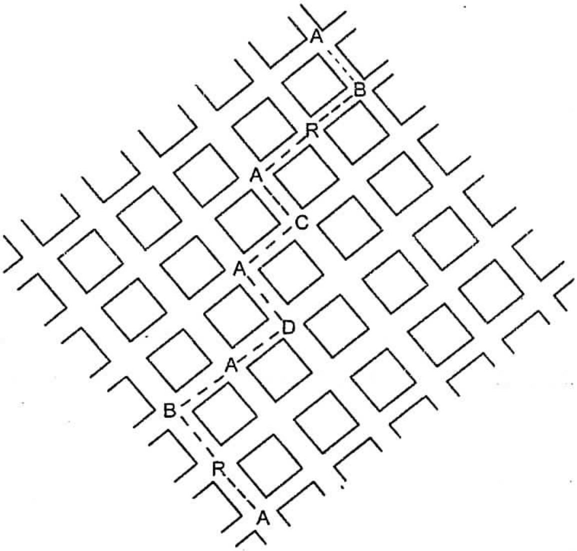


Hình 3.2. Câu thần chú

[*] Phương pháp này thuộc Pát-xcan.

[**] Tên gọi này (cũng như các thuật ngữ "truy toán", "công thức truy toán") xuất phát từ tiếng La-Tinh recurrens – có nghĩa quay trở lại sau.

Bạn hãy hình dung một thành phố được quy hoạch theo khu phố hình vuông, một thành phố mà một nửa số đường đi từ Tây Bắc xuống Đông Nam, còn một nửa số đường phố (có thể gọi chúng là các đại lộ) đi từ Đông Bắc xuống Tây Nam. Mỗi lần đọc câu thần chú trên hình 3.2 tương ứng với một hành trình theo hình zíc-zắc trong mạng lưới đường phố như vậy. Khi đi theo hành trình đi ghi trên hình 3.3 thì bạn sẽ qua mười khu phố nằm giữa điểm đầu *A* và điểm cuối *A*. Có rất nhiều hành trình qua 10 khu phố giữa hai địa đầu đó trên mạng lưới các đường phố của ta và không có một hành trình nào ngắn hơn cả, *hãy tìm số các hành trình ngắn nhất khác nhau giữa hai điểm giới hạn đó;* đây là một bài toán tổng quát, thật sự lí thú, nấp sau bài toán buồn cười về câu thần chú được dẫn ra trên hình 3.2.

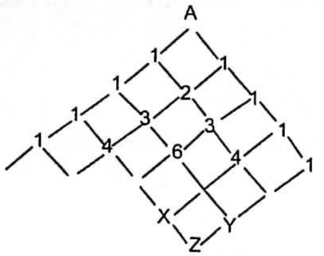


Hình 3.3. Một trong những hành trình zíc-zắc ngắn nhất

Phát triển tổng quát của bài toán có thể có một loạt lợi thế. Đôi khi nó giúp ta tìm được cách giải- chính điều đó xảy ra trong trường hợp này. Nếu bạn chưa biết giải bài toán nêu lên- ý chúng tôi muốn nói đến bài toán có liên hệ đến hình 3.2 (và có thể là bạn thực sự không biết giải các bài toán đó)- thì thoạt đầu bạn hãy thử giải một bài toán tương tự nào đó đơn giản hơn. Ở đây phát biểu tổng quát có thể giúp ích, nó đưa ta đến ý nghĩ nghiên cứu những trường hợp đơn giản hơn nhưng vẫn còn giữ nguyên ý nghĩa. Thật vậy, nếu hai ngã tư trên mạng lưới đường phố của ta khá gần nhau (gần hơn là giữa *A* ở trên và *A* ở dưới trong hình 3.3) thì việc đếm tất cả các hành trình theo hình zíc-zắc giữa chúng không khó khăn gì.

Bạn có thể vẽ chúng cái nọ sau cái kia và nhìn lại toàn bộ. Hãy chú ý đến lời khuyên đó và tuân theo một cách hệ thống. Bạn hãy bắt đầu từ điểm *A* trên cùng và di chuyển xuống dưới.

Lúc đầu hãy xét những điểm có thể đạt tới sau khi đi qua một khu phố, rồi đến những điểm nằm cách xa ba, bốn khu phố và xa hơn nữa. Bạn hãy kiểm tra lại và đếm tất cả các hành trình zíc-zắc ngắn nhất đi từ điểm *A* ở trên tới mỗi điểm đó. Trên hình 3.4 giới thiệu một vài con số có được theo cách đó (tự các bạn có thể tìm được các số đó và cả những số khác tiếp sau đó nữa- bạn hãy soát lại các kết quả của mình). Bạn có nhận xét gì không?



Hình 3.4. Hãy tính số các hành trình zíc-zắc ngắn nhất

Nếu như bạn đã quen với những vấn đề đó, thì bạn còn có thể nhận thấy nhiều điều nữa, song dù cho trước đây bạn chưa bao giờ trông thấy một bảng số như vậy thì dù sao có lẽ bạn cũng phát hiện ra được một quan hệ khác thường sau đây: bất kì số nào khác đơn vị trên hình vẽ đều là tổng hai số khác của bảng, cụ thể là của các số đông bắc và tây bắc kế cận. Chẳng hạn:

$$4 = 1 + 3,\ 6 = 3 + 3.$$

Bạn có thể phát hiện ra quy luật đó bằng quan sát, giống như nhà tự nhiên học nhờ quan sát mà phát hiện ra quy luật của thiên nhiên. Nhưng sau khi đã tìm được ra quy luật bạn phải tự hỏi: Tại sao lại như vậy? Làm thế nào giải thích được điều đó?

Nguyên nhân khác khá đơn giản. Hãy xét ba ngã tư trên mạng lưới đường phố được đánh dấu bằng các điểm *X*, *Y* và *Z* mà vị trí tương đối của chúng được chỉ rõ trên hình 3.4. *X* là điểm kế cận phía tây bắc của điểm *Z* và *Y* là điểm kế cận phía đông bắc. Nếu xuất phát từ điểm *A* và muốn đi tới điểm *Z* theo một hành trình ngắn nhất trên mạng lưới, thì ta phải đi hoặc qua điểm *X* hoặc qua điểm *Y*. Nhưng khi ta đã đến điểm *X* rồi thì ta có thể từ điểm ấy đi đến điểm *Z* bằng một đường duy nhất; điều này cũng đúng nếu đi từ *Y* đến *Z*. Vì vậy, số các hành trình ngắn nhất từ *A* đến *Z* là tổng của hai số hạng: nó bằng số các hành trình ngắn nhất từ *A* tới *X* cộng với số các hành trình ngắn nhất từ *A* tới *Y*. Như vậy sự quan sát của ta là hoàn toàn có căn cứ và quy luật tổng quát được xác lập.

Khi đã giải thích được điều cơ bản đó, ta có thể mở rộng bảng ở hình 3.4 (muốn vậy chỉ cần sử dụng phép cộng thông thường) cho đến khi nhận được một bảng lớn như ở hình 3.5; "mũi phía nam" của bảng cho ta đáp số cần thiết, như vậy câu thần chú "a-bra-ca-đa-bra" trên hình 3.2 có thể đọc bằng 252 cách khác nhau.

§6. TAM GIÁC PÁT-XCAN

Có thể là bạn đọc đã biết nhận ra các số mà ta đã nghiên cứu ở mục trước và nhất là vị trí sắp xếp của chúng. Các số biểu diễn trên các hình 3.4 – 3.5 là các hệ số của nhị thức, còn tam giác tạo bởi các số đó (xem hình 3.4), người ta thường gọi là tam giác Pát-xcan (chính Pát-xcan thì gọi nó là "tam giác số học").

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

6 15 20 15 6

21 35 35 21

56 70 56

126 126

252

Hình 3.5. Hình vuông cắt từ tam giác

Ta có thể thêm vào tam giác đó ngày càng nhiều hơn những dòng mới nữa và về nguyên tắc ta có thể tiếp tục thêm bao nhiêu tuỳ ý. Bảng biểu diễn trên hình 3.5 có thể coi như một mẫu hình vuông được cắt ra từ *m* tam giác lớn nào đó.

Trong những tác phẩm của các tác giả khác công bố sớm hơn cuốn sách của Pát-xcan về tam giác số học cũng đã nói đến các hệ số của nhị thức và sự sắp xếp vị trí của chúng dưới dạng bảng tam giác. Tuy nhiên, công lao của Pát-xcan trong vấn đề này hoàn toàn xứng đáng để đặt tên ông cho tam giác đó.

1. Bây giờ ta phải đưa vào những kí hiệu thích hợp đối với các số tạo nên tam giác Pát-xcan. Bước này rất quan trọng bởi vì mỗi số ở một điểm xác định của tam giác có một ý nghĩa hình học hoàn toàn xác định: nó chỉ rõ số lượng các hành trình zíc-zắc ngắn nhất đi từ đỉnh của tam giác đến điểm đó. Mỗi một hành trình như vậy có cùng một số các khu phố; ta kí hiệu số đó là n. Hơn nữa, mọi hành trình đó đều phù hợp với các số những khu phố đã đi qua theo từng hướng tây nam và đông nam. Ta hãy kí hiệu các số đó tương ứng là l và r (l là số các khu phố hướng từ phía trái đi xuống, r là số các khu phố hướng từ phía phải đi xuống). Đương nhiên là:

$$n = l + r.$$

Hai số bất kì trong ba số n, l và r đều xác định số thứ ba một cách đơn trị, do đó xác định một điểm ứng với nó (thật vậy, l và r có thể xem như các toạ độ vuông góc của một điểm trong hệ toạ độ mà điểm gốc của nó trùng với đỉnh của tam giác Pát-xcan, một trục được kẻ theo hướng tây nam, trục kia theo hướng đông nam). Chẳng hạn, đối với điểm A ở dưới của hành trình được chỉ ra trên hình 3.3.

$$l = 5, r = 5, n = 10$$

còn đối với điểm B thứ hai cũng của hành trình đó thì

$$l = 5, r = 3, n = 8.$$

Ta kí hiệu C^r_n là số hành trình ngắn nhất từ đỉnh tam giác đến điểm đặc trưng bằng các chữ n (tổng số các khu phố) và r (số các khu phố hướng từ bên phải đi xuống). Chẳng hạn (xem hình 3.5),

$C^3_8 = 56,$

$C^5_{10} = 252.$

Các số trên hình 3.4 ứng với các kí hiệu trên hình 3.6. Các kí hiệu có chỉ số dưới như nhau (cùng một chữ *n*) nằm trên đường nằm ngang (trên đáy thứ *n* hay cạnh huyền của tam giác vuông). Các kí hiệu có chỉ số trên như nhau (cùng một chữ *r*) nằm theo đường xiên (dọc theo "đại lộ" số *r*) Đại lộ số 5 tạo thành một cạnh của hình vuông trên hình 3.5, cạnh đối diện tạo thành đại lộ số 0 (bạn có thể gọi nó là đường biên giới). Hình 3.4 được dừng lại trên cạnh đáy thứ tư.

$$C_0^0$$

$$C_1^0 \quad C_1^1$$

$$C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2$$

$$C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3$$

$$C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4$$

....

$$C_n^{r-1} \quad C_n^r$$

$$C_{n+1}^r$$

Hình 3.6. Tam giác kí hiệu Pát-xcan

2. Ngoài dạng thức hình học ra, tam giác Pát-xcan còn có dạng thức tính toán. Mọi số nằm dọc theo biên giới (dọc theo đại lộ số 0, kể cả điểm xuất phát chung của chúng) đều bằng 1 (tất nhiên chỉ tồn tại một hành trình ngắn nhất bắt đầu từ điểm xuất phát trên cùng đến các ngã tư nằm trên biên giới đó). Bởi vậy

$$C_n^0 = C_n^n = 1;$$

cho nên ta gọi hệ thức đó là điều kiện biên giới của tam giác Pát-xcan

Mỗi số ở trong tam giác Pát-xcan nằm trên một dãy nằm ngang nào đó hay một cạnh đáy. Ta có thể tính một số nằm trên cạnh đáy thứ $(n + 1)$ bằng cách quay trở lại phía sau, tức là áp dụng phép đệ quy, cụ thể là sử dụng các số kế cận trên đáy thứ *n* (xem hình 3.6):

$$C_{n+1}^r = C_n^r + C_n^{r-1}.$$

Đẳng thức sau cùng có tên gọi thích hợp là công thức truy toán cho tam giác Pát-xcan.

§7. PHÉP QUY NẠP TOÁN HỌC

Khi ta tính một số trong tam giác Pát-xcan bằng cách áp dụng công thức truy toán, ta phải dựa vào hai số đã tìm được trước ở cạnh đáy trên. Cần nghiên cứu một lược đồ tính toán không phụ thuộc vào những điều đã sơ bộ đó. Phép tính độc lập như vậy dựa vào công thức quen thuộc

$$C_n^r = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{1.2.3...r}$$

mà ta sẽ gọi là công thức tường minh để tính các hệ số của nhị thức C_n^r. Công thức tường minh đó có trong công trình của Pát-xcan (trong đó nó được diễn đạt bằng lời chứ không phải bằng các kí hiệu hiện đại). Pát-xcan không cho biết ông đã làm thế nào để rút ra công thức đó và chúng ta sẽ không phải bận tâm đến một điều là trước khi đi đến công thức đó ông đã suy nghĩ như thế nào (Có thể lúc đầu mới chỉ là phỏng đoán thôi - ta

thường thường phát hiện ra các quy luật tương tự nhờ quan sát lúc đầu, rồi sau đó thử khái quát hoá các kết quả có được; xem nhận xét đối với cách giải bài tập 40). Tuy vậy, Pát-xcan đưa ra một cách chứng minh xuất sắc cho công thức tường minh của mình và chúng tôi đặc biệt lưu ý đến phương pháp chứng minh của ông.

Ta có một nhận xét sơ bộ. Công thức tường minh dưới dạng đã viết không áp dụng được trong trường hợp $r = 0$. Tuy vậy, ta quy ước rằng khi $r = 0$, thì theo định nghĩa $C_n^0 = 1$.

Còn trong trường hợp $r = n$ thì công thức không mất ý nghĩa và ta có

$$C_n^n = \frac{n(n-1)(n-2)...2.1}{1.2.3...(n-1)n} = 1$$

đó là một kết quả đúng. Như vậy, ta cần chứng minh công thức chỉ đúng đối với $0 < r < n$, tức là ở bên trong tam giác Pát-xcan ở đó công thức truy toán có thể sử dụng được. Tiếp theo, ta trích dẫn Pát-xcan với một số thay đổi không căn bản, một phần những thay đổi đó ở giữa các dấu ngoặc vuông.

Mặc dù rằng mệnh đề đang xét (công thức tường minh đối với các hệ số nhị thức) có vô số trường hợp riêng, tôi chứng minh nó một cách hoàn toàn ngắn gọn, dựa trên hai bổ đề.

Bổ đề thứ nhất khẳng định rằng mệnh đề đó đúng đối với đáy thứ nhất - điều này là hiển nhiên (khi $n = 1$ công thức tường minh đúng bởi vì trong trường hợp đó mọi giá trị có thể được của r, nghĩa là $r = 0$, $r = 1$, rơi vào điều đã nhận xét ở trên).

Bổ đề thứ hai khẳng định như sau: nếu mệnh đề của ta đúng đối với một đáy tuỳ ý (đối với giá trị n tuỳ ý) thì nó sẽ đúng cả đối với đáy tiếp theo nó (đối với $n + 1$).

Từ hai bổ đề đó, ta suy ra được sự đúng đắn của mệnh đề đối với mọi giá trị của n. Thật vậy, do bổ đề thứ nhất, mệnh đề đúng đối với $n = 1$; do đó, theo bổ đề thứ hai nó đúng đối với $n = 2$, cho nên lại theo bổ đề thứ hai nó đúng đối với $n = 3$ và cứ như thế đến vô hạn.

Như vậy, ta chỉ còn phải chứng minh bổ đề thứ hai. Theo cách phát biểu của bổ đề đó, ta giả thiết rằng công thức của ta đúng đối với đáy thứ n, nghĩa là đối với giá trị tuỳ ý n và với mọi giá trị có thể được của r (đối với $r = 1, 2.., n$). Đặc biệt, đồng thời với cách viết

$$C_n^r = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{1.2.3...(r-1)r}$$

ta cũng có thể viết (với $r \geq 1$):

$$C_n^{r-1} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+2)}{1.2.3...(r-1)}.$$

Cộng hai đẳng thức đó và áp dụng công thức truy toán, ta được hệ quả:

$$C_{n+1}^r = C_n^r + C_n^{r-1} = \frac{n(n-1)...(n-r+2)}{1.2...(r\ \ -1)}.\left(\frac{(n-r+1}{r}+1\right)$$

$$= \frac{n(n-1)...(n-r+2)}{1\ .\ 2\ ...\ (r-1)} \cdot \frac{(n+1)}{r} = \frac{(n+1)n(n-1)...(n-r+2)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ ...\ r}.$$

Nói cách khác, sự đúng đắn của công thức tường minh đối với giá trị n nào đó kéo theo tính chất đúng đắn của nó đối với $n + 1$. Chính điều này được khẳng định trong bổ đề thứ hai - như vậy, ta đã chứng minh bổ đề đó. Những lời của Pát-xcan mà chúng tôi trích dẫn có một giá trị lịch sử bởi vì chứng minh của ông là sự vận dụng lần đầu tiên một phương pháp suy luận cơ bản và mới mẻ, thường gọi là phép quy nạp toán học.

Phương pháp này cần được tiếp tục nghiên cứu(*). Suy luận dựa trên phép quy nạp toán học nếu tiến hành không thận trọng thì có thể làm cho người mới học thêm bối rối, lúng túng; thậm chí có thể làm cho người ta hiểu nó như một trò lừa dối quỷ quyệt.

Bạn tất nhiên cũng biết rằng ma quỷ là nguy hiểm; đưa cho nó một ngón tay út, nó sẽ kéo lấy cả bàn tay. Thế mà chính bổ đề thứ hai lại làm đúng cái việc đó; khi giả thiết bổ đề thứ nhất là đúng, bạn mới chỉ đưa ra một ngón tay thôi (trường hợp $n = 1$); thế mà bổ đề thứ hai sẽ lấy đi của bạn ngón thứ hai (trường hợp $n = 2$), sau đó đến ngón thứ ba ($n = 3$), ngón thứ tư và... và rút cục, sẽ lấy hết các ngón tay của bạn, thậm chí nếu như bạn có vô số ngón tay.

§8. TÌM TÒI NHỮNG PHƯƠNG PHÁP MỚI

Sau khi đã nghiên cứu ba mục trên, ta nhận thức được ba phương pháp khác nhau để nghiên cứu các số tạo thành tam giác Pát-xcan, nghĩa là các hệ số của nhị thức.

1. *Phương pháp hình học*. Hệ số của nhị thức có thể xem như số các hành trình zíc-zắc ngắn nhất khác nhau giữa hai ngã tư trong mạng lưới đường phố của ta.

2. *Phương pháp tính toán*. Các hệ số của nhị thức có thể xác định được bằng công thức truy toán và điều kiện giới hạn.

3. *Công thức tường minh*. Ta đã chứng minh công thức đó bằng phương pháp của Pát-xcan trong §7. Chính tên gọi của các số tạo thành tam giác Pát-xcan cũng có thể gợi cho ta một phương pháp nữa.

4. *Nhị thức Niu-tơn*. Với x tuỳ ý (hay biến đổi) và bất kì số n nguyên không âm nào thì đồng nhất thức sau đây đều đúng.

$$(1 + x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x_n.$$

(Về cách chứng minh hãy xem bài tập 1)

Cũng có những cách thuyết minh khác đối với các số tạo thành tam giác Pát-xcan, các số đó đóng một vai trò quan trọng trong nhiều vấn đề lí thú và có một loạt những tính chất thú vị. Bec-nu-li đã viết: " Bảng số đó có một loạt những tính chất đặc biệt và mê li. Bây giờ ta chỉ vạch ra rằng, trong đó ẩn náu bản chất của lí thuyết kết hợp (xem các bài

(*) Xem Giải một bài toán như thế nào?- Quy nạp và quy nạp toán học.

tập 23 - 28), nhưng những ai hiểu sâu hơn môn hình học đều biết rằng trong bảng đó đang giữ kín nhiều điều bí mật căn bản và nhiều ngành khác nhau của toán học". Năm tháng trôi đi và nhiều sự kiện ở thời đại Bec-nu-li còn mờ ảo thì ngày nay đã sáng tỏ. Dù sao bạn đọc nào muốn làm quen với những bài tập bổ ích và lí thú sẽ có cơ hội tốt để làm điều đó: khi nghiên cứu các số của tam giác Pát-xcan và phân tích các kết quả nhận được, bạn đọc có khả năng tuyệt vời phát hiện ra một sự kiện mới mẻ nào đó.

Đồng thời ta nhận xét rằng trong bốn mục đầu của chương này ta đã bắt đầu bàn đến một vấn đề mới (về tổng các luỹ thừa của n số tự nhiên đầu tiên). Ngoài ra, ta đã làm quen với hai phương pháp tổng quát quan trọng (phép đệ quy và quy nạp toán học). Tất nhiên, nếu muốn hiểu rõ các phương pháp đó theo đúng nghĩa của nó, ta còn phải xét hàng loạt ví dụ nữa. Như thế là trước mắt ta tràn đầy triển vọng.

§9. QUAN SÁT, KHÁI QUÁT HOÁ, CHỨNG MINH VÀ CHỨNG MINH LẠI THEO LỐI MỚI

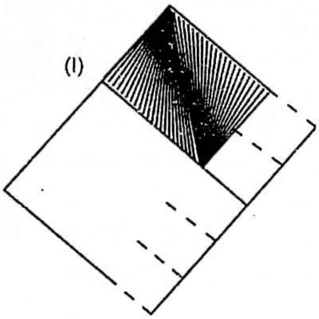
Ta hãy quay trở lại điểm xuất phát và xem xét nó trên một quan điểm khác nữa.

1. Ta hãy bắt đầu bằng câu thần chú (xem hình 3.2 và 3.3) hay đúng hơn, bằng một bài toán có liên quan tới câu đó. Ẩn số là gì? - Là số các hành trình zíc-zắc ngắn nhất trên mạng lưới đường phố từ điểm A đầu tiên đến điểm A cuối cùng, tức là từ góc bắc đến góc nam của hình vuông. Bất kì một hành trình nào như thế đều phải cắt đường chéo nằm ngang của hình vuông tại một điểm nào đó. Trên đường chéo nằm ngang có cả thảy sáu giao điểm như vậy (các ngã tư, các điểm A). Bởi vậy, chẳng hạn có thể nói rằng, trong bài toán của ta có sáu kiểu hành trình zíc-zắc khác nhau; vậy thì riêng mỗi kiểu đó có bao nhiêu hành trình? Ở đây trước mắt ta lại là một bài toán mới nữa.

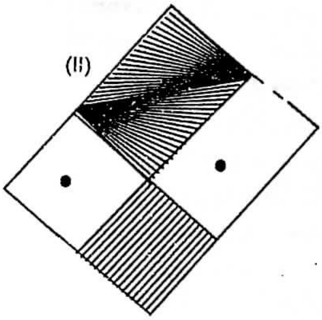
Ta sẽ xét cụ thể hơn. Trên đường chéo nằm ngang ta hãy lấy một ngã tư xác định nào đó, chẳng hạn cái thứ ba bên trái (bằng các kí hiệu ở §6 thì $l = 3$, $r = 2$, $n = 5$). Hành trình zíc-zắc đi qua điểm đã chọn đó gồm hai phần: phần trên, bắt đầu từ góc bắc của hình vuông và kết thúc tại điểm đang xét và phần dưới, bắt đầu từ điểm đang xét đó và kết thúc ở góc nam (xem hình 3.3). Như trước đây, ta đã xác lập (xem hình 3.5), số tất cả các phần khác nhau ở phía trên bằng: $C_5^2 = 10$.

Số tất cả các phần khác nhau ở phía dưới cũng đúng bằng chừng đó. Để lập toàn bộ một hành trình đầy đủ thì có thể liên kết bất kì phần trên nào với bất kì một phần dưới nào (như điều đã gợi cho ta trên hình 3.9). Do đó, số các hành trình như vậy bằng:

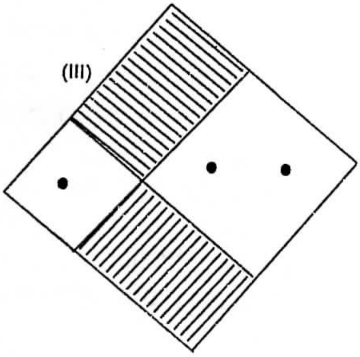
$$\left(C_5^2\right)^2 = 100.$$



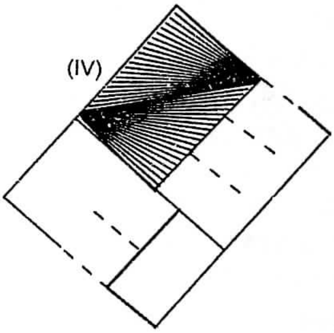
Hình 3.7



Hình 3.8



Hình 3.9



Hình 3.10

Hiển nhiên là bằng cách tương tự có thể tính được số cách hành trình zíc-zắc cắt đường chéo nằm ngang tại bất kì điểm nào. Từ đây ta tìm được cách giải mới cho bài toán ban đầu của ta: câu thần chú trên hình 3.2 có thể đọc đúng bằng

$$1 + 25 + 100 + 100 + 25 + 1$$

cách khác nhau. Kết quả này phù hợp với kết quả đã nhận được ở cuối §5 và thật vậy, tổng của ta bằng 252.

2. *Khái quát hoá.* Cạnh của hình vuông trên hình 3.3 gồm năm khu phố. Nếu khái quát hoá (tức là thay 5 bằng n) thì ta tìm được):

$$\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n.$$

"Tổng bình phương các số nằm trên đáy thứ n của tam giác Pát-xcan bằng số đứng ở chính giữa của đáy thứ $2n$". Về thực chất, suy luận của ta ở m.1 chứng minh điều khẳng định tổng quát đó. Thật vậy, ta đã chỉ xét ở đó trường hợp đặc biệt $n = 5$ (và ngay cả ngã

tư trên đáy thứ năm ta cũng đã chọn một cách hoàn toàn xác định), nhưng việc lựa chọn đặc biệt số n không mang lại bất cứ một lợi thế nào hết. Vì vậy, suy luận của ta là đúng cả trong trường hợp tổng quát. Sẽ bổ ích cho bạn đọc nếu lặp lại tất cả những điều ta đã khẳng định dưới hình thức bài tập, có lưu ý đặc biệt đến tính chất khái quát của chúng, muốn vậy bạn đọc chỉ cần nói n thay cho 5.

3. *Còn một phương pháp nữa.* Dù sao thì kết quả của ta cũng hơi đột ngột. Nếu ta biết đi đến kết quả từ một phía khác nữa thì ta còn có thể hiểu nó rõ hơn.

Điểm lại các phương pháp khác nhau đã kể ra ở §8, ta có thể thử liên hệ kết quả của ta với công thức nhị thức. Quả thật, mối liên hệ như vậy tồn tại:

$$(1+x)^{2n} = \ldots + C_{2n}^{n} \quad x^{n} + \ldots = (1+x)^{n}(1+x)^{n}$$

$$= \left[C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n\right] \times \left[C_n^n + \ldots + C_n^2 n^{n-2} + C_n^1 x^{n-1} + C_n^0 x^n\right].$$

Ta hãy tập trung chú ý vào hệ số của x_n. Hệ số đó đứng ở vế phải của dòng đầu và trùng với vế phải của công thức tổng quát ta đã gặp ở m.2 mà ta đang tìm cách khác để chứng minh. Bây giờ ta chú ý đến tích của hai thừa số được biểu diễn dưới dạng khai triển ở hai dòng cuối. Khi viết các thừa số đó, ta đã sử dụng tính chất đối xứng của các hệ số của nhị thức: $C_n^r = C_n^{n-r}$.

Trong tích đó, hệ số của x_n, đương nhiên bằng vế trái của công thức ở m.2 mà ta đang chuẩn bị chứng minh. Cụ thể chứng minh đó như sau: vì ta có đồng nhất thức đối với x, nên các hệ số của x^n ở cả hai vế của *đồng nhất thức* phải như nhau.

BÀI TẬP VÀ CHÚ THÍCH BỔ SUNG CHO CHƯƠNG 3

PHẦN 1

Các bài tập và nhận xét bổ sung ở phần này có liên quan đến nội dung của bốn mục đầu.

1. Hãy chứng minh công thức nhị thức ghi ở m.4 §8 (ta đã áp dụng công thức đó ở §4).

(Hãy sử dụng phương pháp quy nạp toán học. Phương pháp nào trong ba phương pháp nói đến ở m.4 §8 thích hợp hơn cả với mục đích đó?).

2. *Trường hợp đặc biệt tương đương với trường hợp tổng quát.* Đồng nhất thức ghi ở m.4 §8 và được chứng minh trong bài tập 1 là một trường hợp đặc biệt của đồng nhất thức tổng quát hơn.

$$(a+b)^n = C_n^0 \ a^n + C_n^1 \ a^{n-1} \ b + C_n^2 \ a^{n-2} \ b^2 + \ldots + C_n^n \ b^n.$$

Hãy chứng minh rằng, ngược lại đồng nhất thức dạng tổng quát có thể nhận được từ trường hợp đặc biệt đó.

3. Trong ba mục đầu tiên của chương này, ta đã tính tổng S_k (được xác định ở §3) đối với $k = 1, 2, 3$; trường hợp $k = 0$ thì tầm thường. So sánh các biểu thức có được, ta có thể

đi đến một định lí tổng quát sau đây: tổng S_k là một đa thức bậc $k + 1$ đối với n mà hệ số cao nhất của nó bằng $\frac{1}{k+1}$.

Định lí đó khẳng định rằng: $S_k = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \dots$ (ở đây các dấu chấm biểu diễn các số hạng mà bậc của nó nhỏ hơn $k + 1$) đã đóng một vai trò quan trọng lịch sử phép tính tích phân.

Hãy chứng minh định lí đó và sử dụng phương pháp quy nạp toán học(*).

4. Ta có thể đoán được biểu thức đối với tổng S_4 phải như thế nào nếu tìm được tỉ số bằng số $\frac{S_4}{S_2}$ đối với một số giá trị không lớn của n. Thật vậy, đối với $n = 1, 2, 3, 4, 5$,

$$\frac{S_4}{S_2} = 1, \frac{17}{5}, 7, \frac{59}{5}, \frac{89}{5}.$$

Ta chuyển sang cách ghi sau đây:

$$\frac{5}{5}, \frac{17}{5}, \frac{35}{5}, \frac{59}{5}, \frac{89}{5}.$$

Tử số của các phân số này sát gần các bội số của sáu; thật vậy, các tử số đó có thể biểu diễn dưới dạng 6.1 - 1, 6.3 - 1, 6.6 - 1, 6 10 - 1, 6.15 – 1 dãy số 1, 3, 6, 10, 15 bạn đã quen.

Khi đã xây dựng được biểu thức đối với S_4, bạn hãy chứng minh có bằng phương pháp quy nạp hoá toán học không phụ thuộc vào §4.

5. Hãy tính S_4, bằng phương pháp chỉ ra ở §4, không phụ thuộc vào bài tập 4.

6. Chứng minh rằng:

$n = S_0$,

$n^2 = 2S_1 - S_0$,

$n^3 = 3S_2 - 3S_1 + S_0$,

$n^4 = 4S_3 - 6S_2 + 4S_1 - S_0$

và một cách tổng quát

$$n^k = C_k^l S_{k-1} - C_k^2 S_{k-2} + C_k^3 S_{k-3} - \dots + (-1)^{k-1} c_k^k S_0.$$

(Công thức này mặc dù cùng loại với công thức cơ bản ở §4 nhưng dù sao cũng khác công thức đó).

7. Chứng minh rằng:

(*) Tương tự như cách giải bài tập 3 có thể chứng minh rằng hệ số thứ hai của đa thức S_k (hệ số của n^k) nói chung không phụ thuộc vào k; hãy chứng minh điều đó. Hệ số đó bằng gì?

$S_1 = S_1$

$2(S_1)^2 = 2S_3,$

$4(S_1)^3 = 3S_5 + S_3,$

$8(S_1)^4 = 4S_7 + 4S_5$

và một cách tổng quát với $k = 1, 2, 3\ldots$

$$2^{k-1}(S_1)^k = C_k^1 S_{2k-1} + C_k^3 S_{2k-3} + C_k^5 S_{2k-5} + \ldots$$

hơn nữa số hạng cuối cùng của biểu thức ở bên phải sẽ bằng hoặc S_k hoặc kS_{k+1} tuỳ thuộc vào k lẻ hay chẵn.

(Công thức này tương tự như công thức trong bài tập 6, vì ở đó ta có thể viết $(S_0)^k$ thay cho n^k).

8. Chứng minh rằng

$3S_2 = 3S_2,$

$6S_2S_1 = 5S_4 + S_2,$

$12S_2(S_1)^2 = 7S_6 + 5S_4,$

$24S_2(S_1)^3 = 9S_8 + 14S_6 + S_4$

và một cách tổng quát với $k = 1, 2, 3,\ldots,$

$$3.2^{k-1}S_2(S_1)^{k-1} = \left(C_k^0 + 2C_k^1\right)S_{2k} + \left(C_k^2 + 2C_k^3\right)S_{2k-2} + \ldots$$

hơn nữa số hạng cuối cùng của biểu thức ở bên phải sẽ bằng hoặc $(k+1)S_{k+1}$ hoặc S_k tuỳ thuộc vào lẻ hay chẵn.

9. Chứng minh rằng

$S_3 = (S_1)^2,$

$$S_5 = (S_1)^2\,\frac{4S_1 - 1}{3},$$

$$S_7 = (S_1)^2\,\frac{6(S_1)^2 - 4S_1 + 1}{3},$$

và một cách tổng quát rằng S_{2k-1} (ở đây $2k - 1 \geq 3$) là một đa thức bậc k của $S_1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$, đa thức đó chia hết cho $(S_1)^2$, (điều đó khái quát kết quả ở §3).

10. Chứng minh rằng:

$$S_4 = S_2\,\frac{6S_1 - 1}{5},$$

$$S_6 = S_2\,\frac{12(S_1)^2 - 6S_1 + 1}{7},$$

$$S_8 = S_2 \frac{40(S_1)^3 - 40(S_1)^2 + 18S_1 - 3}{15}.$$

và một cách tổng quát rằng $\frac{S_{2k}}{S_2}$ là một đa thức bậc k - 1 của S_1 (điều đó khái quát kết quả có được khi giải ví dụ ở bài tập 4).

11. *Cứu tầu đắm.* Một chiếc tầu bị đắm, có thể là ở trên tầu có một số vật quý giá đủ để chi cho việc vớt chiếc tầu lên. Có thể là kế hoạch của bạn đã không mang lại kết quả nhưng trong kế hoạch đó bao hàm một ý giúp bạn thử tiếp tục cố gắng cứu con tầu.

Trong §2 kế hoạch đầu tiên của ta để tính S_2 (bằng các kí hiệu §3) đã bị thất bại bởi vì thủ thuật thích hợp đối với S_1 thì lại hoàn toàn không thể đúng được để tính S_2. Vậy thiếu sót của thủ thuật đó là ở chỗ nào? Nếu sử dụng nó một cách linh hoạt hơn thì sao? Có cần biến dạng nó đi một chút hay không? Hay phải áp dụng nó trong trường hợp nào khác nữa?

Những suy luận tương tự có thể trở thành nguồn gốc của những ý đồ khác nhau và vì vậy hoàn toàn dễ dàng suy ra nếu thử thủ thuật của ta đối với tổng "tổng quát" S_k. Cái gì là căn bản nhất trong thủ thuật đó? Liên kết hai số hạng cách đều hai đầu: một số hạng nào đó của tổng cách xa một đầu bao nhiêu, thì số hạng tương ứng với nó cũng cách xa đầu kia bấy nhiêu. Chẳng hạn, trong S_k các số hạng j^k và $(n - j)^k$ là những số hạng như thế. Nếu cộng chúng chẳng đi đến đâu cả thì ta hãy thử xem liệu trừ đi thì có tốt hơn không - có thể được, sau nhiều lần thử ta nghĩ đến một tổ hợp liên quan đến k có dạng sau đây:

$$(n-j)^k - (-j)^k = n^k - C_k^1 n^{k-1} j + C_k^2 n^{k-2} j^2 - ... + (-1)^{k-1} C_k^{k=1} n j^{k-1}.$$

Ta viết liên tiếp công thức do đối với $j = 0,, \ldots, n - 1, n$:

$n^k - (-1)^k 0^k = n^k,$

$$(n-1)^k - (-1)^k 1^k = n^k - C_k^1 n^{k-1} 1 + C_k^2 n^{k-2} 1^2 - ... + (1)^{k-1} C_k^{k-1} n 1^{k-1},$$

$$(n-2)^k - (-1)^k 2^k = n^k - C_k^1 n^{k-1} 2 + C_k^2 n^{k-2} 2^2 - ... + (1)^{k-1} C_k^{k-1} n 2^{k-1},$$

....

$$1^k - (-1)^k (n-1)^k = n^k - C_k^1 n^{k-1}(n-1) + C_k^2 n^{k-2}(n-1)^2 - ...... + (-1)^{k-1} C_k^{k-1} n(n-1)^{k-1},$$

$$0^k - (-1)^k n^k = n^k - C_k^1 n^{k-1} n + C_k^2 n^{k-2} n^2 - ... + (-1)^{k-1} C_k^{k-1} n\, n^{k-1}.$$

Cộng lại và dùng các kí hiệu ở §3 (nhưng viết S_0' thay cho $S_0 + 1$) ta được:

$$S_k[1 - (-1)^k] = n^k S_0, - C_k^1 n^{k-1} S_1 + C_k^2 n^{k-2} S_2 - ...... + (-1)^{k-1} C_k^{k-1} n S_{k-1}.$$

Hãy khảo sát kết quả cuối cùng đối với k = 1, 2, 3, rồi sau đó thử nhận xét nó trong trường hợp tổng quát.

12. Ta đưa vào kí hiệu $1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k = S_k(n)$

đặc trưng cho tổng ở bên trái một cách đầy đủ hơn (hay ở mức độ lớn hơn) kí hiệu đã đưa vào ở §3; ở đây k là số nguyên không âm, còn n là số nguyên dương.

Bây giờ ta hãy mở rộng miền giá trị của n (trong khi vẫn giữ nguyên miền giá trị của k) và giả thiết rằng. $S_k(x)$ là một đa thức bậc $k + 1$ của x, đa thức này trùng với $S_k(n)$ khi $x = 1, 2, 3, \ldots$; chẳng hạn : $S_3(x) = \frac{x^2(x+1)^2}{4}$.

Hãy chứng minh rằng với $k \geq 1$ (nhưng không với $k = 0$)

$S_k(-x - 1) = (-1)^{k-1} S_k(x)$

13. Hãy tìm tổng của n số lẻ đầu tiên $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$.

(Hãy sử dụng tất cả các phương pháp ta đã biết).

14. Hãy tìm tổng $1 + 9 + 25 + \ldots + (2n - 1)^2$.

15. Hãy tìm tổng $1 + 27 + 125 + \ldots + (2n - 1)^3$.

16. (Tiếp theo). Hãy khái quát hoá bài toán trên.

17. Tìm tổng $2^2 + 5^2 + 8^2 + \ldots + (3n - 1)^2$.

18. (Tiếp theo). Hãy khái quát hoá bài toán trên.

19. Hãy tìm biểu thức đơn giản đối với tổng.

$1.2 + (1 + 2).3 + (1 + 2 + 3).\ 4 + \ldots + [1 + 2 + \ldots + (n - 1)]\ n$.

(Đương nhiên khi đó bạn phải vận dụng những kiến thức đã tích luỹ từ trước. Cái gì hứa hẹn triển vọng tốt đẹp hơn: áp dụng những kết quả riêng lẻ mà bạn đã biết hay sử dụng các phương pháp quen thuộc?).

20. Hãy xét $\frac{n(n-1)}{2}$ hiệu số

$2 - 1$,

$3 - 1, 3 - 2$,

$4 - 1, 4 - 2, 4 - 3$,

....

$n - 1, n - 2, n - 3, \ldots, n - (n - 1)$,

và hãy tính:

a) tổng của chúng;

b) tích của chúng;

c) tổng các bình phương của chúng.

21. Giả thiết rằng, các số $E_1, E_2, E_3 \ldots$ được xác định bởi đồng nhất thức

$x^n - E_1x^{n-1} + E_2x^{n-2} - \ldots + (-1)^nE_n = (x - 1)(x - 2)(x - 3)\ldots(x - n)$.

Chứng minh rằng:

$E_1 = \frac{n(n-1)}{2}$,

$$E_2 = \frac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{24},$$

$$E_3 = \frac{(n-2)(n-1)n^2(n+1)^2}{48},$$

$$E_4 = \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(15n^3+15n^2-10n-8)}{5760}.$$

và một cách tổng quát rằng E_k (tốt hơn là kí hiệu nó bằng $E_k(n)$ vì nó cũng phụ thuộc n) là đa thức bậc $2k$ của n.

(Ở đây sẽ rất có ích nếu làm quen với một định lí của đại số cao cấp: E_k được gọi là đa thức đối xứng cơ bản thứ k của n số nguyên đầu tiên mà tổng các luỹ thừa bậc k của chúng được kí hiệu là $S_k = S_k(n)$. Hãy thử kiểm tra lại xem $E_k(k) = k!$).

22. *Hai dạng của phép quy nạp toán học.* Một mệnh đề toán học điển hình A có thể chứng minh được bằng $A_2, A_3, \ldots, A_n \ldots$; về thực chất A tương đương với điều khẳng định sự đúng đắn đồng thời của tất cả $A_1, A_2, A_3 \ldots$. chẳng hạn, nếu A là định lí về nhị thức Niu-tơn, thì A_n khẳng định sự đúng đắn của đồng nhất thức.phương pháp quy nạp toán học bao gồm một tập hợp vô hạn các trường hợp đặc biệt A_1,

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n$$

(xem bài tập 1); thật vậy, định lí về nhị thức khẳng định rằng đồng nhất thức trên xảy ra với bất kì $n = 1, 2, 3, \ldots$ Ta hãy xét ba điều khẳng định đối với dãy mệnh đề:

a) A_1 đúng;

b) A_{n+1} suy ra từ A_n;

c) A_{n+1} suy ra từ toàn bộ tập hợp mệnh đề $A_1, A_2, A_3 \ldots A_{n-1}$ và A_n.

Tiếp đó có thể đi theo hai đường khác nhau.

d) Kết luận về sự đúng đắn của A trong trường hợp tổng quát, tức là với $n = 1, 2, 3\ldots$, có thể suy ra từ những điều khẳng định a) và b). Ở §7, theo Pát-xcan, ta đã đi đến kết luận như vậy.

e) Cũng kết luận đó, có thể suy ra từ các điều khẳng định a) và b); ta đã làm như vậy khi giải bài toán ở bài tập 3. Bạn có thể có ấn tượng rằng các trường hợp a) và b) khác nhau về hình thức hơn là về nội dung. Bạn không thể diễn tả những cảm giác của mình dưới một hình thức cụ thể và lí giải chúng thật rành mạch hay sao?

PHẦN 2

23. Mười thiếu niên là Bốp, Rích-ki, An, Các, Ác, Đích, A-lếch, Bin, Rôi và A-len cùng đi cắm trại. Chiều đến họ chia thành hai tốp, mỗi tốp năm người, một tốp đi dựng lều, còn tốp kia nấu cơm. Có thể phân chia thành hai tốp như vậy bằng bao nhiêu cách (liệu câu thần chú ở đây có giúp ích gì hay không?).

24. Chứng minh rằng từ một tập hợp gồm n phần tử có thể lấy ra tập hợp gồm r phần tử (theo thuật ngữ truyền thống thì nói số tổ hợp chập r của n phần tử bằng $C^r{}_n$).

25. Trên một mặt phẳng lấy n điểm sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Có thể kẻ được bao nhiêu đường thẳng đi qua từng cặp điểm cho trước? Có thể dựng được bao nhiêu tam giác có đỉnh tại các điểm đó?

26. (Tiếp theo). Hãy phát biểu, rồi giải bài toán không gian tương tự.

27. Hãy tìm số đường chéo của một đa giác lồi n cạnh.

28. Hãy tìm số giao điểm của các đường chéo trong một đa giác lồi n cạnh. Khi đó chỉ tính những giao điểm ở trong và xuất phát từ giả thiết là không có ba đường chéo nào giao nhau tại một điểm (đa giác n cạnh có "dạng tổng quát").

29. Cho một khối sáu mặt (ta có thể coi nó là không đều, chẳng hạn, không có hai mặt nào của nó bằng nhau). Cần sơn các mặt đó một mặt màu đỏ, hai mặt màu xanh và ba mặt màu nâu. Có thể có bao nhiêu cách làm?

30. Cho một khối đa diện n mặt (ta có thể coi nó là không đều, chẳng hạn, không có hai mặt nào của nó như nhau). Cần sơn các mặt đó : r mặt màu đỏ, s mặt màu xanh và t mặt màu xanh lá cây ; thêm nữa, giả thiết rằng $r + s + t = n$. Có thể làm điều đó bằng bao nhiêu cách?

31. (Tiếp theo). Hãy khái quát hoá bài toán trên.

PHẦN 3

Khi giải các bài toán dưới đây, bạn đọc có thể áp dụng các phương pháp khác nhau hoặc chọn một trong các phương pháp đó. (Xem §8, mối liên hệ của các hệ số nhị thức với lí thuyết kế hợp đã gặp ở bài tập 24 lại cho ta một phương pháp nữa). Lép-nít từng nhấn mạnh tầm quan trọng của cách nhìn cùng một bài toán từ nhiều góc độ khác nhau. Đây là câu lược dịch một trong những nhận xét của ông: "Khi so sánh hai biểu thức có cùng một lượng với nhau, bạn có thể tìm được ẩn số; khi so sánh hai suy diễn khác nhau dẫn đến cùng một kết quả, bạn có thể phát hiện ra một phương pháp mới".

32. Bằng nhiều phương pháp nhất mà bạn có thể tìm được, hãy chứng minh rằng:

$$C_n^r = C_n^{n-r}.$$

33. Hãy xét tổng của các số nằm trên cùng một đáy của tam giác Pát-xcan

$$1 = 1,$$
$$1 + 1 = 2,$$
$$1 + 2 + 1 = 4,$$
$$1 + 3 + 3 + 1 = 8.$$

Các kết quả nhận được gợi ý một định lí tổng quát nào đó. Bạn có thể dự đoán là định lí nào không? Có thể bạn đã đoán ra một định lí, bạn có thể chứng minh được định lí đó không? Sau khi đã chứng minh xong, bạn còn có thể nghĩ ra một cách chứng minh nào khác cho định lí đó không?

34. Bạn có nhận xét rằng:

$$1 - 1 = 0,$$
$$1 - 2 + 1 = 0,$$
$$1 - 3 + 3 - 1 = 0,$$
$$1 - 4 + 6 - 4 + 1 = 0.$$

Bạn hãy khái quát hcá kết quả này, chứng minh nó, rồi lại chứng minh nó bằng phương pháp khác.

35. Hãy xét tổng của sáu số đầu tiên nằm dọc đại lộ thứ ba của tam giác Pát-xcan.

$$1 + 4 + 10 + 20 + 35 + 56 = 126.$$

Hãy tìm xem tổng đó (số 126) nằm ở đâu trong tam giác Pát-xcan; hãy thử phát hiện những sự kiện tương tự; hãy khái quát hoá; hãy chứng minh; rồi chứng minh bằng phương pháp khác.

36. Hãy cộng 36 số biểu diễn trên hình 3.5; bạn hãy thử tìm tổng đó trên tam giác Pát-xcan, hãy phát biểu định lí tổng quát và chứng minh nó. (Cộng một số lớn các số như vậy là một công việc nặng nề, nhưng nếu làm việc đó một cách khôn khéo thì dễ đạt tới một ý quý báu).

37. Hãy thử tìm trong tam giác Pát-xcan những số tham gia vào hệ thức sau đây:

$$1.1 + 5.4 + 10.6 + 10.4 + 5.1 = 126.$$

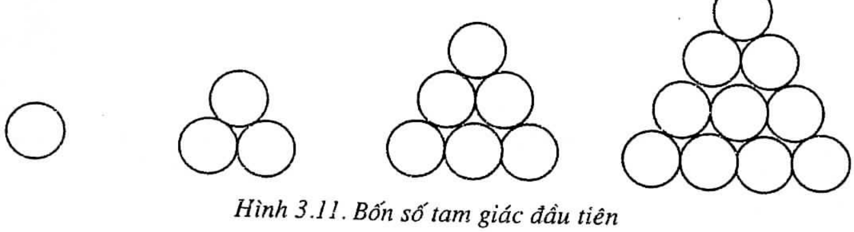
Hãy tìm những hệ thức tương tự (hay hãy nhớ lại chúng); hãy khái quát hoá; hãy chứng minh; rồi chứng minh bằng phương pháp khác.

38. Hãy thử tìm trong tam giác Pát-xcan những số tham gia vào hệ thức sau đây:

$$6.1 + 5.3 + 4.6 + 3.10 + 2.15 + 1.21 = 126.$$

Hãy tìm những hệ thức tương tự (hay hãy nhớ lại chúng); hãy khái quát hoá; hãy chứng minh; rồi chứng minh bằng phương pháp khác.

39. Trên hình 3.11 biểu diễn bốn hình trong một dãy số vô hạn các hình tương tự, mỗi hình đó là một tập hợp các hình tròn bằng nhau xếp dưới dạng tam giác đều. Bất kì hình tròn nào không nằm trên biên của hình đều tiếp xúc với sáu hình tròn lân cận. Ta sẽ ghi cho một hình số n nếu mỗi cạnh của nó gồm hình tròn; tổng số tất cả các hình tròn tạo nên hình số n ta gọi là số tam giác thứ n. Hãy biểu thị số tam giác thứ n qua n và xác định vị trí của nó trong tam giác Pát-xcan.



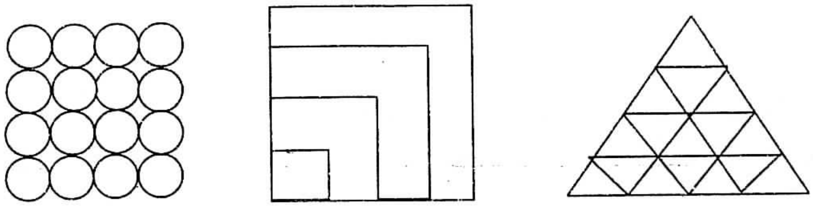
Hình 3.11. Bốn số tam giác đầu tiên

40. Bạn hãy thay mỗi hình tròn (đồng xu) trên hình 3.11 bằng một bình cầu (quả bóng bàn) sao cho "xích đạo" của mỗi hình cầu trùng với đường tròn đó. Giữ chặt trên mặt phẳng nằm ngang 10 hình cầu như ở hình 3.11 và đặt ở phía trên sáu hình cầu (chúng được xếp đặt một cách cẩn thận trong các hố), đó sẽ là lớp thứ hai; trên những hình cầu đó lại đặt ba bình cầu nữa. Đó sẽ là lớp thứ ba và sau hết, ở trên cùng đặt một hình cầu nữa. Cấu hình không gian gồm:

$$1 + 3 + 6 + 10 = 20$$

hình cầu đó ở trong cùng một tương quan với một hình tứ diện (đều) (chóp tam giác) cũng như trong tương quan giữa mỗi tập hợp các hình tròn biểu diễn trên hình 3.11 với một tam giác đều nào đó. Ta gọi số 20 là số chóp thứ tư. Hãy biểu thị số chóp thứ n theo n và xác định vị trí của nó trong tam giác Pát-xcan.

41. Hình chóp gồm các quả bóng bàn cũng có thể lập bằng nhiều cách khác. Hãy bắt đầu bằng lớp gồm n^2 quả bóng đặt dưới dạng hình vuông như trên hình 3.12; trên đó lại đặt lớp thứ hai gồm $(n-1)^2$ quả; rồi đến lớp thứ ba gồm $(n-2)^2$ quả... sau cùng, ở trên nhất là một quả nữa. Có bao nhiêu quả cầu tất cả ở trong hình chóp như vậy?



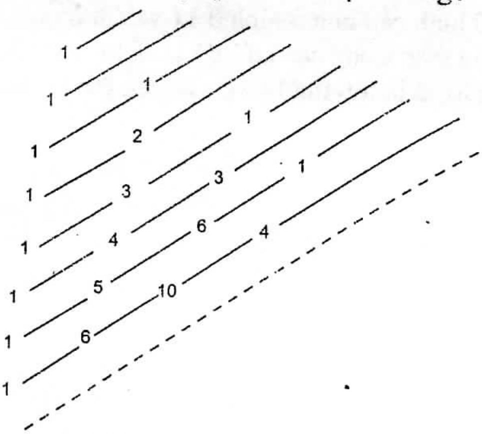
Hình 3.12. Số vuông thứ tư

42. Một số nguyên dương n có thể biểu diễn bằng bao nhiêu cách dưới dạng tổng của các số nguyên dương? Bằng bao nhiêu cách có thể biểu diễn một số n dưới dạng tổng của một số t chọn trước các số nguyên (giả thiết rằng tất cả các số đó đều dương)? Ở đây, ta sẽ coi hai tổng là khác nhau nếu chúng chỉ khác nhau bởi thứ tự của các số hạng.

Đương nhiên khi nghiên cứu bài toán tương tự, ta nên bắt đầu từ các trường hợp đặc biệt và từ ý định hệ thống hoá tài liệu các thí nghiệm đã tích luỹ được. Đây là tổng tương ứng với các trường hợp $n = 4$ và $n = 5$

4	1 + 3	2 + 1 + 1	1 + 1 + 1 + 1	
	2 + 2	1 + 2 + 1		
	3 + 1	1 + 1 + 2		
5	1 + 4	3 + 1 + 1	2 + 1 + 1 + 1	1 + 1 + 1 + 1 + 1
	2 + 3	1 + 3 + 1	1 + 2 + 1 + 1	
	3 + 2	1 + 1 + 3	1 + 1 + 2 + 1	
	4 + 1	1 + 2 + 2	1 + 1 + 1 + 2	
		2 + 1 + 2		
		2 + 2 + 1		

Bạn có nhận ra ở đây quy luật tổng quát không? Hãy chứng minh điều ước đoán của mình. Một hình hình học nào đó có thể giúp ích cho bạn chăng?



Hình 3.13. Minh hoạ các số Phi-bô-na-xi bằng các đường xiên

43. Các số Phi-bô-na-xi. Cộng các số trên hình 3.13 theo các đường xiên ta được dãy số Phi-bô-na-xi.

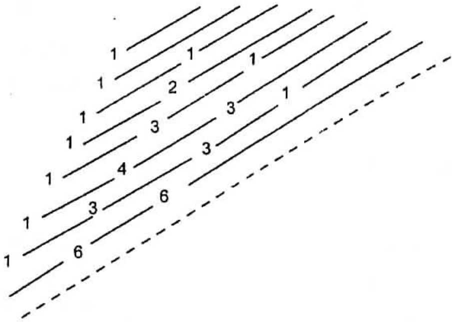
$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

Ta kí hiệu số hạng thứ n của dãy này, tức là số Phi-bô-na-xi thứ n là F_n; chẳng hạn $F_1 = 1, F_2 = 1, \ldots, F_8 = 21$.

1) Hãy kí hiệu F_n là các hệ số của nhị thức.

2) Hãy chứng minh rằng với $n = 3, 4, 5, \ldots$ ta có: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

44. (Tiếp theo). Dãy số 1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13,... được tạo nên tương tự như các số Phi-bô-na-xi (hãy so sánh) hình 3.14 với hình 3.13). Ta kí hiệu số hạng thứ n của dãy này là G_n.



Hình 3.14. Hãy tăng độ nghiêng

1) Hãy biểu thị G_n theo các hệ số của nhị thức.

2) Hãy chứng minh rằng $n = 4, 5, 6, \ldots$ ta có:

$$G_n = G_{n-1} + G_{n-3}$$

3) Hãy khái quát hoá kết quả thu được.

45. Chứng minh rằng tích $C_{n_1}^{r_1}.C_{n_2}^{r_2}.C_{n_3}^{r_3}...C_{n_h}^{r_h}$ có thể giải thích như số các hành trình zíc-zắc từ một tập hợp các hành trình nào đó trong mạng lưới các đường phố.

46. Tất cả các hành trình zíc-zắc ngắn nhất bắt đầu từ đỉnh của tam giác Pát-xcan và kết thúc tại điểm được đặc trưng bởi các số n (tổng số các khu phố) và (số các khu phố hướng từ bên phải đi xuống đã thừa biết là có một điểm chung với trục đối xứng (nối điểm A ở trên với điểm ở dưới, xem hình 3.3) của tam giác Pát-xcan, cụ thể đỉnh của tam giác Pát-xcan là điểm chung của chúng. Hãy xét trong tập hợp các hành trình đó một tập hợp con gồm các hành trình không có điểm chung nào với trục đối xứng ngoài đỉnh đó và hãy tìm số N các hành trình như vậy.

Để hiểu rõ hơn nội dung bài toán, nên bắt đầu từ các trường hợp đơn giản chẳng hạn từ $r = 0, n, \frac{n}{2}$ (n chẵn).

$n = 1, 1, 0$

Lời giải: Chỉ cần xét trường hợp $r > \frac{n}{2}$ là đủ. Trong trường hợp đó điểm cuối ở dưới của mọi hành trình zíc-zắc nằm ở nửa mặt phẳng bên phải của trục đối xứng. Tất cả số hành trình như vậy C_n^r. Ta chia tập hợp của chúng thành ba tập hợp con không giao nhau:

1) Tập hợp con phải tìm, được định nghĩa ở trên, số phần tử N của nó là số ta muốn tìm; bất cứ hành trình nào không thuộc tập hợp con đó phải cắt trục đối xứng tại một điểm nào đó ngoài điểm A.

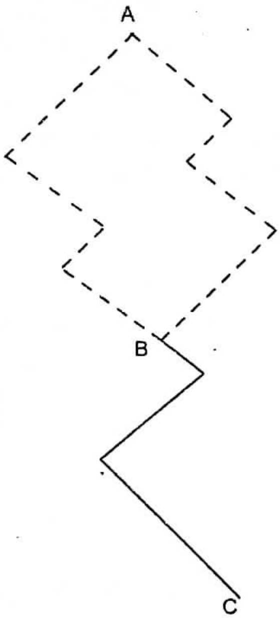
2) Các hành trình mà đoạn đầu của chúng đi qua khu phố ở bên trái (đi xuống); hành trình đó nhất thiết phải cắt trục đối xứng, bởi vì nó kết thúc ở nửa mặt phẳng kia, số các hành trình của tập hợp con đó, đương nhiên bằng C_{n-1}^r;

3) Các hành trình không thuộc loại 1), không thuộc loại 2); chúng bắt đầu từ dãy phố hướng từ bên phải đi xuống, rồi sau đó đạt tới một điểm nào đó của trục đối xứng.

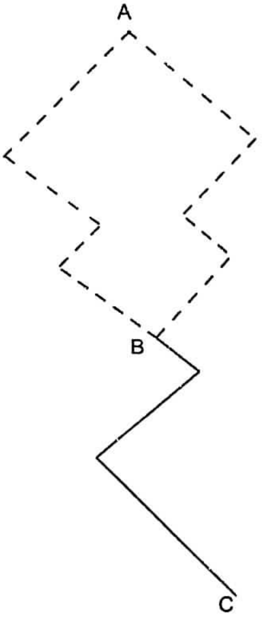
Hãy chứng minh rằng tập hợp con 3) có bao nhiêu hành trình thì tập hợp con 2) hãy có bấy nhiêu hành trình (trên hình 3.15 và hình 3.16 minh hoạ ý niệm về sự xác lập quan hệ một – một giữa các tập hợp con đó) và trên cơ sở đó suy ra rằng:

$$N = \frac{|2r - 1|}{n} C_n^r .$$

47. (Tiếp theo) Số tất cả hành trình zíc-zắc ngắn nhất từ đỉnh tới đáy thứ n có điểm chung duy nhất với trục đối xứng là đỉnh đó bằng C_{2m}^m, nếu $n = 2m$ chẵn và bằng $2C_{2m}^m$, nếu $n = 2m + 1$ lẻ.



Hình 3.15. Ý quyết định



Hình 3.16. Sự biến dạng của ý quyết định

48. *Các hệ số của tam thức.* Trên hình 3.17 là một phần của bảng tam giác vô hạn các số, bảng này được xác định bởi hai điều kiện:

1) *Điều kiện biên.* Bất kì đường nằm ngang nào hay "đáy" (ở §6 thuật ngữ này cũng đã được dùng với một ý nghĩa tương tự) bắt đầu bằng các chữ số 0, 1 và tận cùng bằng các số 1, 0 (đáy thứ n chứa $2n + 3$ số và như vậy trong đó còn lại $2n - 1$ số là ẩn số; $n = 1, 2\ldots$).

2) *Công thức truy toán.* Bất kì số nào ở đáy thứ $n + 1$, trừ những cặp số ở ngoài biên đã nói ở m.1, đều có thể tính được bằng cách lập tổng của ba số ở đáy thứ n, cụ thể là các số kế cận tây bắc, bắc và đông bắc của số đó (chẳng hạn $45 = 10 + 16 + 19$).

0 1 0
0 1 1 1 0
0 1 2 3 2 1 0
0 1 3 6 7 6 3 3 1 0
0 1 4 10 16 19 6 10 4 1 0
0 1 5 15 30 45 51 45 30 15 5 1 0

Hình 3.7. Các hệ số của tam thức

Hãy tính các số của đáy thứ bảy. (Tất cả các số đó, trừ ba số, đều chia hết cho 7).

49. (Tiếp theo) chứng minh rằng các số của đáy thứ n, bắt đầu và tận cùng bằng đơn vị, là các hệ số của khai triển của tam thức bậc n: $(1 + x + x^2)^n$ theo bậc của x. (Chính điều đó giải thích tên gọi "các hệ số của tam thức").

50. (Tiếp theo) Hãy giải thích sự đối xứng của hình 3.17 đối với đường thẳng đứng ở giữa.

51. (Tiếp theo) nhận xét rằng

$$\begin{aligned} 1 + 1 + 1 &= 3; \\ 1 + 2 + 3 + 2 + 1 &= 9; \\ 1 + 3 + 6 + 7 + 6 + 3 + 1 &= 27; \end{aligned}$$

hãy khái quát sự kiện đó và chứng minh điều đó.

52. (Tiếp theo). Nhận xét rằng.

$$\begin{aligned} 1 - 1 + 1 &= 1; \\ 1 - 2 + 3 - 2 + 1 &= 1; \\ 1 - 3 + 6 - 7 + 6 - 3 + 1 &= 1; \end{aligned}$$

hãy khái quát sự kiện đó và chứng minh điều đó.

53. (Tiếp theo) nhận xét rằng tổng $1^2 + 2^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 19$ là một hệ số của tam thức; hãy khái quát sự kiện đó và chứng minh nó.

54. (Tiếp theo) hãy tìm trên hình 3.17 những đường tương ứng với những đường trên tam giác Pát-xcan.

55. *Tam giác điều hoà Lép-nít.* Trên hình 3.18 là một phần của một hình gồm các số mà ít người biết tới nhưng rất đặc biệt. Một số tính chất của nó "tương tự theo nghĩa ngược lại" với các tính chất của tam giác Pát-xcan. Chẳng hạn, ta đã động chạm đến các số nguyên, còn ở đây là các đại lượng nghịch đảo của chúng (điều đó có thể thấy ngay). Trong tam giác Pát-xcan mỗi số là tổng của các số kế cận tây bắc và đông bắc của nó; còn ở trong tam giác Lép-nít mỗi số là tổng của hai số kế cận tây nam và đông nam của nó, chẳng hạn:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}, \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}, \frac{1}{6} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12}.$$

Đó chính là công thức truy toán của tam giác Lép-nít.

Đối với tam giác này cũng có thể chỉ ra điều kiện biên giới; các số nằm dọc theo đường biên tây bắc ("đại lộ số không") là nghịch đảo với các số của dãy số tự nhiên. Điều kiện biên của tam giác Pát-xcan có tính chất hơi khác; ở đó mọi số nằm dọc cả theo biên tây-bắc ("Đại lộ số không") lẫn các số nằm dọc theo biên đông-bắc ("phố số không") đều bằng đơn vị. Trong trường hợp tam giác Pát-xcan, xuất phát từ các số nằm trên biên, ta có thể tính được tất cả các số còn lại bằng cách dùng phép cộng; còn trong trường hợp tam giác Lép-nít để làm điều đó cần dùng tính trừ. Trên hình 3.18 còn để lại những chỗ trống có thể dễ điền số vào bằng cách áp dụng công thức truy toán; chẳng hạn.

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{20}=\frac{1}{5} \text{ và } \frac{1}{7}-\frac{1}{8}=\frac{1}{56}.$$

Áp dụng điều kiện biên và công thức truy toán hãy viết thêm cho hình 3.18 có đủ đáy thứ tám.

56. Pát-xcan và Lép-nít. Hãy cố gắng phát hiện mối quan hệ giữa các số tương ứng trong tam giác Pát-xcan à tam giác Lép-nít, rồi sau đó hãy chứng minh tính chất đã phát hiện được.

57. Chứng minh rằng [(*)]

$$\frac{1}{1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\dots$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60}+\frac{1}{105}+\dots$$

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\frac{1}{60}+\frac{1}{140}+\frac{1}{280}+\dots$$

....

(Muốn vậy hãy xác định vị trí của các số đang xét trong tam giác điều hoà).

58. Hãy tìm tổng: $\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60}+\frac{1}{105}+\dots$ và hãy khái quát hoá kết quả tìm được. (Bạn có biết một bài toán nào đó tương tự không?).

59. Hãy tìm tổng của các chuỗi:

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\dots$$

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\frac{1}{4.5.6}+\dots$$

$$\frac{1}{1.2...(r-1)r}+\frac{1}{2.3...(r-1)r}+\frac{1}{3.4...(r-1)r}+\dots$$

PHẦN 4

Một số bài tập trong phần này liên quan đến bài tập 66 và một số bài tập khác liên quan đến bài tập 76.

60. *Chuỗi luỹ thừa*. Phân số thập phân 3,14159... biểu diễn số π thực chất là "một chuỗi vô hạn".

(*) Để không làm khó khăn cho những bạn đọc nào chưa nghiên cứu lí thuyết các chuỗi vô hạn một cách chặt chẽ (các giới hạn, tính hội tụ...) chúng tôi sẽ không chính xác hoá các chi tiết giải bài toán này và những bài toán tương tự trong những trang sau. Tuy nhiên những bạn đọc có trình độ cao hơn không nên bỏ qua những chi tiết đó (trong đa số các trường hợp đều không phức tạp) trong các chứng minh của mình.

$$3+1\left(\frac{1}{10}\right)+4\left(\frac{1}{10}\right)^2+1\left(\frac{1}{10}\right)^3+5\left(\frac{1}{10}\right)^4+9\left(\frac{1}{10}\right)^5+\ldots$$

Nếu thay $\frac{1}{10}$ bằng biến số x và dãy các chữ số: 3, 1, 4, 1, 5, 9,... bằng các hệ số không đổi tuỳ ý $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5,\ldots$ ta sẽ được một chuỗi luỹ thừa (hay chuỗi nguyên)

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots \qquad (1)$$

Ở đây ta không thể dừng lại trên vấn đề hội tụ của các chuỗi luỹ thừa và những vấn đề quan trọng khác liên quan tới nó; bởi vậy ta chỉ hạn chế trong các phép toán hình thức trên các chuỗi đó (xem chú thích bài tập 57). Nhân chuỗi luỹ thừa đã cho với c ta được chuỗi $ca_0 + ca_1x + ca_2x^2 + ca_3x^3 + \ldots$

Cộng chuỗi (1) với chuỗi

$$b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots \qquad (2)$$

ta được chuỗi: $(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + (a_3 + b_3)x^3 + \ldots$

và nhân các chuỗi (1) và (2) ta được chuỗi

$$(a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2)\, x^2 + \ldots$$

Hai chuỗi luỹ thừa (1) và (2) bằng nhau khi và chỉ khi

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ldots,\ a_n = b_n,\ldots$$

Ta quy ước coi đa thức như một chuỗi luỹ thừa mà vô số các hệ số của nó (về thực chất, hầu như tất cả, chỉ trừ một số hữu hạn các hệ số của nó) bằng không. Chẳng hạn, đa thức $3x - x_3$ có thể xem như trường hợp riêng của chuỗi (1) trong đó:

$$a_0 = 0,\ a_1 = 3,\ a_2 = 0,\ a_3 = -1 \text{ và } a_n = 0 \text{ với } n \geq 4.$$

Hãy tự kiểm tra lại xem các quy tắc của các phép toán trên các chuỗi đã thực hiện ở trên cũng đúng đối với cả các đa thức.

61. Hãy tính tích

$$(1 - x)\,(1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots).$$

62. Hãy tìm hệ số của x^n trong tích

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots)\,(1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots).$$

63. Chuỗi trong bài tập 61 có thể đưa đến ý nghĩ xét các chuỗi

$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots,$

$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots,$

$1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \ldots,$

$1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + \ldots$

Bạn có biết tổng của một chuỗi nào đó trong các chuỗi như vậy không?

Bạn không thể tìm được tổng của các chuỗi còn lại hay sao?

64. Hãy đưa ra một cách chứng minh khác kết quả của bài tập 38.

65. Hãy xét bảng

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & 1.1 & & & & & & & = & 1, \\
 & & & & 1.3 & - & 2.2 & + & 3.1 & & & & & = & 2, \\
 & & 1.5 & - & 2.4 & + & 3.4 & - & 4.2 & + & 5.1 & & & = & 3, \\
1.7 & - & 2.6 & + & 3.5 & - & 4.4 & + & 5.3 & - & 6.2 & + & 7.1 & = & 4.
\end{array}
$$

Dựa trên các ví dụ đó hãy thử phỏng đoán quy luật tổng quát, biểu diễn quy luật đó bằng những kí hiệu toán học thích hợp rồi chứng minh quy luật đó.

66. Công thức nhị thức đối với các số mũ phân và âm

Trong bức thư đề ngày 24 tháng 10 năm 1976 gửi bí thư Viện Hàn lâm khoa học hoàng gia Anh, Niu-tơn đã mô tả là ông đã phát minh ra công thức nhị thức (đối với trường hợp tổng quát) như thế nào; ông đã viết bức thư đó để trả lời câu chất vấn của Lép-nít về phương pháp chứng minh của ông (của Niu-tơn). Niu-tơn đã xét các diện tích của những hình thang cong xác định; ông đã chịu ảnh hưởng mạnh mẽ các ý niệm của Va-lit có liên quan đến các vấn đề nội suy và cuối cùng đi đến giả định rằng:

Khai triển:

$$(1+x)^a = 1 + \frac{a}{1}x + \frac{a(a-1)}{1.2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots$$

không những chỉ dùng đối với các giá trị nguyên dương của số mũ a mà còn dùng đối với cả các giá trị phân và âm nữa, tức là về thực chất, đúng đối với mọi giá trị bằng số của số mũ a. (*)

Niu-tơn đã không đưa ra những chứng minh hình thức cho giả định của mình; rất có thể là ông đã dựa trên những ví dụ và phép tương tự. Ta có thể nói rằng ông đã nghiên cứu vấn đề này "một cách thực nghiệm" và "quy nạp" như một nhà vật lí vậy: Để hiểu rõ hơn quan điểm của ông, ta hãy phục hồi lại một số bước đã làm cho Niu-tơn tin vào sự đúng đắn của giả định đã nêu ở trên và để cho ngắn gọn ta sẽ gọi là "giả định N".

Nếu a là một số nguyên không âm thì hệ số của x^{a+1} ở vế phải của chuỗi đang xét bằng không cùng với mọi hệ số tiếp theo (do sự có mặt của nhân tử không ở tử thức), tức là chuỗi bị đứt. Còn nếu a nhận các giá trị không thuộc dãy 0, 1, 2, 3… thì chuỗi không bị đứt đoạn mà kéo dài vô hạn. Chẳng hạn, khi $a = \frac{1}{2}$ chuỗi sẽ có dạng:

$$(a+x)^{1/2} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1}x + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{1.2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{1.2.3}x^3 + \ldots = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \ldots$$

(*) Trên mức độ phát triển của toán học hiện nay ta biết rằng cần phải đặt một số hạn chế đối với x. Sự đơn giản hoá này hoàn toàn tương ứng với quan điểm của Niu-tơn; trong thời đại của ông tính hội tụ của các chuỗi không được xác định một cách chặt chẽ; điều đó cũng thống nhất với nhận xét ở trên.

Niu-tơn có lẽ đã lo ngại vì số các số hạng không triệt tiêu ở đây nhiều vô hạn. Ông biết rõ là có sự tương tự (mà ông đã nhắc tới ở chỗ khác) giữa các chuỗi luỹ thừa và các phân số thập phân (xem bài tập 60). Ở đó những phân số thập phân này thì bị ngắt (ví dụ $\frac{1}{2}$ hay $\frac{3}{5}$) trong khi đó những phân số thập phân khác thì kéo dài vô tận (chẳng hạn $\frac{1}{3}$ hay $\frac{7}{11}$).

Nhưng liệu chuỗi ứng với biểu thức $(1 + x)^{1/2}$ có thật không? Để trả lời câu hỏi đó, Niu-tơn nhân chuỗi với chính nó; nếu chuỗi bằng $(1 + x)^{1/2}$ thì kết quả cần phải là

$$(1 + x)^{1/2} (1 + x)^{1/2} = 1 + x.$$

Để kiểm tra lại điều đó, hãy tính các hệ số của x, x^2, x^3 và x^4 trong tích của các chuỗi (bài tập 60).

67. Hãy tính các hệ số của x, x^2, x^3, x^4 trong biểu thức đối với bình phương của chuỗi.

$$1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}+\ldots$$

mà theo giả định N thì đó là khai triển của nhị thức $(1 + x)\frac{1}{3}$. Kết quả phải trùng với khai triển (viết theo giả định N) đối với nhị thức $(1 + x)\frac{2}{3}$. Hãy kiểm tra điều đó!

68. (Tiếp theo). Hãy tính các hệ số của x, x^2, x^3 và x^4 trong biểu thức đối với lập phương của chuỗi đang xét. Hãy dự đoán xem kết quả phải như thế nào và hãy kiểm tra lại giả định của mình.

69. Theo giả định N hãy khai triển $(1 + x)^{-1}$ thành chuỗi. Hãy nhận định kết quả thu được.

70. Mở rộng miền xác định của kí hiệu C_n^r.

Trong §6 ta đã xác định C_n^r đối với các số n và r nguyên không âm thoả mãn bất đẳng thức $r \le n$. Bây giờ ta hãy mở rộng miền xác định của n (chứ không phải của r; hãy so sánh với bài tập 12) và đặt

$$C_x^0 = 1,\ C_x^r = \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-r+1)}{1.2.3\ldots r}$$

ở đây $r = 1, 2, 3, \ldots$, còn x là một số tuỳ ý. Từ định nghĩa đó rút ra rằng

(I) C_x^r là đa thức bậc của x, ở đây $r = 0$ 1, 2, 3,...;

(II) $C_x^r = (-1)^r\, C_r^r - 1 - x$;

(III) nếu n và r là những số nguyên dương không âm và $r > n$ thì $C_n^r = 0$;

(IV) giả định N có thể viết như sau:

$$(1+x)^0 = C_a^0 + C_a^1 x + C_a^2 x^2 + \ldots + C_a^n x^n + \ldots$$

Các tính chất (I), (III) và (IV) là hiển nhiên; hãy chứng minh (II).

71. Hãy chứng minh rằng nếu x và n là những số nguyên dương thì biểu thức:

$$\frac{x^2(x^2-1)(x^2-4)\ldots[x^2-(n-1)^2]}{(2n-1)!\,n}$$

cũng là một số nguyên.

72. Hãy khái quát hoá bài tập 69 sau khi đã kiểm tra lại rằng tất cả các kết quả của bài tập 63 đều phù hợp với giả định N.

73. Hãy áp dụng lại một lần nữa thủ thuật mà ta đã sử dụng ba lần (ở §9, ở bài tập 37 và ở bài tập 64) với giả thiết rằng giả định N là đúng, hãy tính bằng hai cách hệ số của x^r trong khai triển.

$$(1+x)^a(1+x)^b = (1+x)^{a+b}.$$

74. Hãy thử đánh giá kết quả thu được trong bài tập 73; có thể coi nó đã được chứng minh rồi hay không? Có phải đã được chứng minh một phần không? Còn những cách nào khác để chứng minh nó hay không? Nếu coi kết quả đó là cho trước thì bạn có thể chứng minh được giả định N không? Hãy chứng minh dù chỉ một phần của nó?

75. Bạn không cảm thấy là đã quen thuộc các hệ số của khai triển

$$(1-4x)^{-1/2} = 1 + 2x + 6x^2 + 20x^3 + \ldots?$$

Hãy viết số hạng tổng quát của khai triển đó bằng cách sử dụng các kí hiệu mà bạn quen thuộc (tất nhiên, cần chú ý là tất cả các hệ số đều là các số nguyên).

76. Phương pháp các hệ số bất định. Hãy khai triển tỉ số của hai chuỗi luỹ thừa thành một chuỗi luỹ thừa.

Ta cần biểu diễn dưới dạng chuỗi luỹ thừa tỉ số $\dfrac{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n + \ldots}{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots}$.

Ở đây các hệ số $a_0, a_1, a_2\ldots$ và $b_0, b_1, b_2\ldots$ là những số cho trước, khi đó ta sẽ giả thiết rằng $a_0 \neq 0$ (giả thiết đó, không nói đến trong phát biểu ngắn gọn ban đầu lại là một giả thiết quan trọng).

Hãy viết chuỗi luỹ thừa phải tìm dưới dạng tường minh

$$\frac{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots}{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots} = u_0 + u_1x + u_2x^2 + \ldots$$

Các hệ số $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$ ở đây mới được viết ra một cách hình thức, chúng còn chưa được xác định (từ đó có cái tên gọi của phương pháp mà ta định áp dụng) và ta chỉ hi vọng tìm được chúng về sau; chính đó là bài toán của ta, bài toán trong đó ẩn số là các hệ số u_0, $u_1, u_2, \ldots$ (bây giờ thì ta thấy rằng bài toán của ta có vô số ẩn số).

Hệ thức ràng buộc ba chuỗi luỹ thừa của ta (trong đó hai chuỗi cho trước, còn chuỗi thứ ba phải tìm) có thể viết lại dưới dạng.

$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)\ (u_0 + u_1x + u_2x^2 + \dots) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots;$

bây giờ tình huống trước mắt ta trở nên sáng tỏ và quen thuộc hơn (xem bài tập 60). So sánh các hệ số của các luỹ thừa như nhau của x trong cả hai vế đẳng thức, ta được hệ thống phương trình

$$
\begin{aligned}
&a_0u_0 &&= b_0,\\
&a_1u_0 + a_0u_1 &&= b_1,\\
&a_2u_0 + a_1u_1 + a_0u_2 &&= b_2,\\
&a_3u_0 + a_2u_1 + a_1u_2 + a_0u_3 &&= b_3,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

Hệ thống có tính chất truy toán này có thể giải bằng phương pháp mà ta đã quen thuộc, cụ thể là bằng phương pháp đệ quy. Ẩn số đầu tiên ta tìm từ phương trình thứ nhất; nói chung, sau khi tìm được các ẩn số $u_0, u_1, \dots, u_{n-2}$ và u_{n-1} ta tìm ẩn số tiếp theo sau chúng là u_n từ phương trình tiếp theo chưa được sử dụng.

Hãy biểu thị u_0, u_1, u_2 và u_3 theo a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2 và b_3.

(Cách giải đó có thể là một cách tốt để ta giải thích một phương pháp mới. Hãy chú ý đến các bước điển hình mà ta đã tiến hành:

Đưa vào các ẩn số là các hệ số của chuỗi luỹ thừa;

Thiết lập hệ thống phương trình bằng cách so sánh các hệ số của các luỹ thừa như nhau trong cả hai vế của một hệ thức nào đó ràng buộc các chuỗi luỹ thừa;

Tính các ẩn số bằng truy toán.

Các bước đó đặc trưng cho phương pháp được gọi là "phương pháp các hệ số bất định" mà ta sẽ áp dụng đối với một số hệ thống phương trình đáng chú ý nhất và giải được bằng phương pháp đệ quy).

77. Hãy xét tích của các luỹ thừa $a_i^{\alpha_i}\ a_j^{\alpha_j}\ a_k^{\alpha_k}\ b_m^{\beta_m}\ b_n^{\beta_n}$, ta gọi:

$\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k + \beta_m + \beta_n$ là bậc của tích đó;

$\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k$ là bậc của tích đối với nhóm a;

$\beta_n + \beta_m$ là bậc của tích đối với nhóm b;

$i\alpha_i + j\alpha_j + k\alpha_k + n\beta_n + m\beta_m$ là trọng số của tích.

Cũng dễ hiểu rằng các định nghĩa đó vẫn giữ nguyên hiệu lực với một số bất kì các chữ a và b (mà không chỉ với ba chữ cùng dạng và hai chữ dạng khác).

Hãy khảo sát các biểu thức đối với các hệ số u_0, u_1, u_2 và u_3 có được trong bài tập 76 và hãy giải thích tính quy luật mà bạn đã nhận ra.

78. Hãy khai triển ra chuỗi luỹ thừa tỉ số $\dfrac{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + \dots}{1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots}$.

(kết quả rất đơn giản; bạn không thể sử dụng kết quả đó chăng?)

79. Hãy khai triển ra chuỗi luỹ thừa tỉ số $\frac{b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n}{1-x}$.

(kết quả cũng đơn giản, bạn không thể sử dụng kết quả đó chăng?)

80. Hãy khai triển ra chuỗi luỹ thừa tỉ số

$$\frac{1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{15}+\frac{x^3}{105}+...+\frac{x^n}{3.5.7...(2n+1)}+...}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{48}+...+\frac{x^n}{2.4.6...2n}+...}.$$

(Hãy tính một vài số hạng và hãy thử đoán xem biểu thức đối với số hạng tổng quát phải như thế nào?).

81. Nghịch đảo của chuỗi luỹ thừa. Cho trước khai triển ra chuỗi luỹ thừa của mọi hàm số, hãy tìm khai triển ra chuỗi luỹ thừa của hàm số ngược của nó.

Nói một cách khác, cho khai triển của x theo các luỹ thừa của y, phải tìm khai triển của y theo các luỹ thừa của x. Đúng hơn ta giả thiết rằng

$x = a_1y + a_2y^2 + \ldots + a_ny^n + \ldots;$

với $a_1 \neq 0$, hãy tìm khai triển

$y = u_1x + u_2x^2 + \ldots + u_nx^n + \ldots$

Ta hãy sử dụng thủ thuật đã dùng ở bài tập 76. Trong khai triển cho trước của x theo các luỹ thừa của y ta thay bằng biểu thức (phải tìm) của nó dưới dạng chuỗi luỹ thừa.

$x = a_1(u_1x + u_2x^2 + u_3x^3 + \ldots) + a_2(u_1^2x_3 + \ldots) + a_3(u_1^3x^3 + \ldots) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

So sánh các hệ số của các luỹ thừa như nhau của x trong cả hai vế của hệ thức đó, ta được hệ thống phương trình đối với các ẩn số $u_1, u_2, u_3\ldots$

$1 = a_1u_1,$

$0 = a_1u_2 + a_2u_1^2,$

$0 = a_1u_3 + 2a_2u_1u_2 + a^3u_1^3,$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Hệ thống tìm được có tính chất truy toán (mặc dù, đáng tiếc là không tuyến tính).

Hãy biểu thị u_1, u_2, u_3, u_4 và u_5 theo a_1, a_2, a_3, a_4 và a_5.

82. Hãy khảo sát bậc và trọng số của các biểu thức là đáp số của bài tập 81.

83. Cho $x = y + y^2 + y^3 + \ldots + y^n + \ldots,$

hãy khai triển y theo các luỹ thừa của x.

(Kết quả khá đơn giản, bạn không thể sử dụng kết quả đó chăng?)

84. Cho $4x = 2y - 3y^2 + 4y^3 - 5y^4 + \ldots,$

hãy khai triển y theo các luỹ thừa của x. (Hãy thử đoán xem biểu thức của số hạng tổng quát phải như thế nào, rồi sau đó sử dụng kết quả này).

85. Cho $x = y + ay^2$

hãy khai triển y theo các luỹ thừa của x (kết quả có được có thể sử dụng để làm sáng tỏ một số chi tiết của vấn đề tổng quát đã xét trong bài tập 81).

86. Cho $x = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{24} + \ldots + \frac{y^n}{n!} + \ldots,$

hãy khai triển y theo luỹ thừa của x.

87. Phương trình vi phân. Hãy khai triển theo các luỹ thừa của x hàm số y thoả mãn phương trình vi phân $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ với điều kiện ban đầu $y = 1$ khi $x = 0$;

Dựa vào phương pháp đã dùng ở bài tập 76, ta đặt $y = u_0 + u_1x + u_2x^2 + u_3x^3 + \ldots$

ở đây các hệ số u_0, u_1, $u_2\ldots$ ta còn phải tìm. Thay biểu thức đó của y vào trong phương trình vi phân ta sẽ được

$$u_1 + 2u_2x + 3u_3x^2 + 4u_4x^3 = u_0^2 + 2u_0u_1x + (2u_0u_2 + u_1^2 + 1)x^2 + \ldots$$

So sánh các hệ số của các luỹ thừa như nhau trong cả hai vế của đẳng thức đó ta được hệ thống phương trình sau đây:

$$u_1 = u_0^2,$$

$$2u_2 = 2u_0u_1,$$

$$3u_3 = 2u_0u_2 + u_1^2 + 1,$$

$$4u_4 = 2u_0u_3 + 2u_1u_2,\ldots$$

Bởi vì, theo điều kiện ban đầu $u_0 = 1$

nên từ hệ thống đó có thể tìm được u_1, u_2, u_3,... bằng truy toán. Hãy tìm giá trị bằng số của u_1, u_2, u_3 và u_4.

(Giải phương trình vi phân bằng phương pháp các hệ số bất định thể hiện trên ví dụ này có ý nghĩa to lớn về cả mặt lí thuyết lẫn thực hành).

88. (Tiếp theo). Hãy chứng minh rằng $u_n > 1$ với $n \geq 3$.

89. Hãy khai triển theo các luỹ thừa của x hàm số y thoả mãn phương trình vi phân.

$\frac{d^2y}{dx^2} = -y$ và các điều kiện ban đầu $y = 1$; $\frac{dy}{dx} = 0$ với $x = 0$.

90. Tìm hệ số của x^{100} trong khai triển theo các luỹ thừa của x hàm số.

$$(1-x)^{-1}(1-x^5)^{-1}(1-x^{10})^{-1}(1-x^{25})^{-1}(1-x^{50})^{-1}.$$

Nghi ngờ rằng để giải bài toán này, cần phải xem nó như một trường hợp đặc biệt của một bài toán tổng quát hơn, rồi sau đó tìm được lối và phương pháp để tính hệ số tổng quát (tức là hệ số của x^n) của khai triển đang xét. Có lẽ cũng là hợp lí nếu khảo sát những bài toán tương tự nhưng dễ hơn rút ra từ bài toán vừa nêu ra. Một vài ý nghĩ theo phương pháp đó, cuối cùng có thể gợi ra một chương trình sau đây; cần phải đưa vào một số chuỗi luỹ thừa có các hệ số bất định.

Ta viết:

$(1-x)^{-1} = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + \ldots,$

$(1-x)^{-1}(1-x^5)^{-1} = B_0 + B_1x + B_2x^2 + B_3x^3 + \ldots,$

$(1-x)^{-1}(1-x^5)^{-1}(1-x^{10})^{-1} = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots,$

$(1-x)^{-1}(1-x^5)^{-1}(1-x^{10})^{-1}(1-x^{25})^{-1} = D_0 + D_1x + \ldots,$

và sau cùng

$(1-x)^{-1}(1-x^5)^{-1}(1-x^{10})^{-1}(1-x^{25})^{-1}(1-x^{50})^{-1} = E_0 + E_1x + E_2x^2 + \ldots + E_nx^n + \ldots$

Với những kí hiệu đã được thừa nhận bài toán dẫn đến việc tìm E_{100}.

Ta đã đưa vào một tập hợp vô hạn các ẩn số mới thay cho ẩn số ban đầu duy nhất của ta là E_{100}; bây giờ ta phải tìm A_n, B_n, C_n, D_n và E_n đối với $n = 0, 1, 2, 3,\ldots$ Tuy vậy các giá trị của một số các ẩn số đó ta đã biết rõ hoặc đã hiển nhiên:

$A_0 = A_1 = A_2 = \ldots = A_n = \ldots = 1,$

$B_0 = C_0 = D_0 = E_0 = 1.$

Hơn nữa, các ẩn số ta đưa vào liên hệ với nhau bằng hệ thức

$A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots = (B_0 + B_1x + B_2x^2 + \ldots)(1-x^5),$

từ đó, so sánh các hệ số của x^n ta ta được $A_n = B_n - B_{n-5}$.

Hãy tìm các hệ thức tương tự và những sự phụ thuộc trung gian ràng buộc đại lượng phải tìm E_{100} với các đại lượng đã tìm được trước. Cuối cùng bạn sẽ nhận được giá trị bằng số của E_{100}.

91. Hãy tìm $y^{(n)}$ là đạo hàm bậc n của hàm số $y = x^{-1}\ln x$. Lấy vị phân trực tiếp và làm những phép biến đổi đại số ta có:

$y' = -x^{-2}\ln x + x^{-2},$

$y'' = 2x^{-3}\ln x - 3x^{-3},$

$y''' = -6x^{-4}\ln x + 11x^{-4},$

xuất phát từ các ví dụ đó (hay từ một số lớn ví dụ nữa) ta có thể giả định rằng đạo hàm bậc n phải tìm có dạng $y^{(n)} = (-1)^n n!\, x^{-n-1}\ln x + (-1)^{n-1} c_n x^{-n-1}$, trong đó c_n là một số nguyên phụ thuộc vào n (nhưng không phụ thuộc vào x). Hãy chứng minh điều đó và hãy biểu thị c_n theo n.

92. Hãy tìm biểu thức ngắn gọn đối với tổng của chuỗi $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$.

(Bạn có biết một bài toán nào giống bài toán đó không? Bạn có thể sử dụng kết quả của bài toán đó hay phương pháp giải nó không?).

93. Hãy tìm biểu thức ngắn gọn đối với tổng của chuỗi $1 + 4x + 9x^2 + \ldots + n^2x^{n-1}$.

(Bạn có biết một bài toán nào giống bài toán đó không? Bạn có thể sử dụng kết quả của bài toán đó hay phương pháp giải nó không?).

94. (Tiếp theo). Hãy khái quát hoá kết quả thu được.

95. Nhờ phép tính vi phân có thể còn một cách giải bài tập 92, mà về một số mặt nào đó cách giải như vậy đơn giản hơn. Hãy tìm cách giải đó.

96. Ta nhận xét rằng:

$1.1 + 2.1 = 3,$

$1.1 + 2.2 + 3.1 = 8,$

$1.1 + 2.3 + 3.3 + 4.1 = 20,$

$1.1 + 2.4 + 3.6 + 4.4 + 5.1 = 48,$

$1.1 + 2.5 + 3.10 + 4.10 + 5.5 + 6.1 = 112.$

Dựa trên các ví dụ đó hãy phỏng đoán quy luật tổng quát, hãy biểu diễn quy luật đó bằng những kí hiệu toán học thích hợp; hãy chứng minh quy luật đó.

97. Cho hệ thức $a_{n+1} = a_n \dfrac{n+\alpha}{n+1+\beta}$, ở đây $n = 1, 2, 3$ và $\alpha \neq \beta$; chứng minh rằng:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \frac{a_n(n+\alpha) - a_1(1+\beta)}{\alpha - \beta}.$$

98. Tìm biểu thức ngắn gọn của tổng

$$\frac{p}{q} + \frac{p}{q}\frac{p+1}{q+1} + \frac{p}{q}\frac{p+1}{q+1}\frac{p+2}{q+2} + \ldots + \frac{p}{q}\frac{p+1}{q+1}\frac{p+2}{q+2}\ldots\frac{p+n-1}{q+n-1}.$$

99. *Về số π.* Ta hãy lấy đường tròn bán kính đơn vị ($r = 1$); ngoại tiếp đường tròn và nội tiếp đường tròn đó những đa giác đều n cạnh, ta kí hiệu chu vi của chúng là P_n (đối với đa giác ngoại tiếp) và P_n (đối với đa giác nội tiếp).

Ta đưa vào những kí hiệu rút gọn

$$\frac{a+b}{2} = A(a,b), \quad \sqrt{ab} = G(a, b), \quad \frac{2ab}{a+b} = H(a, b)$$

(đối với trung bình cộng, trung bình nhân và trung bình điều hoà của các số a và b).

1) Tìm P_4, P_6, P_6.

2) Chứng minh rằng

$P_{2n} = H(P_n, p_n)$, $p_{2n} = G(p_n, P_{2n})$

(Như vậy, xuất phát từ P_6, p_6 bằng truy toán có thể tính được dãy số

$P_6, p_6; P_{12}, p_{12}; P_{24}, p_{24}; P_{48}, p_{48}; \ldots$

xa tuỳ ý và bao số π giữa hai số giới hạn giá trị của nó; hiệu của hai số đó bé tuỳ ý. Ac-si-mét đã tính được mười số hạng đầu tiên của dãy đó, tức là đã đi đến một đa giác đều có 96 cạnh và đã tìm thấy $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$.

100. *Những bài toán khác.* Hãy nghĩ ra những bài toán khác tương tự với những bài toán đã gặp trong chương này, nhưng đồng thời lại khác các bài toán đó, trước hết là những bài toán mà tự bạn có thể giải được.

CHƯƠNG 4. PHƯƠNG PHÁP CHỒNG

§1. PHÉP NỘI SUY

Trước khi phát biểu dứt khoát bài toán dưới đây, ta hãy nêu mấy nhận xét sơ bộ.

1. Giả sử, cho n giá trị khác nhau của hoành độ các điểm: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, và n giá trị tương ứng của tung độ: $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ hay có thể nói khác đi, cho n điểm khác nhau trên một mặt phẳng: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots, (x_n, y_n)$.

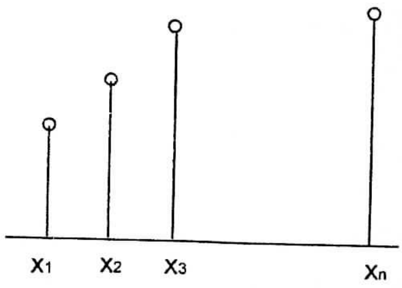
Cần tìm hàm $f(x)$ mà giá trị của nó tại những giá trị đã cho của hoành độ x đúng bằng các tung độ y tương ứng:

$$f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, f(x_3) = y_3, \ldots, f(x_n) = y_n.$$

Nói cách khác ta phải tìm một đường có phương trình $y = f(x)$, đi qua n điểm đã cho (hình 4.1). Đó chính là một bài toán nội suy(*).

Ta hãy thử tìm hiểu xem đằng sau bài toán ấy ẩn dấu điều gì; và việc nghiên cứu này sẽ giúp nâng cao hứng thú của ta đối với bài toán và nhờ đó, tăng thêm khả năng giải bài toán.

2. Bài toán nội suy có thể xảy ra mỗi khi cần phải xét một đại lượng y phụ thuộc vào một đại lượng khác x. Chẳng hạn: giả sử x là nhiệt độ và y là độ dài của một thanh đồng chất (giả thiết áp suất không thay đổi). Ứng với mỗi giá trị của nhiệt độ x là một độ dài nhất định y của thanh; ta ngầm hiểu như vậy khi nói y phụ thuộc vào x, hay y là hàm của x hoặc khi viết $y = f(x)$. Nhà vật lí, khi nghiên cứu quan hệ phụ thuộc của y vào x bằng thực nghiệm, sẽ cho tác dụng những nhiệt độ khác nhau.



Hình 4.1. Phép nội suy

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$$

lên thanh đó và ghi lại các giá trị tương ứng

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$$

bằng cách đo độ dài của thanh ở mỗi nhiệt độ. Dĩ nhiên, nhà vật lí có thể còn quan tâm cả đến độ dài y ở một giá trị x nào đó của nhiệt độ, tức là ông ta muốn dựa trên n lần quan sát mà xác định được hàm $y = f(x)$ không phải một cách riêng phần, bộ phận, mà một

(*) Nội suy có nghĩa là khôi phục các giá trị trung gian của hàm, dựa theo một loạt những giá trị đã biết của hàm đó.

cách toàn phần, đầy đủ, cho toàn bộ miền biến thiên của biến số độc lập x; như vậy là ông ta đã đặt ra một bài toán nội suy.

3. Cần "mở ngoặc" chú thích rằng, trong thực tế, bài toán đặt ra trước nhà vật lí còn phức tạp hơn như thế. Các giá trị x_1, y_1; x_2, y_2;...; x_n, y_n mà ông ta sử dụng không phải là những giá trị "chính xác" hay "đúng sự thực" của các đại lượng đo, mà có bị sai lệch đi do ảnh hưởng của những sai số không thể tránh được khi đo lường. Bởi vậy, thậm chí không nên đòi hỏi đường cần tìm phải đi qua đúng các điểm đã cho, mà có thể hạn chế ở yêu cầu là: đường đó đi qua đủ gần các điểm đã cho.

Cần chú ý thêm rằng, ở đây phải phân biệt hai trường hợp:

1) Trường hợp giá trị x chưa được khảo sát của hoành độ (mà nhà vật lí đang muốn tìm giá trị tung độ tương ứng) nằm trong khoảng tạo thành bởi các cực trị của hoành độ xác định được trong các cuộc thực nghiệm của ông ta (x_1 và x_n, xem hình 4.1).

2) Trường hợp giá trị này nằm *ngoài* khoảng đó; trường hợp thứ nhất, người ta thường gọi là *nội suy*, trường hợp thứ hai, gọi là *ngoại suy*. (Nói chung, phép nội suy được coi là đáng tin cậy hơn phép ngoại suy).

Song chúng ta hãy gác lại một bên sự khác biệt đó, cũng như những chi tiết khác thuộc về vấn đề này, chúng ta "đóng ngoặc" lại và trở về những kết luận đề xuất, trình bày trong các m.1 và m.2.

4. Bài toán đặt ra trong m.1 hết sức là mơ hồ, thiếu xác định, bởi vì có vô số đường muôn hình muôn vẻ đi qua n điểm cho trước, n giá trị của y tìm được tự chúng đưa đem lại cho ta căn cứ để thừa nhận một đường nào đó là ưu việt hơn tất cả các đường kia. Nếu nhà vật lí quyết định chấp nhận một đường nào đó, thì ông ta phải có thêm những căn cứ nào đó ngoài kết quả của n lần quan sát của mình. Vậy thì, những căn cứ đó, hay những luận cứ đó là gì?

Thành thử, ta thấy, bài toán nội suy làm nảy sinh (và nhờ đó, trở nên lí thú hơn nhiều!) một vấn đề tổng quát hơn; phải lấy cái gì làm cơ sở, hay phải dùng cái gì làm luận cứ để diễn đạt những số liệu quan sát và những yêu cầu mơ hồ, hiểu ngầm của bài toán, dưới hình thức toán học? Đó là một vấn đề triết học cực kì quan trọng có liên quan với bài toán nội suy; song, bởi lẽ rằng, nói chung đối với những vấn đề triết học quan trọng, rất ít có khả năng tìm được những lời giải đáp thoả đáng, cho nên ta hãy quay sang một dạng thức khác của bài toán nội suy.

5. Một cách tự nhiên, ta sẽ biến đổi được cách đặt bài toán trong m.1 nếu ta đòi hỏi đường đi qua n điểm đã cho phải là đường đơn giản nhất. Song thay đổi cách đặt bài toán như vậy vẫn không làm cho bài toán trở nên xác định và rõ ràng, bởi vì rất khó đánh giá khách quan, định lượng, cho "tính đơn giản"; sự phán đoán của ta về tính đơn giản tuỳ thuộc vào thị hiếu cá nhân vào các quan điểm của ta vào những yêu cầu kín đáo ngụ ý trong bài toán, hay, cuối cùng vào thiên hướng tư duy của ta.

Tuy vậy, cũng có thể gán cho thuật ngữ "tính đơn giản" trong bài toán của ta một định nghĩa hoàn toàn có thể chấp nhận được để đi tới một cách phát biểu rõ ràng và có

ích. Trước hết, ta quy ước coi phép cộng, phép trừ và phép nhân là những phép (tính) *đơn giản nhất*. Tiếp đó, sẽ coi một hàm là *đơn giản nhất* nếu các giá trị của nó tìm được bằng những phép đơn giản nhất. Với hai quy ước đó, ta sẽ phải coi *các đa thức*, tức là các biểu thức có dạng:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

là những hàm đơn giản nhất (nếu $a_n \neq 0$ thì đa thức trên có *bậc n*). Một khi biết số trị của các hệ số $a_0, a_1, \ldots, a_n$ trong đa thức, ta có thể tìm được giá trị của đa thức ứng với bất kì giá trị nào của biến x nhờ ba phép tính đơn giản nhất.

Cuối cùng, nếu có hai đa thức khác bậc nhau, thì ta quy ước coi đa thức nào *bậc thấp hơn* là đa thức đơn giản hơn. Nếu chấp nhận thêm quy ước này nữa, thì bài toán vạch đường đơn giản nhất của n điểm trở nên hoàn toàn xác định và có thể giải được (bài toán này gọi là bài toán *nội suy đa thức* hay nội suy bằng đa thức); bài toán phát biểu như sau:

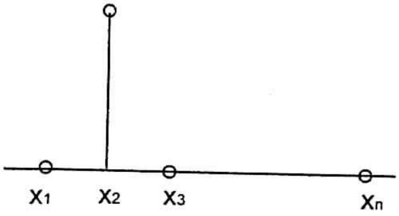
Giả sử cho n số (khác nhau) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ và n số tương ứng với chúng $y_1, y_2, \ldots y_n$; phải tìm ra một đa thức f(x) có bậc thấp nhất, thoả mãn n điều kiện.

$f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, \ldots, f(x_n) = y_n$.

§2. MỘT SỐ TRƯỜNG HỢP RIÊNG

Nếu không tìm được một cách xử lí nào khác đối với bài toán nêu trên thì có thể *thay đổi các dữ kiện đi*. Chẳng hạn, ta có thể cố định một tung độ và làm triệt tiêu các tung độ kia; bằng cách đó ta có thể đi tới một trường hợp riêng của bài toán dễ xử lí hơn trường hợp tổng quát.

Thay đổi các giá trị đã cho của hoành độ thì chẳng có lợi ích gì cho ta, bởi vì ở đây bất kì n số khác nhau nào $x_2, x_2, x_3 \ldots, x_n$ cũng đều thích hợp cả nhưng ta sẽ lựa chọn một hệ thống giá trị tung độ riêng, càng đơn giản càng tốt, chẳng hạn:



Hình 4.2. Một trường hợp riêng

0, 1, 0,… 0,

(Tất cả *các* tung độ đều bằng không, trừ một tung độ tương ứng với hoành độ x_2, xem hình 4.2).

Từ các tính chất quen thuộc của đa thức, ta suy ra rằng một đa thức triệt tiêu tại $n - 1$ điểm khác nhau, tức là có $n - 1$ nghiệm khác nhau $x_1. x_3. x_4 \ldots. x_n$ phải chia hết cho mỗi hiệu trong $n - 1$ hiệu sau đây : $x - x_1, x - x_3, x - x_4 \ldots, x - x_n$, cho nên đa thức này cũng phải chia hết cho tích của $n - 1$ hiệu đó và do đó bậc của nó không thể chấp nhận thấp hơn $n - 1$. Nếu bậc của đa thức của giá trị nhỏ nhất trên lí thuyết là $n - 1$ đó, thì đa thức phải có dạng $f(x) = C(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)\ldots(x - x_n)$, trong đó C là hằng số.

Thử hỏi, ta đã sử dụng hết tất cả các dữ kiện chưa? Chưa, ta chưa sử dụng hết các dữ kiện; còn cần phải tính giá trị 1 của tung độ tương ứng với giá trị x_2 của hoành độ:

$f(x_2) = C(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)\ldots(x_2 - x_n) = 1,$

Từ đẳng thức này, ta tính được C, rồi thay giá trị đó vào biểu thức của $f(x)$, ta được

$$f(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)\ldots(x - \overline{x}_n)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)\ldots(x_2 - x_n)}.$$

Đương nhiên, đa thức $f(x)$ sẽ có những giá trị mong muốn ứng với tất cả các giá trị đã cho $x_1, x_2, \ldots x_n$ của hoành độ. Như vậy là ta giải được bài toán nội suy bằng đa thức trong một trường hợp riêng, là trường hợp các tung độ được lựa chọn theo một cách đặc biệt.

§3. GIẢI BÀI TOÁN TỔNG QUÁT BẰNG CÁCH TỔ HỢP CÁC LỜI GIẢI RIÊNG

Thật là may mắn, chúng ta tách ra được một trường hợp riêng, đặc biệt thuận lợi. Để củng cố "thành tích" đó, ta phải gắng vận dụng kết quả đạt được.

Thì ra, nếu biến đổi một chút lời giải vừa tìm được, sẽ có thể bao quát được một trường hợp riêng rộng hơn ít nhiều: tương ứng với các giá trị đã cho $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ của hoành độ, ta đặt những giá trị $0, y_2, 0, \ldots, 0$ của tung độ. Nhân biểu thức thu được trong §2 với thừa số hiển nhiên y_2, ta sẽ được một đa thức có các giá trị đó:

$$y_2 = \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)\ldots(x - x_n)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)\ldots(x_2 - x_n)}.$$

Trong biểu thức này; giá trị x_2 của hoành độ giữ một vai trò đặc biệt, khác với vai trò của các giá trị kia của hoành độ. Thế nhưng, giá trị x_2 không hề có ưu thế gì đặc biệt so với các giá trị khác, cho nên ta có thể dành vai trò đặc biệt này cho bất kì giá trị khác nào của hoành độ. Như vậy, nếu ứng với các hoành độ $x_1, x_2, x_2, x_3, \ldots, x_n$ ta đặt các giá trị y ghi tại bất kì một dòng nào tiếp sau:

$$\begin{array}{l} y_1, 0, 0, \ldots, 0, \\ 0, y_2, 0, \ldots, 0, \\ 0, 0, y_3 \ldots, 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0, 0, 0, \ldots, y_n. \end{array}$$

thì biểu thức của đa thức bậc $(n - 1)$, mà ứng với giá trị tương ứng của hoành độ sẽ nhận những giá trị ghi trong dòng giá trị mà ta đã chọn, cũng sẽ tương tự như biểu thức đã viết ở trên.

Như vậy, ta đã tìm được lời giải bài toán đang xét đối với những trường hợp riêng khác nhau của nó. Thử hỏi, liệu ta có thể kết hợp các lời giải đó sao cho từ tổ hợp các trường hợp

riêng có thể suy ra được lời giải bài toán trong trường hợp tổng quát hay không? Dĩ nhiên là có thể được; muốn thế, chỉ việc cộng n biểu thức vừa viết ở trên với nhau:

$$f(x) = y_1 \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)...(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)...(x_1-x_n)} + y_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)...(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)...(x_2-x_n)} +$$
$$+ y_3 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)...(x-x_n)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)...(x_3-x_n)} + \cdots\cdots$$
$$+ y_n \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)...(x-x_{n-1})}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)...(x_n-x_{n-1})}.$$

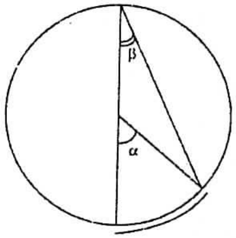
kết quả là ta được một đa thức có bậc không vượt quá $n - 1$ và thoả mãn các điều kiện $f(x_i) = y_i$ với $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ như có thể thấy ngay tức khắc qua bản thân cấu trúc của biểu thức đa thức này.

(Bạn có còn thắc mắc gì không?)

§4. PHƯƠNG PHÁP CHỒNG

Lời giải bài toán nội suy mà ta vừa tìm hiểu ở trên là của La-grăn-giơ; lời giải nào cho phép vạch ra một phương pháp tổng quát rất có triển vọng. *Phương pháp này, trước đây bạn đã từng gặp chưa?*

1. Có lẽ bạn đọc cũng đã biết (những suy luận ở trên cũng có thể gợi bạn đọc nhớ lại) một cách chứng minh thông thường của một định lí rất quen thuộc trong hình học phẳng, là "góc ở tâm gấp đôi góc nội tiếp dựa trên cùng một đáy, tức là chắn cùng một cung" (trên các hình 4.3 và 4.4, cung này được tách biệt ra bằng một đường kép).



Hình 4.3. Một trường hợp riêng

Cách chứng minh định lí này dựa trên hai nhận xét và được tiến hành bằng hai cách.

2. Ta hãy bắt đầu bằng một *trường hợp riêng*, thuận lợi hơn. Nếu một trong hai cạnh của góc nội tiếp trùng với đường kính (xem hình 4.3) thì hiển nhiên là góc ở tâm α bằng tổng hai góc không kề với nó của tam giác cân, mà một trong hai góc bằng nhau đó chính là góc nội tiếp β của ta. Như vậy, hệ thức cần tìm $\alpha = 2\beta$ đã được chứng minh cho trường hợp riêng vẽ trên hình 4.3.

3. Bây giờ, giả sử ta không được trường hợp thuận lợi vẽ trên hình 4.3. Lúc đó qua đỉnh của góc nội tiếp, có thể thấy bằng cách vạch một đường kính (trên hình 4.4 vẽ bằng nét đứt) và cấu hình mà ta vừa xét ở trên xuất hiện hai lần. Giả sử các hệ thức

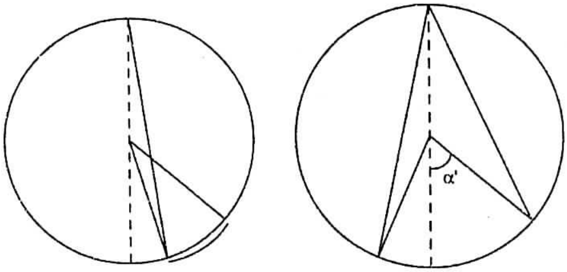
$$\alpha' = 2\beta', \quad \alpha'' = 2\beta''$$

ứng với cấu hình này (suy ra được từ các suy luận trong m.2). Góc ở tâm α và góc nội tiếp β xét trong định lí này có thể biểu thị dưới dạng một tổng hay một hiệu của hai

góc khác (tuỳ theo, đó là trường hợp nào trong hai trường hợp ở hình 4.4. Định lí này có thể biểu thị dưới dạng một tổng hay một hiệu của hai góc:

$$\alpha = \alpha' + \alpha'', \quad \beta = \beta' + \beta''$$

hay $$\alpha = \alpha' - \alpha'', \quad \beta = \beta' - \beta''.$$



Hình 4.4. Trường hợp tổng quát

Từ đó, đem cộng hay trừ hai đẳng thức vừa tìm được ở trên, ta sẽ được.

$\alpha' + \alpha'' = 2(\beta' + \beta'')$ hay $\alpha' - \alpha'' = 2(\beta' - \beta'')$.

Như vậy là ta đã chứng minh được định lí $a = 2b$ cho trường hợp hoàn toàn tổng quát.

4. Bây giờ, ta thử so sánh hai bài toán vừa xét trong chương này, một bài toán đại số về phép nội suy trình bày trong các §1, §2, §3 và một bài toán về chứng minh trong hình học phẳng nghiên cứu trong các m.1, m.2 và m.3 của mục này. Tuy hai bài toán khác nhau về nhiều phương diện, song trong cách giải đã vận dụng cùng một phương pháp. Trong cả hai trường hợp, kết quả đều đạt được qua hai giai đoạn.

Trước hết, ta tách ra được một trường hợp riêng thuận lợi, một trường hợp đặc biệt, đơn giản hơn trường hợp tổng quát và tìm được lời giải, tuy không có hiệu lực đối với trường hợp tổng quát, nhưng thích hợp với trường hợp cụ thể này (xem §2 và m.2, hình 4.2 và 4.3).

Sau đó, *kết hợp các trường hợp riêng* mà lời giải hạn chế nói trên có thể áp dụng vào được, ta thu được lời giải đầy đủ, thích hợp cho *trường hợp tổng quát* (xem §3 và m.3).

Dưới đây, chúng tôi đưa ra hai thuật ngữ nhấn mạnh những đặc điểm đặc trưng của phương pháp này.

Ở giai đoạn thứ nhất ta xét một trường hợp riêng, trường hợp này chẳng những cực kì thuận lợi, mà còn cực kì có ích; ta có thể gọi một cách đích đáng trường hợp này là *trường hợp riêng chủ đạo*, bởi vì nó sẽ dẫn ta tới lời giải tổng quát(*).

Ở giai đoạn thứ hai, các trường hợp riêng được kết hợp lại bằng một phép tính đại số đặc biệt. Trong §3, n lời giải riêng, sau khi nhân với những hằng số, được đem cộng lại với nhau và kết quả là thu được lời giải tổng quát. Trong m.3, ta cộng và trừ các đẳng thức ứng với một cấu hình đặc biệt để có được chứng minh tổng quát. Ta sẽ gọi phép tính đại số dùng trong §3 (trong mục đó, nó mang tính chất tổng quát hơn

(*) Xem Toán học và những suy luận có lí.

trong m.3 của mục này) là tổ hợp tuyến tính hay sự chồng các lời giải riêng (những kiến trúc bổ sung về vấn đề này, xem trong bài tập 11).

Chúng ta có thể sử dụng hai thuật ngữ vừa đưa ra để phát biểu thực chất của phương pháp này: *Xuất phát từ trường hợp riêng chủ đạo, ta sẽ tìm được lời giải tổng quát bằng sự chồng các trường hợp riêng.*

Các chú thích bổ sung và bài tập sẽ giúp bạn đọc mở rộng thêm phần mô tả sơ lược của chúng tôi về phương pháp chồng, thậm chí, bạn đọc còn có thể vượt ra khuôn khổ của phần mô tả sơ lược đó và mở rộng lĩnh vực áp dụng phương pháp này nữa.

BÀI TẬP VÀ CHÚ THÍCH BỔ SUNG CHO CHƯƠNG 4

PHẦN 1

1. Khi suy ra công thức thể tích hình chóp $V = \frac{sh}{3}$ (s là diện tích đáy, h là chiều cao), có thể xét trường hợp tứ diện xem như một trường hợp riêng chủ đạo, rồi sau đó dùng phương pháp chồng? Vậy thì làm thế nào?

2. Nếu $f(x)$ là một đa thức bậc k thì sẽ có một đa thức $F(x)$ bậc $k + 1$ sao cho: $f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n) = F(n)$ với $n = 1, 2, 3\ldots$.

Để chứng minh định lí này, có thể lấy kết quả thu được trong bài tập 3 chương 3 làm một trường hợp riêng chủ đạo và dùng phương pháp chồng. Tiến hành làm việc đó như thế nào?

3. (Tiếp theo). Song, còn có một số con đường khác: có thể xem kết quả của bài tập 3 chương 3 là một trường hợp riêng chủ đạo và áp dụng phương trình chồng thì sẽ có được một cách chứng minh khác. Câu hỏi là làm như thế nào?

4. Coi các hệ số $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k$ là một số cho trước, hãy tìm những số $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_k$ sao cho đẳng thức $a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_k = b_0C_x^{k-1} + \ldots + b_kC_x^0$ là một đồng nhất thức, tức là nghiệm đúng với mọi giá trị của x (về các kí hiệu, xem bài tập 70 chương 3).

Chứng minh rằng bài toán này có một lời giải duy nhất.

5. Dùng phương pháp đã áp dụng trong bài tập 3 để nêu một cách mới nhằm suy ra biểu thức của S_3 từ §3 chương 3.

6. Dùng kết quả thu được trong bài tập 3 (về cách phát biểu định lí, xem bài tập 2) để nêu một cách mới nhằm suy ra biểu thức của S_3 tìm được trong § 3 chương 3).

7. Bài tập 3 có thể giúp ích được gì khi giải bài tập 3 trong chương 3).

8. Một câu hỏi thuộc về §1: Có thể nói gì với trường hợp riêng của $n = 2$? Khi chỉ có trước hai điểm thì đương nhiên có thể coi đường thẳng là đường đơn giản nhất trong số các đường đi qua hai điểm đó (và đường này được xác định một cách đơn trị). Điều đó có phù hợp với quan điểm mà, suy đến cùng, chúng ta đã đi tới m.5 §1 không?

9. Một câu hỏi thuộc về §2: Hãy biện luận về trường hợp riêng $y_i = 0$ với $i = 1, 2,\dots, n$, tức là trường hợp tất cả các giá trị cho trước của tung độ đều bằng không.

10. Một câu hỏi thuộc về §3: Đa thức tìm được $f(x)$ có thoả mãn hết mọi khoản trong điều kiện hay không? Bậc của nó có phải là thấp nhất trong tất cả các bậc có thể không?

11. *Tổ hợp tuyến tính hay sự chồng*. Giả sử có n đại lượng toán mà tính chất đã được xác định hoàn toàn (lấy ra từ cùng một tập hợp hoàn toàn xác định): $V_1, V_2, V_3,\dots, V_n$ sao cho *tổ hợp tuyến tính* của chúng $c_1V_1 + c_2V_2 + c_3V_3 +\dots + c_nV_{2n}$ tạo được bằng n số $c_1, c_2, c_3,\dots, c_n$ cũng có tính chất hệt như thế (cũng thuộc tập hợp đó).

Sau đây là hai ví dụ:

a) Nếu $V_1, V_2, V_3,\dots,V_n$ là những đa thức có bậc không vượt quá một số dương m cho trước, thì tổ hợp tuyến tính của chúng sẽ là một đa thức cũng có bậc không vượt quá m;

b) Nếu $V_1, V_2, V_3,\dots,V_n$ là véctơ song song với một mặt phẳng nào đó, thì tổ hợp tuyến tính của chúng có thể là một véctơ song song với mặt phẳng đó.

Ví dụ a) có nghĩa quan trọng đối với các suy luận trong §3. Còn đối với m.3. §4 thì cần xét rằng có thể coi phép cộng và phép trừ như những trường hợp riêng của quy trình tổng quát hình thành một tổ hợp tuyến tính ($n = 2$; $c_1 = c_2 = 1$ và $c_1 = -c_2 = 1$).

Ví dụ b) cũng rất bổ ích: bất kì đối tượng nào thuộc loại có thể lập được những tổ hợp tuyến tính phù hợp với các định luật "thông thường" của đại số học đều gọi là *véctơ* và toàn bộ tập hợp của chúng trong môn đại số trừu tượng, gọi là *không gian véctơ*.

Khái niệm tổ hợp tuyến tính (không gian véctơ) giữ một vai trò quan trọng trong nhiều ngành chủ đạo của toán học. Ở đây, chúng ta chỉ có thể xét bài ba ví dụ không phức tạp lắm (các bài tập 12, 13, 14, 15 và 16).

Trong cuốn sách này, chúng tôi dùng các thuật ngữ "tổ hợp tuyến tính" và "chồng" với những nghĩa giống nhau và thuật ngữ thứ hai hay dùng hơn thuật ngữ thứ nhất. Thuật ngữ "chồng" cũng không phải ít gặp trong môn vật lí (nhất là trong lí thuyết dao động). Ở đây, ta chỉ xét một ví dụ trong vật lí (xem bài tập 17), ví dụ này khá đơn giản đối với chúng ta, đồng thời lại bổ ích về nhiều phương diện.

12. *Phương trình vi phân tuyến tính đồng nhất có hệ số không đổi*. Phương trình này có dạng $y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}y' + a_ny = 0$, trong đó $a_1, a_2,\dots, a_n$ là những số cho trước, gọi là *hệ số* của phương trình; n là *bậc* của phương trình, y là hàm của biến độc lập x, còn $y', y'',\dots y^{(n)}$, là những đạo hàm liên tiếp của y. Hàm y thoả mãn phương trình gọi là *nghiệm* hay "tích phân" của nó.

a) Chứng minh rằng một tổ hợp tuyến tính của các nghiệm cũng là một nghiệm.

b) Chứng minh rằng có một nghiệm riêng thuộc dạng đặc biệt $y = c^{rx}$ trong đó số r được chọn thích hợp.

c) Hãy tìm cách kết hợp các nghiệm riêng thuộc dạng đặc biệt này để thu được một nghiệm có dạng càng tổng quát càng tốt.

13. Tìm hàm y thoả mãn phương trình vi phân $y'' = -y$ và các điều kiện ban đầu $y = 1$, $y' = 0$ khi $x = 0$.

14. *Phương trình sai phân tuyến tính đồng nhất có hệ số không đổi*. Phương trình này có dạng $y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + ... + a_{n-1} y_{k+1} + a_n y_k = 0$, trong đó a_1, a_2,…, a_n là những số cho trước, gọi là *hệ số* của phương trình, n là *bậc* của phương trình; dãy số vô hạn các số y_0, y_1, y_2,…, y_k… thoả mãn phương trình $k = 0, 1, 2,..$ gọi là *nghiệm* của phương trình.

Ta có thể xem y_k như là hàm của biến độc lập k, xác định đối với các *giá trị nguyên không âm* của k. Mặt khác, có thể coi phương trình đang xét là một *công thức truy toán*, tức là một quy tắc xác định dùng để tính bất kì một số hạng nào của dãy y_{k+n} dựa theo n số hạng trước y_{k+n-1}, y_{k+n-2},…, y_k, hay y_k dựa theo y_{k-1}, y_{k-2},…, y_{k-n}.

a) Chứng minh rằng mọi tổ hợp tuyến tính các nghiệm cũng là một nghiệm.

b) Chứng minh rằng có một nghiệm riêng thuộc dạng đặc biệt $y_k = r^k$, trong đó số r được chọn thích hợp.

c) Kết hợp các nghiệm riêng thuộc dạng đặc biệt này làm sao để thu được một nghiệm có dạng càng tổng quát càng tốt.

15. Dãy số *Phi-bô-na-xi* (xem bài tập 43 – 44, chương 3) 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,… xác định được bằng phương trình sai phân (hay công thức truy toán) $y_k = y_{k-1} + y_{k-2}$, $k = 2, 3, 4,…$, và các điều kiện ban đầu $y_0 = 0$, $y_1 = 1$. Hãy biểu diễn y_k theo k.

16. Xác định y_k với $k = 2, 3, 4…$, bằng các công thức truy toán $y_k = \dfrac{y_{k-1} + y_{k-2}}{2}$, sau khi đặt $y_0 = a$, $y_1 = b$. Biểu diễn y_k theo a, b và k.

17. *Chồng các chuyển động*. Ga-li-lê, sau khi khám phá ra định luật rơi của các vật thể và định luật quán tính, đã kết hợp hai định luật đó để tìm ra quỹ đạo (đường bay) của viên đạn. Bạn đọc, đã từng biết kí hiệu toán học hiện đại giúp cho việc nghiên cứu vấn đề này dễ dàng đến mức nào, sẽ có thể hình dung rõ ràng tất cả các tầm vĩ đại của phát minh của Ga-li-lê.

Giả sử x và y là các toạ độ Đề-các vuông góc trong một mặt phẳng thẳng đứng, trục x theo phương nằm ngang, trục y hướng thẳng đứng lên phía trên. Viên đạn (một chất điểm không bị lực ma sát và lực cản của không khí tác dụng) bị bắn ra từ gốc toạ độ tại thời điểm $t = 0$ (t là thời gian), sẽ chuyển động trong mặt phẳng nói trên. Giả sử vận tốc ban đầu của viên đạn bằng v và hướng ban đầu của nó tạo thành một góc α với hướng dương của trục x.

Ta có thể liên hệ chuyển động thực của viên đạn với ba chuyển động ảo bắt đầu cũng từ điểm đó và cũng vào thời điểm đó.

a) Một chất điểm có trọng lượng rơi tự do từ trạng thái đứng yên; vào thời điểm t, các toạ độ của nó có dạng $x_1 = 0$, $y_1 = -\dfrac{1}{2}gt^2$.

b) Một chất điểm, không chịu ảnh hưởng của trọng lực, chuyển động dưới tác dụng của thành phần thẳng đứng $v \sin\alpha$ của vận tốc ban đầu; theo định luật quán tính các toạ độ của nó ở thời điểm t bằng $x_2 = 0$, $y_2 = tv \sin\alpha$.

c) Một chất điểm, không chịu ảnh hưởng của trọng lực, chuyển động dưới tác dụng của thành phần nằm ngang của vận tốc ban đầu; theo định luật quán tính, các toạ độ của nó ở thời điểm t có dạng $x_3 = tv \cos\alpha$, $y_3 = 0$.

Hỏi quỹ đạo của chuyển động thực như thế nào nếu, theo các giả thiết "đơn giản hoá" của ta, chuyển động này hợp thành từ ba chuyển động ảo nói trên?

PHẦN 2

Chúng tôi tạo điều kiện để bạn đọc có thể tham gia vào một cuộc nghiên cứu mà những bước quan trọng nhất được nêu ra trong bài tập 18 và bài tập 25.

18. *Có nhiều cách khác nhau, rất đa dạng để giải một bài toán:* Hai cạnh đối diện của một tứ diện có cùng độ dài bằng a như nhau và trực giao nhau, ngoài ra mỗi cạnh đó lại trực giao với đoạn thẳng nối điểm giữa của chúng, đoạn này có độ dài bằng b. Tìm thể tích tứ diện này.

Bài toán này có một số cách giải khác nhau. Nếu bạn đọc thấy cần được chỉ dẫn thêm thì nên tìm hiểu các bài tập từ số 19 đến số 24 (hoặc là tìm hiểu từng bài hoặc là tìm hiểu một mạch tất cả các bài). Còn nếu bạn đọc muốn hình dung trực quan hơn bức tranh không gian này, thì nên tìm một phép chiếu trực giao đơn giản nào đó, hay dựng một thiết diện ngang đơn giản của thiết diện.

19. *Cái gì là ẩn?* Trong bài tập 18, thể tích tứ diện là ẩn.

Làm thế nào tìm được ẩn thuộc loại này? Có thể tính các thể tích tứ diện nếu biết đáy và chiều cao, nhưng trong bài tập 18, cả hai đại lượng này đều chưa biết.

Vậy, cái gì là ẩn?

20. (Tiếp theo). Cần phải biết tìm diện tích một tam giác; *làm thế nào tìm được ẩn thuộc loại này?* Có thể tính được diện tích một tam giác nếu biết đáy và chiều cao của nó. Nhưng trong tam giác là đáy của tứ diện trong bài tập 18, ta chỉ mới biết một trong hai đại lượng đó thôi.

Cần phải tìm độ dài một đoạn thẳng; *làm thế nào tìm được ẩn thuộc loại này?* Thông thường, người ta tính độ dài một đoạn thẳng bằng cách sử dụng một tam giác nào đó, nhưng hình vẽ đang xét không chứa một tam giác nào trong đó bao hàm chiều cao của tứ diện trong bài tập 18.

Đúng thế, một tam giác như vậy hiện tại không có trong hình vẽ, *nhưng liệu bạn có thể dựng được tam giác ấy hay không?* Trong mọi trường hợp, bạn hãy ghi lên hình vẽ những kí hiệu thích hợp và cố gắng đừng bỏ qua bất kì một chi tiết nào.

21. *Đây là một bài toán đã giải rồi, gần gũi với bài toán của bạn*: "Tính thể tích một tứ diện nếu biết đáy và chiều cao của nó". Trong bài tập 18, không thể sử dụng trực tiếp

bài toán này, vì chưa biết đáy và chiều cao tứ diện. Nhưng, *không xa xôi lắm*, có thể có những tứ diện khác, thích hợp hơn chăng?

22. (Tiếp theo) Chưa biết chừng, những tứ diện thích hợp hơn này lại có sẵn ngay bên trong tứ diện của ta chăng?

23. Những *kiến thức bổ sung* đối với bài toán đang xét có thể giúp ích bạn đọc. Bài tập 18 sẽ trở nên dễ dàng hơn nếu ta biết *công thức của thể tích hình tựa lăng trụ* (prismatoid).

Hình tựa lăng trụ là một đa diện có dạng đặc biệt. Hai mặt của nó, gọi là *đáy dưới* và *đáy trên* song song với nhau; các mặt còn lại gọi là *mặt bên*. Trong một hình tựa lăng trụ, có ba loại cạnh; những cạnh của đáy dưới, những cạnh của đáy trên và *những cạnh bên.* Mỗi cạnh bên của hình tựa lăng trụ (đó là một yếu tố quan trọng để xác định đa diện thuộc kiểu này) nối một đỉnh của đáy dưới với một đỉnh của đáy trên. Hình lăng trụ là một trường hợp riêng của hình tựa lăng trụ.

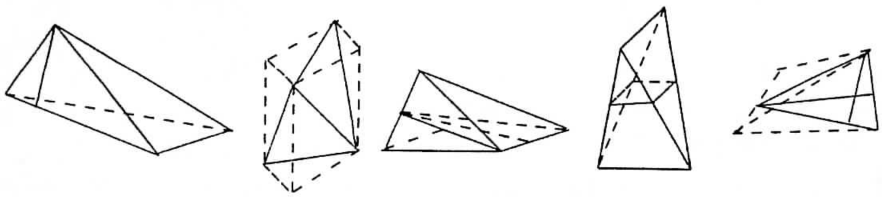
Khoảng cách giữa hai đáy gọi là *chiều cao* của hình tựa lăng trụ. Mặt phẳng song song với đáy dưới và đáy trên và cách đều hai đáy cắt hình tựa lăng trụ theo một thiết diện là *là một đa giác, đa giác này gọi là thiết diện giữa.*

Giả sử V là thể tích hình tựa lăng trụ, h là chiều cao, L, M, N, theo thứ tự là diện tích đáy dưới, thiết diện giữa và đáy trên. Ta sẽ có: $V = \dfrac{(L+4M+N)h}{6}$

(biểu thức này còn là công thức thể tích hình tựa lăng trụ; về vấn đề này, xem bài tập 25 và bài tập tiếp theo). Hãy dùng công thức này để giải bài tập 18.

24. Có thể rằng, để giải bài tập 18, bạn đọc không đi theo con đường đã vạch, được trình bày bắt đầu từ bài tập 19 và tiếp tục sang bài tập 20 mà đã chọn một con đường khác và cùng đạt kết quả mong muốn. Nếu quả là như thế thì bạn hãy ghi nhớ lại kết quả của mình rồi quay trở lại bài tập 20 và cố gắng "theo đuổi" cho đến cùng con đường bạn đã bỏ dở.

25. *Công thức thể tích hình tựa lăng trụ*. Hãy nghiên cứu thật kĩ vấn đề đang xét, hãy xem xét vấn đề với những quan điểm khác nhau, hãy ngẫm nghĩ vấn đề từ một khía cạnh, đúng là chúng ta vẫn từng làm như vậy và hãy xem hình 4.5. Sau khi tìm được bốn cạnh để suy ra cùng một kết luận, ta phải biết rút ra được lợi ích qua việc so sánh các cách đó với nhau.



Hình 4.5- Bạn hãy xoay đi lật tại tứ diện theo nhiều kiểu, xem xét nó trên những quan điểm khác nhau, nghiên cứu nó ở mọi khía cạnh

Ba trong bốn kết luận của chúng ta không sử dụng đến công thức thể tích hình tựa lăng trụ; chỉ có một kết luận là dùng đến công thức đó thôi (xem bài tập 23). Từ đó, suy ra rằng, đối với trường hợp riêng của công thức thể tích hình tựa lăng trụ mà ta gặp trong bài toán đang xét, về thực chất mà nói, ta có ba cách chứng minh khác nhau, ít ra là ở dạng ẩn. Hỏi, liệu có thể tạo lại một chứng minh nào đó trong số các chứng minh này dưới dạng tương minh và mở rộng chứng minh đó sao cho nó giúp ta suy ra được công thức cần tìm chẳng những đối với trường hợp riêng, mà cả đối với trường hợp tổng quát, hay không?

Kết luận nào trong ba kết luận vừa xét trên (bài tập 21, bài tập 22 và các bài tập 19, 20 và 24) có ưu thế nhất về phương diện này.

26. Kiểm tra lại công thức thể tích hình tựa lăng trụ trên một hình tựa lăng trụ (là một trường hợp rất đặc biệt của hình tựa lăng trụ).

27. Kiểm tra lại công thức thể tích hình tựa lăng trụ ở một hình chóp (hình chóp, theo một định nghĩa nhất định, có thể xem như một hình tựa lăng trụ suy biến, nếu ta muốn nói khác đi, như một trường hợp giới hạn của hình tựa lăng trụ khi đáy trên thu lại thành một điểm).

28. Để khái quát hoá biện pháp được dùng làm cơ sở cho việc giải bài tập 21, ta hãy xét một hình tựa lăng trụ P chia nhỏ thành n hình tựa lăng trụ không ăn lấn vào nhau $P_1, P_2, \ldots, P_n$ và choán đầy P, đồng thời các đáy dưới của các hình tựa lăng trụ thành phần choán đầy đáy dưới của hình tựa lăng trụ ban đầu P và các đáy trên của chúng choán đầy đáy trên của hình tựa lăng trụ ban đầu.

Trong trường hợp xét trong bài tập 21 (hình 4.5,b) P là một lăng trụ có đáy hình vuông, $n = 5$, P_1 P_2, P_3 P_4 là những tứ diện bằng nhau, P_5 cũng là một tứ diện.

Chứng minh rằng nếu công thức thể tích hình tựa lăng trụ là đúng đối với n hình nào đó trong số $n + 1$ hình tựa lăng trụ thành phần, thì nhất định nó phải đúng đối với cả hình tựa lăng trụ thứ $n + 1$.

29. Để khái quát hoá biện pháp được dùng làm cơ sở cho việc giải bài tập 23 (xem hình 4.5d), ta hãy kí hiệu hai cạnh đối của tứ diện là 1 và n (1 là cạnh dưới, n là cạnh trên). Qua 1, ta dựng một mặt phẳng song song với 1; ta kí hiệu khoảng cách giữa hai mặt phẳng (song song) đó là h. Có thể xem tứ diện như hình tựa lăng trụ (bạn thích nói là một hình tựa lăng trụ suy biến cũng được) mà các đáy (trên và dưới, theo thứ tự) là các cạnh 1 và n, còn chiều cao là h (thiết diện giữa của nó sẽ là một hình bình hành).

Hãy thử lại công thức thể tích hình tựa lăng trụ đối với trường hợp riêng này.

30. Chứng minh công thức thể tích hình tựa lăng trụ trong trường hợp tổng quát (bằng cách dùng phương pháp) chồng các trường hợp riêng đã xét trước.

31. *Không có một dây xích nào lại bền chắc hơn mắt xích yếu nhất của nó.* Hãy nghiên cứu lại một lần nữa lời giải của bài tập 29.

32. Hãy nghiên cứu lại một lần nữa bài tập 30.

33. *Công thức Xim-xơn.* Ta kí hiệu một hàm (liên tục) xác định trong khoảng $a \le x \le a + b$ là $f(x)$ và đưa ra các kí hiệu

$$\int_a^{a+h} f(x)\,dx = I\ ,\ f(a) = L\ ,\ \left(a + \frac{h}{2}\right) = M\ ,\ f(a+h) = N;$$

Khi đó với những điều kiện nhất định mà ta sắp nghiên cứu dưới đây, sẽ có $I = \frac{L + 4M + N}{6}h$; biểu thức này của I gọi là *công thức Xim-xơn.*

Giả sử n là một số nguyên không âm; hãy đặt $f(x) = x^n$, $a = -1$, $h = 2$ và tìm những giá trị của n mà công thức tính tích phân Xim-xơn, I nghiệm đúng.

(Ngay cả tròng những trường hợp công thức này không cho một giá trị chính xác của tích phân I, thì nó cũng có thể cho ta một giá trị xấp xỉ, tức là hiệu giữa vế phải của công thức Xim-xơn và giá trị của tích phân I tương đối nhỏ. Trường hợp này rất hay gặp, cho nên công thức Xim-xơn giữ vai trò quan trọng trong lí thuyết về tính xấp xỉ những tích phân xác định).

34. Chứng minh rằng với $a = 1$, $h = 2$, công thức Xim-xơn đúng với mọi đa thức không quá bậc ba.

35. Chứng minh rằng công thức Xim-xơn cũng đúng với mọi đa thức không quá bậc ba với các giá trị tuỳ ý của a và h.

36. Hãy suy ra công thức của thể tích hình tựa lăng trụ từ kết quả của bài tập 35 bằng cách vận dụng hình học giải tích không gian và phép tính tích phân ("Muốn đánh giá đúng đắn một cách giải dễ, trước tiên ta hãy giải bài toán theo một cách khó", một vị giáo sư toán cổ điển đã từng phát biểu như vậy).

37. *Mở rộng lĩnh vực nghiên cứu.* Trong khi giải một bài trong các bài toán trên, thực ra chúng đã đi lệch khỏi phương pháp chồng như đã phác hoạ trong m.4 §4. Quả thực chúng ta đã tìm được lời giải tổng quát dựa trên sự chồng các trường hợp riêng thuận lợi; song các trường hợp riêng đó không phải bao giờ cũng đồng nhất với nhau, không phải bao giờ cũng thuộc cùng một loại. Trong lời giải bài tập 30, có những cố thể đem chồng là hình chóp (xét trong bài tập 27), có những cố thể khác lại là những tứ diện xếp đặt một cách đặc biệt (xét trong bài tập 29). Trong bài tập 34, ta cũng gặp sự chồng những trường hợp riêng có tính chất khác nhau. Có thể nói, ta đã đi chệch khỏi lời phát biểu trong m.4 §4 một cách căn bản nhất tại một điểm duy nhất: ta đã bắt đầu không phải từ một trường hợp riêng chủ đạo. Bởi vậy, ta hãy mở rộng giới hạn phương pháp của ta mà chấp nhận cách phát biểu sau đây: *Xuất phát từ một trường hợp riêng chủ đạo hay từ một số trường hợp riêng chủ đạo, ta sẽ đạt được lời giải tổng quát dựa trên sự chồng các trường hợp riêng.*

Phương pháp chồng chỉ ra con đường đi từ một trường hợp riêng chủ đạo (hay từ một số trường hợp riêng chủ đạo) đến trường hợp tổng quát. Còn có một con đường khác hẳn, liên hệ giữa điểm đầu và điểm cuối con đường trên, mà bạn đọc ham hiểu biết cũng nên tìm hiểu: nhiều khi có thể đưa trường hợp tổng quát về trường hợp riêng chủ đạo bằng một phép *biến đổi thích hợp.* (Trường hợp tổng quát trong bài tập 35 có thể đưa về trường hợp riêng trong bài tập 34 bằng cách thay thế biến của tích phân).

PHẦN II. TIẾN TỚI MỘT PHƯƠNG PHÁP TỔNG QUÁT

... Tất cả các tri thức, xét trong toàn bộ, không phải cái gì khác mà chính là sự khôn ngoan của loài người: sự khôn ngoan ấy lúc nào cũng vẫn như thế, dù nó có vận dụng vào những đối tượng đa dạng đến đâu chăng nữa và... nó bị thay đổi đi vì sự đa dạng ấy chẳng nhiều nhặn gì hơn mặt trời bị thay đổi vì sự đa dạng của các vật thể mà mặt trời chiếu rọi.

ĐỀ-CÁC

Trích "Các quy tắc chỉ đạo của trí tuệ"

CHƯƠNG 5. BÀI TOÁN

Giải bài toán là một dạng đặc trưng và đặc thù nhất của tư duy tự nguyện

UYLIAM GIÊM-XƠ(*)

§1. BÀI TOÁN LÀ GÌ?

Từ đây về sau, chúng tôi sẽ dùng thuật ngữ "bài toán" theo nghĩa rất rộng; cho nên, trước hết, ta hãy xác định cho rõ hàm ý của từ này.

Với lối sống trong thời đại hiện nay, việc kiếm cái ăn thường không phải là một bài toán. Nếu tôi đói, ở nhà tôi sẽ lục tủ lạnh lấy thức gì đó lót dạ, ngoài phố, tôi sẽ vào một quán trà hay một tiệm ăn. Song tình tình sẽ khác hẳn, nếu tủ lạnh chẳng còn thức gì hoặc tôi đi phố mà không có một xu dính túi; trong trường hợp như thế, ước muốn được ăn sẽ dẫn đến một bài toán, đôi khi khá là "hắc búa". Nói chung, ước muốn có khi có thể dẫn đến một bài toán, có khi không dẫn đến bài toán. Nếu khi có một ước muốn, mà trong đầu ta, không cần một chút cố gắng nào, lập tức nảy ra một phương tiện rõ ràng mạch lạc, mà dùng phương tiện đó chắc chắn có thể thực hiện được ước muốn, thì sẽ không nảy ra bài toán. Nhưng nếu không có được một phương tiện như vậy, thì đó là một bài toán. Như vậy là, *bài toán đặt ra sự cần thiết phải tìm kiếm một cách ý thức phương tiện thích hợp để đạt tới một mục đích trông thấy rõ ràng nhưng không thể đạt được ngay.* Giải bài toán tức là tìm ra phương tiện đó.

(*) Uyliam Giêm-xơ (1812 - 1910) là một nhà tâm lí học người Mỹ nổi tiếng, người sáng lập ra thuyết "dòng ý thức", một thuyết có tiếng vang rộng rãi và gây ảnh hưởng rõ rệt đến nhiều nhà văn Tây Âu và Mỹ (M.Poruxt, G. Giôi-xơ, E. Hê-min-nhuê, ...).

Một bài toán có thể là phức tạp hay đơn giản; trong trường hợp thứ nhất, tìm ra lời giải là một việc khó, trong trường hợp thứ hai thì dễ. Nhân tiện, cũng nói thêm rằng, tính chất khó của lời giải, ở chừng nào đó, nằm ngay trong bản thân khái niệm bài toán: nếu không có khó khăn thì cũng chẳng có bài toán.

Một trong những bài toán điển hình nhất là bài toán tìm con đường đi tới một địa điểm định trước trong một vùng chưa thông thuộc lắm. Chúng ta có thể dễ dàng hình dung bài toán này có ý nghĩa quan trọng đến chừng nào đối với tổ tiên nguyên thuỷ của chúng ta, từng cư trú trong những khu rừng hoang vu. Có lẽ, chính vì thế mà chúng ta có thiên hướng hình dung quá trình giải một bài toán như một quá trình tìm kiếm con đường vượt qua các khó khăn, con đường vòng tránh các trở ngại; tuy vậy riêng tôi tôi chưa tin giả thiết này về nguồn gốc phát sinh của quan điểm coi việc giải bài toán như một con đường.(*)

Phần lớn tư duy có ý thức của chúng ta liên quan với việc giải các bài toán. Khi chúng ta không đãng trí và không mơ màng thì các ý nghĩ của chúng ta hướng tới mục đích cuối cùng nào đó, chúng ta sẽ tìm kiếm con đường và phương tiện đạt tới mục đích ấy, chúng ta sẽ gắng sức vạch ra đường đi nước bước để đạt tới mục đích cuối cùng của chúng ta.

Giải các bài toán là một thành tựu của lí trí, mà lí trí là một thiên tư đặc biệt, phú riêng cho con người. Năng lực vượt qua trở ngại, năng lực tìm ra lối đi vòng khi không có đường đi thẳng, đã nâng con vật thông minh lên cao hơn con vật đần độn, đã nâng con người lên cao hơn con vật thông minh nhất và nâng những người có tài lên cao hơn những người bình thường.

Đối với chúng ta, những con người, thì không có gì lí thú hơn là nghiên cứu hoạt động của con người. Mà giải các bài toán, việc ngẫm nghĩ xem làm như thế nào đạt một mục đích nhất định nào đó việc tìm ra những phương tiện cần thiết để đạt mục đích. Chúng ta sẽ cố gắng tìm hiểu thật kĩ hoạt động này và tôi thiết nghĩ việc làm này sẽ rất bổ ích.

Trong phần trên, chúng ta đã nghiên cứu các bài toán trong toán học sơ cấp bằng cách ghép thành nhóm bài toán giải được bằng cùng một phương pháp. Nhờ đó, chúng ta đã tạo cho mình một cơ sở thực nghiệm nhất định: bây giờ, dựa trên cơ sở đó, chúng ta hãy thử cố vươn lên một trình độ khái quát hoá cao hơn bằng cách cố gắng bao quát càng nhiều càng tốt ngay cả những bài toán không có tính chất hoá học. Mưu đồ tìm ra một phương pháp tổng quát áp dụng được cho mọi dạng bài toán là quá cao, nhưng thực ra đó là một ước muốn hoàn toàn tự nhiên bởi vì, mặc dù số các bài toán mà chúng ta gặp nhiều vô kể, song mỗi người chúng ta đều chỉ có một bộ óc để giải mà thôi, bởi vậy, đương nhiên là chúng ta phải mong sao nắm được một phương pháp vạn năng để giải mọi bài toán.

(*) So sánh với cách chia nhỏ quá trình giải một bài toán thành từng "bước".

§2. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TOÁN

Một em học sinh làm bài thi viết về môn toán; giả sử đó là một học sinh trung bình nhưng không phải là lười nhác và em đã dành một số thời gian và cũng có cố gắng chuẩn bị thi. Sau khi đọc đề toán, em tự hỏi: "Bài toán này thuộc kiểu gì nhỉ?". Và quả thực, nêu câu hỏi như vậy có thể có ích, bởi vì nếu em xếp được bài toán này vào một loại nào đó, em xác định được kiểu bài toán, đối chiếu bài toán với đoạn này đoạn kia đã học trong sách giáo khoa, thì như vậy là em đã tiến bộ được một bước: bây giờ em có thể nhớ lại phương pháp giải các bài toán kiểu đó mà em đã nghiên cứu trước đây.

Điều này, ở chừng mực nào đó, đúng đối với việc giải một bài toán ở bất kì trình độ phức tạp nào. Câu hỏi: "Bài toán này thuộc kiểu nào?" dễ dẫn đến câu hỏi tiếp sau:" Có thể áp dụng biện pháp nào để giải bài toán kiểu này?" Và những câu hỏi tương tự như thế ngay cả đối với những công trình nghiên cứu rất quan trọng cũng có thể là rất bổ ích.

Vậy, việc phân loại các bài toán, vạch ra sự khác biệt giữa các bài toán theo từng kiểu, có thể giúp ích ta khi giải toán. Một sự phân loại tốt phải chia các bài toán thành những kiểu sao cho mỗi *kiểu bài toán xác định trước một phương pháp giải.*

Ở đây, chúng ta không có ý định sẽ trình bày một cách phân loại tỉ mỉ các bài toán, cũng không có ý định cố gắng hoàn thiện cách phân loại đó. Chúng tôi sẽ chỉ nêu lên đặc điểm của hai kiểu bài toán rất tổng quát, bằng cách lí giải một cách khá rộng rãi quan niệm cổ truyền đã có ngay từ thời Ơ-clít và những người bình luận Ơ-clít.

Cuốn "Nguyên lí" của Ơ-clít gồm những tiên đề, định nghĩa và mệnh đề. Các nhà bình luận Ơ-clít và người phiên dịch nào đó phân biệt ra hai dạng mệnh đề: mục đích cuối cùng của loại mệnh đề thứ nhất (tên La-Tinh gọi là *problema)* là dựng hình; mục đích cuối cùng của loại mệnh đề thứ hai (tên La-Tinh gọi là *theorema)* là *chứng minh định lí.* Chúng ta sẽ hiểu sự phân biệt này theo một nghĩa rộng hơn và xét hai kiểu bài toán: *những bài toán tìm tòi và những bài toán chứng minh.* Mục đích cuối cùng của *bài toán tìm tòi* là tìm ra (dựng, thu được, xác định...) một đối tượng nào đó, tức là tìm ra ẩn số của bài toán. Mục đích cuối cùng của *bài toán chứng minh* là xác định xem một kết luận nào đó đúng hay sai, là xác nhận hay bác bỏ kết luận đó.

Chẳng hạn, khi bạn hỏi: "Ông ta đã nói gì?" là bạn nêu một bài toán tìm tòi. Nhưng khi bạn đặt câu hỏi: "Liệu ông ta có nói điều đó không?" là bạn nêu một bài toán chứng minh.

Trong hai mục tiếp sau sẽ trình bày tỉ mỉ hơn về hai kiểu bài toán này.

§3. BÀI TOÁN TÌM TÒI

Mục đích của bài toán tìm tòi là tìm ra một đối tượng nhất định, tìm ra *ẩn* của bài toán thoả mãn điều kiện ràng buộc ẩn với các *dữ kiện* của bài toán đó. Ta hãy xét hai ví dụ.

"Cho hai đoạn thẳng a, b và góc γ, phải dựng một hình bình hành trong đó các đoạn thẳng đã cho là hai cạnh kề hợp thành góc đã cho γ."

"Cho hai đoạn thẳng a, b và góc γ, phải dựng một hình bình hành trong đó các đoạn thẳng đã cho là những đường chéo hợp thành góc đã cho γ."

Trong hai bài toán, các dữ kiện hệt như nhau; các đoạn thẳng a, b và góc γ. Trong hai bài toán, ẩn cũng như nhau, do đó nếu chỉ để ý đến tính chất của ẩn thôi thì hai bài toán này không có gì khác nhau cả. Thế nhưng, *điều kiện*, tức là mối quan hệ giữa ẩn và các dữ kiện của hai bài toán đã khiến chúng phân biệt với nhau; rõ ràng là hình dạng của hình bình hành có liên quan với các cạnh của nó theo một cách và có liên quan với các đường chéo của nó theo một cách khác.

Ẩn có thể thuộc những phạm trù hết sức khác nhau. Trong các bài toán hình học về dựng hình, thì ẩn là một hình, chẳng hạn một tam giác. Khi giải các phương trình đại số, thì ẩn là một số, nghiệm của phương trình đó. Khi ta hỏi: "Ông ta đã nói gì?" thì ẩn có thể là một từ hay một số từ, một câu hay một số câu đã nói. Một bài toán được phát biểu rành mạch phải chỉ rõ phạm trù (tập hợp) chứa đựng ẩn; ngay từ đầu, ta phải biết ẩn định tìm thuộc loại nào: một hình tam giác, hay một số, hay một từ, hay...

Một bài toán được phát biểu rành mạch phải xác lập chính xác điều kiện mà ẩn nhất thiết phải thoả mãn. Trong tập hợp các đối tượng nếu trong điều kiện của bài toán, ẩn phải thuộc tập hợp này, có chứa một tập hợp con những đối tượng thoả mãn điều kiện này và mỗi đối tượng thuộc tập hợp con này gọi là một *lời giải*. Tập hợp con này có thể gồm một đối tượng duy nhất, khi đó lời giải sẽ là duy nhất. Tập hợp này có thể rỗng, khi đó không có lời giải nào hết. (Bàn về thuật ngữ "lời giải", xem chú thích bổ sung 13). Ở đây, cần chú ý rằng có thể hiểu bài toán tìm tòi theo nhiều cách khác nhau. Theo nghĩa thật chặt chẽ thì đó là một bài toán trong đó cần tìm ra (vạch ra, dựng, xác định, liệt kê, nêu đặc trưng...) hết *tất cả* các lời giải (toàn bộ tập hợp con nói trên). Theo nghĩa kém chặt chẽ hơn, trong bài toán có thể yêu cầu phải tìm ra một lời giải (nào đó, miễn là một) hay một số lời giải. Đôi khi chỉ cần xác định có *tồn tại* lời giải, tức là xác định xem tập hợp lời giải rỗng hay không rỗng, là đủ. Người ta quy ước hiểu lời giải một bài toán là lời giải theo nghĩa chặt chẽ trừ phi nêu rõ là hiểu theo nghĩa khác; song trong nhiều bài toán thực tiễn, "nghĩa chặt chẽ" có thể rất ít có ý nghĩa.

Khi ta xét các bài toán, (miễn là trong đề bài không thấy nói là hiểu theo nghĩa khác), ta sẽ dùng thuật ngữ "dữ kiện" để chỉ tất cả đối tượng cho trước (những cái đã biết, những điều giả thiết), hay toàn bộ tập hợp đó liên hệ với ẩn nhờ các điều kiện. Nếu bài toán có nội dung là dựng một tam giác theo các cạnh a, b và c của nó, thì các đoạn thẳng a, b và c sẽ là các dữ kiện.

Nếu bài toán có nội dung là giải một phương trình bậc hai $x^2 + ax + b = 0$ thì hai số a và b sẽ là các dữ kiện. Một bài toán có thể chỉ có một dữ kiện hoặc không có dữ kiện nào hết. Ví dụ: "tìm tỉ số giữa diện tích hình tròn và diện tích hình vuông ngoại tiếp nó". Thương số cần tìm không phụ thuộc vào kích thước hình vẽ, cho nên không cần thiết phải cho biết bán kính hay những dữ kiện nào khác thuộc loại này.

Ta sẽ gọi ẩn, điều kiện và dữ kiện là những *phần chính* của một bài toán tìm tòi. Thật vậy, ta không thể hi vọng giải được một bài toán mà ta không hiểu. Mà, muốn hiểu bài toán

thì phải biết - và biết rất rõ - cái gì là ẩn, cái gì là dữ kiện và điều kiện là thế nào. Như vậy là, trong quá trình giải một bài toán, cần phải đặc biệt chú ý đến các phần chính đó.

§4. BÀI TOÁN CHỨNG MINH

Người ta đồn rằng, một vị bộ trưởng, trong lúc trao đổi với một nghị sĩ nào đó về một vấn đề gì đó, đã dùng những lời lẽ khá thô bỉ (mà thậm chí chúng tôi không tiện nêu ra đây). Sự thật, đó chỉ là một tin đồn rất đáng ngờ. Song câu hỏi "Liệu ông ta có nói thế không?" đã làm xôn xao dư luận, được đưa ra tranh luận trên báo chí, được nêu lên trong phiên họp của nghị viện và có thể được đệ trình lên tới toà án nữa. Những ai quan tâm đến tin đồn này một cách nghiêm túc, sẽ đứng trước một "bài toán chứng minh": cần phải trút bỏ tấm màn ngờ vực đang phủ lên tin đồn này, cần phải chứng minh (hay bác bỏ!) rằng quả thực vị bộ trưởng đã phát biểu những lời lẽ đáng lên án đó và muốn chứng minh hay bác bỏ thì phải có luận cứ với tất cả tính thuyết phục của nó trong trường hợp này.

Khi ta gặp một bài toán chứng minh, ta phải loại trừ được mối hoài nghi về một khẳng định toán học A được phát biểu rành mạch, ta phải chứng minh hay bác bỏ A. Một trong những bài toán lí thú nhất thuộc loại này là chứng minh hay bác bỏ *giả thuyết của Gôn-bách* (*)*: Nếu một số nguyên n là chẵn và n > 4 thì n là tổng của hai số nguyên tố (lẻ)* (**).

Điều khẳng định của Gôn-bách (chừng nào nó mới chỉ là một điều giả định, thì ta chưa biết nó đúng hay sai) được phát biểu ở đây dưới **hình thức tự nhiên nhất đối với các khẳng định toán học,** vì nó gồm có *điều kiện và kết luận:* phần thứ nhất bắt đầu bằng từ "nếu" là điều kiện, phần thứ hai, bắt đầu bằng từ "thì" là kết luận (***).

Khi cần chứng minh hay bác bỏ một mệnh đề toán phát biểu dưới hình thức tự nhiên nhất, ta gọi điều kiện (giả thiết) và kết luận của nó là những *phần chính* của bài toán. Và quả thật các phần chính đáng được chú ý đặc biệt. Muốn chứng minh một mệnh đề, cần phải khám phá ra khâu lôgic liên hệ các phần chính của nó, tức là điều kiện (giả thiết) và kết luận; muốn bác bỏ một mệnh đề cần phải vạch rõ (nếu có thể thì dựa trên một phản ví dụ) rằng một trong hai phần chính - tức là điều kiện - không dẫn đến phần kia - tức là kết luận. Nhiều nhà toán học - xuất sắc nhất và tầm thường nhất - đã cố tìm cách tước bỏ tấm màn hoài nghi cho giả thuyết Gôn-bách nhưng đều không đạt kết quả, mặc dù chỉ cần chút ít tri thức là đủ hiểu nghĩa của điều kiện và kết luận, song chưa có ai xác lập được

---

(*) Krixchian Gôn-bách (1690 - 1764) là một nhà toán học Đức thế kỉ XVIII. Ông thường xuyên trao đổi thư từ với L. Ơ-le. Trong một bức thư viết cho Ơ-le, ông đã nêu giả thuyết trứ danh của mình (1742).

(**) Xem "Toán học và những suy luận có lí", G. Pôlya, - Nhà xuất bản Giáo dục, 2008.

(***) Có những mệnh đề toán không thể phân tách một cách tự nhiên ra điều kiện và kết luận; xem "Giải một bài toán như thế nào?". G. Pôlya, Nhà xuất bản Giáo dục, 2008. Các bài toán tìm tòi, các bài toán chứng minh, mục 4. Sau đây là một mệnh đề thuộc loại này: "Trong biểu thức thập phân của số π, có chín chữ số 9 liên tiếp". Chứng minh hay bác bỏ mệnh đề này là một bài toán toán học nhất định, mà hiện nay xem chừng không có hi vọng giải được. "Một thằng ngốc có thể tìm ra nhiều câu hỏi hơn một tá nhà thông thái tìm ra lời giải các câu hỏi đó".

mối liên hệ giữa hai cái đó với luận cứ thật chặt chẽ và cũng chưa có ai đưa ra được một ví dụ mâu thuẫn với giả thuyết này (*).

§5. CÁC THÀNH PHẦN CỦA ẨN, CÁC KHOẢN CỦA ĐIỀU KIỆN

Nếu một bài toán có nội dung là dựng một đường tròn thì về thực chất mà nói, cần tìm hai yếu tố: tâm đường tròn và bán kính của nó. Đối với bài toán này, chia nhỏ thành nhiều phần có thể có lợi: đáng lẽ tìm cùng một lúc cả hai yếu tố đó, tức là tâm và bán kính, ta có thể tìm một yếu tố trước, rồi tìm yếu tố kia sau.

Nếu bài toán có nội dung xác định vị trí một điểm trong không gian, trong trường hợp vận dụng hình học giải tích, thì về thực chất, cần tìm ba số, tức là ba toạ độ x, y, z của điểm đó.

Tuỳ theo quan điểm của chúng ta đối với bài toán, có thể nói trong trường hợp thứ nhất có hai ẩn hay chỉ có một ẩn, trong trường hợp thứ hai có ba ẩn hay cũng chỉ có một ẩn. Còn một quan điểm nữa, khác với hai quan điểm trên, nhiều khi cũng bổ ích: có thể nói cả trong hai ví dụ trên chỉ có một ẩn nhưng ẩn này được "chia nhỏ" ra theo một nghĩa nhất định. Chẳng hạn, trong ví dụ thứ nhất, ẩn là một đường tròn, nhưng đó là một ẩn "hay yếu tố" hay "hai thành phần": các thành phần của nó là tâm và bán kính. Cũng vậy, trong ví dụ thứ hai, điểm cần xác định là một ẩn "ba yếu tố" hay "ba thành phần"; các thành phần của nó là ba toạ độ x, y và z. Nói chung, có thể xét một ẩn "nhiều yếu tố" hay "nhiều thành phần" gồm n thành phần $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Một trong những ưu điểm của thuật ngữ vừa đưa ra là ở chỗ: khi biện luận về một số vấn đề tổng quát, ta khỏi phải nêu lên sự khác biệt giữa các bài toán có một ẩn với các bài toán có nhiều ẩn, bởi vì bao giờ ta cũng đưa trường hợp thứ hai về trường hợp thứ nhất bằng cách xem ẩn đang xét như những thành phần của một ẩn "nhiều thành phần". Chẳng hạn như, những điều trình bày trong §3 về cơ bản cũng áp dụng được cho những bài toán

---

(*) Hiện nay, hầu như người ta đã giải được bài toán chứng minh định lí phát biểu rằng *mỗi số lẻ là tổng của ba số nguyên tố (lẻ)*, song đối với bài toán của Gôn-bách theo cách phát biểu ban đầu thì cho đến nay vẫn chưa thấy có cách xử lí nào có triển vọng cả.

Cần chú ý rằng "hình thức tự nhiên" của một bài toán chứng minh, tức là mối liên hệ đơn giản giữa điều kiện và kết luận của bài toán, hoàn toàn chưa bảo đảm là bài toán có thể giải được về mặt nguyên tắc, tức là chưa bảo đảm khả năng chứng minh hay bác bỏ được kết luận mà chỉ dựa nguyên vào các dữ kiện của bài toán thôi.

"Giả thuyết côntinum nổi tiếng của Căng-to" *Giêoócgiơ Căng-to (1845 - 1918) là một nhà toán Đức nổi tiếng, người xây dựng nên lí thuyết tập hợp* cung cấp cho ta một ví dụ cổ điển về vấn đề này. Giả thuyết này có thể phát biểu như sau: *"nếu lực lượng của một tập hợp M nào đó không nhỏ hơn lực lượng của tập hợp tất cả các số tự nhiên và không lớn hơn lực lượng của tập hợp tất cả các số tự nhiên và không lớn hơn lực lượng của tập hợp tất cả các số thực, thì lực lượng của tập hợp M sẽ trùng với một trong hai lực lượng kia"*. Trong một thời gian dài giả thuyết này hoàn toàn không thua kém gì giả thuyết Gôn-bách về ý nghĩa cũng như về số lượng các cố gắng thử chứng minh hay bác bỏ nó; song đến năm 1966, nhà toán học Mỹ Pôn Côhen đã chứng minh được rằng bài toán này không thể giải được, tức là đã xác định được rằng: thừa nhận giả thuyết Căng-to hay bác bỏ giả thuyết này cũng đều không mâu thuẫn với bất kì tiên đề nào khác đã được thừa nhận trong toán học (nói riêng, trong lí thuyết tập hợp).

phải tìm nhiều ẩn, tuy rằng trường hợp này không thấy nêu rõ trong §3. Sau này ta sẽ thấy thuật ngữ trên tỏ ra có ích trong những tình huống rất khác nhau.

Nếu chúng ta đứng trước một bài toán tìm tòi thì chia nhỏ điều kiện thành nhiều phần hay nhiều khoản cũng có thể có lợi; chúng ta đã từng có nhiều trường hợp nhận xét thấy điều này. Khi giải một bài toán hình học về dựng hình, ta có thể chia điều kiện thành hai phần sao cho mỗi phần "sinh ra" một quỹ tích của điểm cần tìm (chương 1). Khi giải một bài toán đại số "nêu bằng lời" thì trong bài có bao nhiêu ẩn, ta sẽ chia điều kiện thành bấy nhiêu phần sao cho mỗi phần đem lại một phương trình (chương 1).

§6. HÃY TÌM MỘT QUY TRÌNH THÍCH HỢP

Khi dựng một hình theo phong cách cuốn "nguyên lí" của Ơ-clít, chúng ta không thể tuỳ tiện chọn các thiết bị và dụng cụ vẽ hình, mà người ta đã quy định trước rằng chỉ được dùng compa và thước kẻ để dựng hình. Như vậy là việc giải bài toán, về thực chất mà nói, quy về việc áp dụng một dãy những thao tác hình học có mục đích, bắt đầu từ các dữ kiện và kết thúc bằng hình cần tìm; trong trường hợp của ta, các thao tác đó gồm việc vạch những đường thẳng , vẽ đường tròn và tìm ra giao điểm của chúng.

Ví dụ trên có thể giúp ta sáng tỏ nhiều điều và nhờ đi sâu hơn vào bản chất vấn đề, ta sẽ thấy rõ là việc giải nhiều bài toán phụ thuộc vào rất nhiều quy trình: vào đường lối hành động, vào lược đồ các thao tác liên hệ với nhau, vào "kiểu cách hành động".

Ta hãy xét tiếp một bài toán về giải phương trình bậc hai (hay bậc ba, bậc bốn). Việc giải bài toán này quy về việc chỉ ra một dãy những *thao tác đại số* (phép tính đại số) liên hệ với nhau một cách đúng đắn, bắt đầu từ các dữ kiện - các hệ số đã biết trong phương trình và kết thúc bằng các nghiệm cần tìm; ở đây phép cộng, phép trừ, phép nhân hay phép chia các đại lượng đã cho hoặc đã tìm được trước và cả phép khai căn các đại lượng đó, là những thao tác.

Ta xét thêm một "bài toán chứng minh". Quá trình giải bài toán này, kết quả của những nỗ lực trí óc của chúng ta, là một chứng minh, tức là một dãy những thao tác hay những bước *lôgic* phối hợp chặt chẽ với nhau, bắt đầu từ điều kiện (giả thiết) và kết thúc bằng kết luận của định lí mà ta gắng đạt tới; mỗi bước sẽ dẫn đến một luận đề mới nào đó mà ta có thể suy ra được từ các phần của điều kiện (giả thiết) được lựa chọn một cách thích hợp hoặc từ những sự kiện đã biết từ trước hoặc từ các luận đề đã được chứng minh từ trước.

Đối với các bài toán ngoài lĩnh vực toán học, cũng có thể hình dung chúng theo dạng trên. Một người xây dựng một chiếc cầu phải biết tổ chức, phối hợp, sắp xếp theo một lược đồ hài hoà một số lượng khổng lồ những thao tác; tính toán kết cấu, đặt phao nổi, dựng giàn giáo, đổ bêtông, tán rivê các kết cấu kim loại,... Chẳng những thế, nhiệm vụ của ta còn có thể bao gồm cả việc phối hợp các thao tác này với những thao tác có tính chất khác hẳn, chẳng hạn, việc kí kết các hợp đồng tài chính, pháp lí và thậm chí cả hợp đồng chính trị nữa. Tất cả các thao tác đó phụ thuộc lẫn nhau và trong các thao tác đó, có một số thao tác cần phải làm trước.

Hoặc giả, ta hay đọc truyện trinh thám. Ở đây, ẩn là tên sát nhân; tác giả cuốn truyện cố gắng làm chúng ta phải sửng sốt trước những hành động của nhân vật chính, là thám tử, đã dựng lên cả một lược đồ hay một đường lối hành động, bắt đầu từ những tang vật đầu tiên kết thúc bằng một việc truy ra và tóm cổ tên sát nhân.

Đối tượng của các cuộc tìm tòi của chúng ta có thể là một ẩn thuộc bất kì loại gì hay là sự phát hiện một chân lí về bất kì một loại vấn đề nào; bài toán của chúng ta có thể có tính chất lí thuyết hay thực hành, nghiêm túc hay chẳng có gì quan trọng. Để giải một bài toán, chúng ta phải lập được một lược đồ xác định và mạch lạc những thao tác (lôgic, toán học hay thực tiễn) bắt đầu từ giả thiết và kết thúc bằng kết luận, dẫn dắt từ các dữ kiện đến ẩn, từ các đối tượng mà ta có trong tay đến các đối tượng mà ta muốn đạt tới.

BÀI TẬP VÀ CHÚ THÍCH BỔ SUNG CHO CHƯƠNG 5

1. Cần tìm thể tích V của một hình lăng trụ thẳng có đáy vuông biết cạnh a của đáy và chiều cao h.

Hỏi: Cái gì là ẩn, cái gì là dữ kiện? Điều kiện là thế nào?

2. Cần tìm hai số thực x và y sao cho $x^2 + y^2 = 1$.

Hỏi: Cái gì là ẩn? Cái gì là dữ kiện? Điều kiện là như thế nào? Hãy nêu đặc điểm của tập hợp các nghiệm của bài toán này.

3. Tìm hai số thực của x và y thoả mãn phương trình $x^2 + y^2 = -1$.

Nêu đặc điểm của các nghiệm của bài toán này.

4. Tìm hai số nguyên x và y thoả mãn phương trình $x^2 + y^2 = 13$.

Nêu đặc điểm của tập hợp các nghiệm của bài toán này.

5. Tìm ba số thực x, y, z sao cho $|x| + |y| + |z| < 1$.

1) Nêu đặc điểm của tập hợp các nghiệm của bài toán.

2) Biến đổi bài toán bằng cách thay dấu < bằng dấu ≤ và nêu đặc điểm của tập hợp các nghiệm của bài toán mới.

6. Hãy phát biểu định lí Pi-ta-go.

Điều kiện (giả thiết) gồm những gì? Cái gì là kết luận?

Ta kí hiệu một số nguyên dương là n và số các ước số của nó là $d(n)$, (ta để ý các ước số nguyên dương, kể cả 1 và n). Chẳng hạn:

Các ước số của 6 là 1, 2, 3, 6: $d(6) = 4$.

Các ước số của 9 là 1, 3, 9: $d(9) = 3$.

Ta hãy xét các mệnh đề:

Nếu n là một bình phương thì $d(n)$ là số lẻ, còn nếu n không phải là một bình phương thì $d(n)$ là số chẵn.

Điều kiện (giả thiết) là gì? Cái gì là kết luận?

7. *Một bài toán tìm tòi hay một bài toán chứng minh?*

Hai số $\sqrt{3} + \sqrt{11}$ và $\sqrt{5} + \sqrt{8}$ có bằng nhau không? Nếu không thì số nào lớn hơn?

Giả sử chúng ta muốn phát biểu bài toán này dưới dạng tổng quát thì bài toán sẽ đặt như sau: *Hai số a và b được xác định một cách đơn trị nhờ một số phép tính số học nào đó, kể cả phép khai căn;* cần giải quyết vấn đề: trong ba trường hợp có thể $a = b$, $a > b$, $a < b$ thì trường hợp nào xảy ra trên thực tế.

Có thể nhận xét dễ dàng rằng có một số cách nhìn nhận khác nhau đối với bài toán này:

1) Có thể bắt đầu từ chỗ chứng minh hay bác bỏ rằng $a = b$. Nếu nhận thấy $a \neq b$ thì có thể chuyển qua chứng minh hay bác bỏ rằng $a > b$. Cũng có thể tiến hành theo trình tự ngược lại, hay thậm chí tiến hành hai việc cùng một lúc; dù sao mặc lòng; ta cũng đứng trước hai bài toán chứng minh có liên quan qua lại với nhau.

2) Trong nhiều phần khác nhau của toán học người ta sử dụng rộng rãi kí hiệu sgn x (đọc là "sigonum x" hay "dấu x"), kí hiệu này được định nghĩa như sau:

$$\mathrm{Sgn}x = \begin{cases} 1, \text{ nếu } x > 0, \\ 0, \text{ nếu } x = 0, \\ -1, \text{ nếu } x < 0. \end{cases}$$

Dùng kí hiệu này, ta có thể nói trong bài toán nêu trên, cần tìm số sgn $(a - b)$, nhưng thế thì đó lại là một bài toán tìm tòi rồi.

Ở đây không có điều gì mâu thuẫn về hình thức (không thể nảy ra mâu thuẫn nếu thuật ngữ chúng ta dùng đã được cân nhắc kĩ): trong 1) ta có bài toán A gồm hai hai bài toán chứng minh có liên quan qua lại với nhau được phát biểu cùng một lúc; trong 2), ta có bài toán B, là một bài toán tìm tòi. Hai bài toán A và B đó được phát biểu theo những thuật ngữ khác nhau, không thể coi là đồng nhất với nhau được, nhưng có thể nói chúng tương đương với nhau (cách dùng thuật ngữ "tương đương" này được giải thích rõ trong Giải một bài toán như thế nào?- Bài toán phụ, và sẽ được giải thích một lần nữa trong chương 9).

Cần nhận xét tiếp rằng, xét bài toán theo hai phía cạnh khác nhau như trên, ta chẳng bị thiệt hại gì hết. Trái lại, nhiều khi nhìn cùng một khó khăn trên hai khía cạnh khác nhau lại rất có ích, bởi vì một khía cạnh này có thể khơi gợi chúng ta hơn khía cạnh kia; nó có thể vạch cho ta thấy mặt tương đối dễ tiếp cận hơn của bài toán và nhờ đó tạo khả năng tấn công vào "mặt yếu" của khó khăn.

8. Những bài toán khác. Bạn hãy lấy bất kì một bài toán nào (trong các chương trước có khá nhiều) và xác định xem đó là bài toán "tìm tòi" hay bài toán "chứng minh". Và bạn hãy tự hỏi mình:

Cái gì là ẩn? Cái gì là dữ kiện? Điều kiện là gì? Cái gì là kết luận? Cái gì là giả thiết?

Trong trường hợp này, các câu hỏi trên đặt ra chủ yếu để tìm hiểu các phần chính của bài toán được dễ dàng hơn. Nhưng rồi, qua kinh nghiệm bạn sẽ thấy rằng những câu hỏi đại loại như thế, được đặt ra nghiêm túc và được trả lời khúc triết, rõ ràng, đã giúp ích ta rất nhiều khi giải bài toán; chúng tập trung sự chú ý của ta vào các phần chính của bài

toán, giúp ta hiểu sâu nội dung bài toán và chọn được phương hướng đúng đắn ngay từ những bước đầu tiên của bài toán.

9. *Quy trình giải được một bài toán có thể gồm một dãy vô hạn những thao tác.* Giả sử ta cần giải phương trình $x^2 = 2$.

Bài toán này có thể hiểu theo nhiều cách khác nhau. Chẳng hạn, có thể giải thích đề toán như sau: "Tìm giá trị dương của căn bậc hai của số 2 với năm chữ số có nghĩa, trong trường hợp này, viết ra được phân số thập phân 1,4142 là ta đã hoàn thành nhiệm vụ. Song, cũng có thể hiểu bài toán theo cách khác: "khai căn bậc hai của số 2" mà không hề có quy định gì thêm hoặc đặt điều kiện cho bài toán được dễ dàng hơn, trong trường hợp này, ta không thể coi là đã giải song bài toán sau khi viết được bốn hay bất kì bao nhiêu chữ số sau dấu phẩy. Ở đây, lời giải phải là một quy trình, một lược đồ những phép tính số học để tính được bất cứ một số lượng chữ số thập phân cho trước là bao nhiêu.

Ta lấy thêm một ví dụ nữa: "Tìm tỉ số giữa diện tích hình tròn và diện tích hình vuông nội tiếp với nó". Nêu coi giá trị của π là đã biết, thì đáp số ở đây sẽ là π. Nhưng Lép-nít đã nêu đáp số dưới dạng một chuỗi: $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots$

Về thực chất mà nói, chuỗi này dự kiến việc hoàn thành một dãy vô tận các phép tính số học, các phép tính đó phải đảm bảo số lượng bao nhiêu tuỳ ý các chữ số thập phân trong biểu thức của số π (ít ra cũng là trên lí thuyết, còn trong thực hành thì quy trình này quá chậm chạp). Lép-nít có nói: "tuy chuỗi này, dưới dạng chính thức của nó, không áp dụng được cho việc tính xấp xỉ thật nhanh, nhưng tôi không nghĩ rằng người ta lại có thể tưởng tượng ra một cái gì đơn giản hơn hoặc thích hợp hơn để hình dung được trong đầu mình tỉ số giữa hình tròn và hình vuông ngoại tiếp với nó.

10. *Phép cầu phương hình tròn.* Khi giải một bài toán tìm tòi, ta phải tìm kiếm một đối tượng, "đối tượng chưa biết", mà việc đó nhiều khi dẫn tới việc tìm kiếm quy trình (dãy thao tác) bảo đảm tìm ra được đối tượng; để nhấn mạnh ý nghĩa đặc biệt của quy trình tìm kiếm đối tượng; chúng ta gọi quy trình cần tìm là "ẩn thuộc về quy trình" để phân biệt với ẩn "bình thường". Sự phân biệt này nhiều khi rất có ích, ta có thể lấy một ví dụ trong lịch sử để minh hoạ.

Cho một hình tròn mà bán kính đã biết; cần dựng *bằng compa và thước kẻ* một hình vuông có diện tích đúng bằng diện tích hình tròn.

Cách phát biểu chặt chẽ như trên đối với bài toán cổ về "phép cầu phương trình tròn" đã được xây dựng ngay từ thời các nhà hình học Hi Lạp đầu tiên. Cần nhấn mạnh rằng, trong đề bài toán, đã quy định tính chất của quy trình giải ("ẩn thuộc về quy trình"): cần dựng cạnh của hình vuông cần tìm bằng một cái thước kẻ và một cái compa, bằng cách vạch những đường thẳng và những đường tròn và đồng thời chỉ sử dụng những điểm do các đường đã vẽ cắt nhau tạo ra. Dĩ nhiên, trong bài toán giả định rằng sau khi bắt đầu từ hai điểm mút của bán kính cho trước, ta sẽ phải đi tới hai điểm mút của cạnh hình vuông cần tìm, nhờ thực hiện một số hữu hạn những thao tác.

Qua nhiều thế kỉ đã từng có biết bao nhiêu người tìm cách giải bài toán này, nhưng đến năm 1882, F. Lindeman đã chứng minh được rằng bài toán này không có lời giải. Mặc dù chắc chắn là có tồn tại một hình vuông có diện tích đúng bằng diện tích hình tròn cho trước (cạnh của nó có thể tính xấp xỉ với bất kì độ chính xác nào đó nhờ những quá trình vô hạn khác nhau, mà ngày nay các nhà toán học đều rất quen thuộc; một trong các quá trình này là chuỗi Lép-nít nổi tiếng, mà trong chú thích bổ sung 10 có nhắc đến), song quy trình ở dạng đòi hỏi trong bài toán (gồm một dãy hữu hạn những thao tác với thước kẻ và compa) thì không thể có được. Liệu phân biệt thật rành mạch giữa hình cần tìm và quy trình cần tìm, giữa đối tượng cần tìm và "ẩn thuộc về quy trình" có giúp giảm bớt được số người uổng công phí sức cố giải bài toán về cần phương trình hình tròn hay không?

11. *Sự tiếp theo và hệ quả.* Đặt một kết cấu kim loại lắp sẵn vào đúng chỗ, khi xây dựng một chiếc cầu, là một thao tác quan trọng. Nếu lại có hai thao tác như thế thì sẽ có vấn đề: thao tác này phải làm trước thao tác kia là một vấn đề rất hệ trọng (chẳng hạn, trường hợp không thể nào đặt được kết cấu thứ hai vào đúng chỗ nếu chưa đặt xong kết cấu thứ nhất), nhưng có khi vấn đề đó lại không có gì hệ trọng (chẳng hạn, nếu hai kết cấu đó không liên hệ gì với nhau). Thành thử, tuân thủ một trình tự nhất định khi hoàn thành hai thao tác có thể là điều cần thiết hay không cần thiết. Cũng có thể nói, trong bài giảng hay trong công trình in ra, phải trình bày các bước chứng minh theo một trình tự nhất định. Ta cần phải phân biệt giữa sự tiếp theo với hệ quả, giữa sự đi trước về thời gian với liên hệ qua lại lôgic (nhân quả). (Chúng ta sẽ trở lại vấn đề quan trọng này trong chương 7).

12. *Một thuật ngữ có thể hiểu theo nhiều nghĩa.* Từ "lời giải" có nhiều nghĩa, trong đó có một nghĩa rất quan trọng, cần được thay bằng một thuật ngữ khác có một nghĩa duy nhất. Dưới đây, tôi thử đề nghị một vài thuật ngữ trong khi có những từ thích đáng hơn (trong ngoặc là từ tương đương trong tiếng Đức (*)).

Đối tượng giải (Solving object, Losungsgenstand) là đối tượng thoả mãn điều kiện bài toán. Nếu bài toán có mục đích là giải một phương trình đại số, thì đối tượng giải là nghiệm của phương trình, tức là đại lượng thoả mãn phương trình. Đối tượng giải chỉ tồn tại ở các bài toán tìm tòi. Một bài toán phát biểu rành mạch thì trong đó phải chỉ rõ ngay từ đầu phạm trù (tập hợp) chứa đối tượng giải: ta biết trước mình cần tìm kiếm cái gì: một tam giác, hay một số hay một cái gì khác. Thực ra, điều xác định này (nêu rõ tập hợp chứa ẩn) là một phần quan trọng của bài toán "Tìm ra ẩn" có nghĩa là tìm ra (xác định, dựng, vạch, thu được,...) đối tượng giải hay tập hợp tất cả các đối tượng giải.

Quy trình giải (Solving procedure, Losungsgang) là quy trình (phép dựng sơ đồ các thao tác, hệ thống các kết luận), kết thúc bằng việc tìm ra ẩn trong bài toán tìm tòi hay bằng việc làm tiêu tan mối hoài nghi về tính đúng đắn (hay sai trái) của điều khẳng định nêu trong bài toán chứng minh. Lúc mới bắt tay vào giải bài toán, ta thường chưa biết quy trình giải, chưa biết sơ đồ thích hợp tiến hành các thao tác, nhưng ta sẽ kiên trì tìm kiếm quy trình đó với hi vọng rằng cuối cùng ta sẽ xác định được nó hoàn toàn; quy trình này là một phần các cuộc tìm tòi của ta; về ý nghĩa, về thực chất mà nói, quy trình này là một ẩn của ta, nó là một "ẩn thuộc về quy trình" (xem chú thích bổ sung 10 và 11).

(*) và tiếng Anh (chú thích của người dịch).

Cũng có thể nói đến "công việc giải" (Work of solving, Losungsarbeit) hay "kết quả giải" (Result of solving, Losungsergebnis), nhưng tôi cũng không muốn mình trở thành người quá cầu kì, vụn vặt, nên trên thực tế, chỉ trừ một vài trường hợp đặc biệt quan trọng, còn thì tôi dành cho bạn đọc tự mình suy đoán qua đề bài toán xem trong trường hợp cụ thể đang xét, từ "lời giải" có nghĩa như thế nào, là đối tượng hay là quá trình, là kết quả công việc, hay là bản thân công việc? (*)

13. *Dữ kiện và ẩn, điều kiện (giả thiết) và kết luận.* Bộ "Nguyên lí" của Ơ-clít được viết theo một văn phong nhất quán triệt để thật là độc đáo, mà người thì bảo là văn phong bí hiểm, người thì bảo là văn phong cầu kì... Tất cả các mệnh đề trong bộ sách này đều được phát biểu theo một kiểu trình bày thống nhất, quy định rõ ràng, đồng thời các *dữ kiện và ẩn* trong các bài toán tìm tòi được xem như những yếu tố tương tự hay những yếu tố song song, tương ứng với *điều kiện* (giả thiết) và *kết luận* trong các bài toán chứng minh. Như sau này ta sẽ thấy, quả thực có tồn tại một sự tương tự trong song hành giữa hai yếu tố chính đó của hai kiểu bài toán và điều này có một ý nghĩa nhất định trên quan điểm của một người giải bài toán và do đó có liên quan đến vấn đề chúng ta đang quan tâm. Song, nếu lầm lẫn thuật ngữ "dữ kiện" với "điều kiện" (giả thiết), hay thuật ngữ "ẩn" với "kết luận" và đem áp dụng bất cứ thuật ngữ nào trong số đó vào kiểu bài toán không thích hợp, thì đó là một điều dốt nát, không thể chấp nhận được. Tiếc rằng những trường hợp sử dụng các thuật ngữ quan trọng đó một cách dốt nát và "trái phép" như trên đôi khi còn gặp thấy cả trên sách báo là khác nữa.

14. *Số dữ kiện cần thiết.* Một tam giác được xác định bằng ba cạnh hay hai cạnh và một góc (gồm giữa hai cạnh này) hay bằng một cạnh và hai góc; nhưng ba góc thì không đủ, vì để xác định tam giác, các dữ kiện phải độc lập với nhau (xem thêm bài tập 46 và 47 chương 1). Muốn cho trước một đa thức bậc n theo một biến (biến này thường kí hiệu là x), cần phải có $n+1$ dữ kiện độc lập, cụ thể là $n + 1$ hệ số trong khai triển của đa thức theo bậc của x, hay $n + 1$ giá trị của đa thức này tại các điểm $x = 0$; $1, 2, \ldots, n$ hay tại $n + 1$ điểm bất kì khác,... Có cả một loạt những đối tượng dữ kiện độc lập hoàn toàn xác định. Bởi vậy giải một bài toán tìm tòi, nhiều khi chúng ta nên đến xem có bao nhiêu dữ kiện và việc này nên làm sớm.

15. Để xác định một đa giác n cạnh, cần có:

$$(n - 1) + (n - 2) = (n - 3) + n = 3 + 2(n - 3) = 2n - 3$$

dữ kiện độc lập. Hỏi, bốn biểu thức khác nhau của cùng một số vừa viết trên có ý nghĩa hình học như thế nào?

16. Cần bao nhiêu dữ kiện để xác định một hình chóp n cạnh?

17. Cần bao nhiêu dữ kiện để xác định một lăng trụ n cạnh (lăng trụ này có thể nghiêng)?

18. Cần bao nhiêu dữ kiện để xác định một đa thức bậc n với v biến số? (Các số hạng của đa thức có dạng $cx_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_v^{m_v}$, trong đó c là một hệ số hằng số và $m_1, m_2 + \ldots + m_v \leq n$).

(*) Xem Giải một bài toán như thế nào? mục 8 - Các thuật ngữ cũ và mới.

CHƯƠNG 6. MỞ RỘNG PHẠM VI ÁP DỤNG PHƯƠNG PHÁP

Hãy chia bài toán mà bạn đang xét thành nhiều phần ở chừng mực bạn có thể và bạn cần để giải bài toán được dễ hơn.

ĐỀ-CÁC - Luận về phương pháp

Quy tắc đó của Đề-các chẳng có ích mấy, chừng nào mà nghệ thuật chia nhỏ... còn chưa được lí giải rõ ràng... chia nhỏ một bài toán thành những phần không thích đáng, một người giải toán ít kinh nghiệm có thể càng chuốc thêm khó khăn vào mình.

LÉP-NÍT Philosophische Schriften
Khái luận về triết học

§1. MỞ RỘNG PHẠM VI ÁP DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐỀ-CÁC

Trong phương pháp Đề-các, chứa đựng những tư tưởng quan trọng không nhất thiết chỉ liên quan đến việc lập phương trình. Trong chương này, chúng ta thử cố vạch rõ một số tư tưởng đó bằng cách thận trọng chuyển từ phương trình sang những khái niệm tổng quát hơn. Nói chung, ta hãy bắt đầu từ một ví dụ khá tổng quát nhưng đồng thời lại rất cụ thể về một phương diện; ví dụ này sẽ chỉ ra phương hướng cho công việc sau này.

1. Giả sử có mội bài toán nào đó, nếu chuyển sang ngôn ngữ phương trình, thì dẫn đến một hệ bốn phương trình với bốn ẩn và không phải phương trình nào trong hệ cũng đều chứa tất cả các ẩn. Ta muốn nhấn mạnh đặc tính đó của hệ, cho nên ta đưa ra những kí hiệu để chỉ rõ những ẩn nào có mặt trong mỗi phương trình; các chi tiết khác, ta không quan tâm đến. Giả sử, các phương trình viết như sau:

$r_1(x_1) = 0,$

$r_2(x_1, x_2, x_3) = 0,$

$r_3(x_1, x_2, x_3) = 0,$

$r_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0.$

Viết như trên có nghĩa là phương trình thứ nhất chỉ chứa một ẩn x_1, trong khi hai phương trình sau chứa ba ẩn đầu tiên x_1, x_2, x_3 và chỉ có phương trình thứ tư, phương trình cuối cùng là chứa cả bốn ẩn.

Đặc điểm này của hệ phương trình gợi ý cho ta một kế hoạch thật là hiển nhiên để giải hệ này. Ta bắt đầu từ ẩn x_1 mà ta tìm được từ phương trình thứ nhất. Tính được x_1 rồi, ta nhận thấy rằng hai phương trình tiếp sau tạo thành một hệ mà từ đó có thể xác định

được hai ẩn tiếp theo x_2 và x_3. Sau khi tính được x_1, x_2 *và* x_3 theo cách trên, ta dùng phương trình cuối cùng, phương trình thứ tư, để xác định ẩn cuối cùng x_4.

2. Bây giờ, ta hãy hình dung hệ phương trình vừa xét diễn đạt điều kiện của một bài toán nào đó. Giả sử, điều kiện đó được chia nhỏ thành bốn phần và mỗi phương trình biểu thị một phần nào đó (hay một điều, hay một khoản) của điều kiện; ở đây, ta muốn ngụ ý rằng mỗi phương trình diễn đạt mối quan hệ giữa các ẩn và các dữ kiện có mặt trong phương trình đó, thể theo phần điều kiện tương ứng với phương trình đó. Thành thử điều kiện trong bài toán của ta có một nét riêng biệt: không phải khoản nào của điều kiện cũng đều chứa tất cả các ẩn. Các kí hiệu quy ước sẽ cho thấy rõ những ẩn nào tham gia trong khoản này hay khoản khác của điều kiện.

Cũng dễ hiểu rằng có thể chia nhỏ điều kiện thành nhiều khoản theo cách đặc biệt vừa nêu trên (tức là: sao cho mỗi khoản chứa đựng một tổ hợp riêng các ẩn trong điều kiện), dù ta chưa chuyển được các khoản đó sang ngôn ngữ phương trình hay nói chúng ta không thể nào làm được việc đó. Ta có đủ cơ sở để cho rằng kế hoạch vạch ra trên nét sơ lược trong mục nhỏ 1 cho một hệ phương trình, có thể vẫn *giữ nguyên ý nghĩa* của nó - theo một nghĩa nhất định - cả đối với một hệ gồm bốn khoản điều kiện, dù các khoản đó chưa diễn đạt được dưới dạng đại số, hay nói chung không thể diễn đạt được bằng đại số.

Nhận xét trên mở ra trước mắt chúng ta những triển vọng rộng lớn mới, những khả năng mới.

3. Để phân tích thật đầy đủ các khả năng đó, ta phải giải thích các kí hiệu vừa đưa ra theo cách khác đi một chút.

Từ trước đến nay, ta vẫn xét kí hiệu $r(x_1, x_2, \dots, x_n)$ theo nghĩa được mọi người thừa nhận, tức là như một biểu thức đại số (hay như một đa thức, hay như một hàm) chứa các ẩn $x_1, x_2, \dots, x_n$.

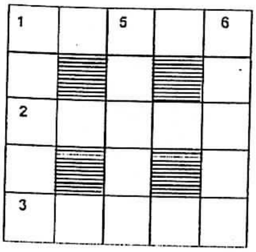
Phù hợp với điều đó, ta đã lí giải biểu thức: $r(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ như một phương trình (đại số) liên hệ các ẩn $x_1, x_2, \dots, x_n$. Khi ta gặp một bài toán trong đó $x_1, x_2, \dots, x_n$ đóng vai trò những ẩn, thì phương trình này diễn đạt một phần của điều kiện (một khoản trong điều kiện) tức là diễn đạt mối quan hệ đòi hỏi trong điều kiện giữa các ẩn $x_1, x_2, \dots, x_n$ và các dữ kiện.

Chúng tôi không có ý định bác bỏ cách lí giả trên, nhưng muốn mở rộng khuôn khổ của nó, cụ thể là chúng ta khẳng định ngay dù không thể chuyển được một khoản nào đó trong điều kiện sang ngôn ngữ phương trình và cho dù $x_1, x_2, \dots, x_n$ không phải là những "số chưa biết" mà là những "đối tượng chưa biết" thuộc bất kì loại nào chăng nữa thì đẳng thức tượng trưng $r(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ vẫn diễn đạt *mối quan hệ giữa các ẩn đã nêu* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *mà điều kiện bài toán đòi hỏi.*

Ta cũng có thể nói rằng đẳng thức tượng trưng này diễn đạt một phần điều kiện (một khoản, một điểm hạn chế hay một yêu cầu quy định trong điều kiện).

Bây giờ, cần đưa ra một số ví dụ để chúng ta hiểu đúng đắn các đặc điểm của lĩnh vực mở rộng ý nghĩa của kí hiệu $r(x_1, x_2,\dots, x_n)$, và nêu thêm một ví dụ bổ sung để chúng ta tin chắc rằng mở rộng như thế là có ích.

4. Có thể minh hoạ những điều kiện thoả thuận vừa nêu bằng một bảng ô đố chữ. Dưới đây là một ví dụ nhỏ thích hợp với mục đích của chúng ta (hình 6.1).



Hình 6.1. Bảng ô đố chữ

Từ trái sang phải	*Từ trên xuống dưới*
1. Một nhà toán học người Đức.	4. Một nhà toán học người Pháp.
2. Một phi công, nhưng không phải là bất kì phi công nào và không phải chỉ là phi công.	5. Thôi, ta nghỉ tay.
3. Ông ta từ trường học đến.	6. Ông ta cũng từ trường học đến.

Trong bảng ô đố chữ, ẩn là những từ. Giả sử x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 là sáu từ chưa biết cần phải điền vào các ô trắng trong hình 6.1. Các từ x_1 và x_4 bắt đầu từ cùng một ô, là ô đánh số 1 và x_1 phải viết theo dòng trên cùng (dòng ngang) từ trái sang phải, còn x_4 viết theo cột bên trái (cột dọc) từ trên xuống dưới, x_n trong đó $n = 2, 3, 5$ hay 6 biểu thị một từ mà chữ đầu tiên được điền vào ô đánh số n. Nếu phát hiện thật tỉ mỉ, rạch ròi tất cả các điều kiện thể hiện trên lược đồ hình vuông của ta (gồm những ô đen và ô trắng, những ô đánh số và ô không đánh số thì ta sẽ được một hệ gồm 21 điều kiện.

Trong số các điều kiện đó, có sáu điều kiện trội lên giữa các điều kiện khác, đó là những điều kiện "mấu chốt". Ta viết chúng như sau: $r_1(x_1) = 0$, $r_2(x_2) = 0,\dots, r_6(x_6) = 0$.

Ở đây, "đẳng thức" tượng trưng $r_1(x_1) = 0$ chẳng hạn, diễn đạt điều kiện sau đây: "từ x_1 là tên một nhà toán học người Đức"; "đẳng thức" $r_4(x_4) = 0$ cũng có nghĩa tương tự: "từ x_4 là tên một nhà toán học người Pháp"; "đẳng thức" $r_5(x_5) = 0$ nhấn mạnh một nghĩa (hãy còn khá mơ hồ) của câu "thôi ta nghỉ tay"...

Qua lược đồ, ta thấy còn sáu điều kiện nữa cho biết độ dài của sáu từ cần tìm

$$r_7(x_1) = 0,\ r_8(x_2) = 0,\ r_{12}(x_6) = 0.$$

Chẳng hạn điều kiện $r_7(x_1) = 0$ chỉ rõ độ dài của từ x_1. Trong trường hợp đang xét, sáu điều kiện này có nội dung là các từ $x_1, x_2,\dots, x_5$ mỗi từ đều gồm năm chữ.

Tiếp đó, lược đồ cho thấy những từ nào chứa những chữ giống nhau và các chữ này cụ thể nằm ở chỗ nào; cả thảy ta có chín điều kiện thuộc loại này:

$r_{13}(x_1, x_4) = 0$, $r_{14}(x_1, x_5) = 0$, $r_{15}(x_1, x_6) = 0$,

$r_{16}(x_2, x_4) = 0$, $r_{17}(x_1, x_5) = 0$, $r_{18}(x_2, x_6) = 0$,

$r_{19}(x_3, x_4) = 0$, $r_{20}(x_3, x_5) = 0$, $r_{21}(x_3, x_6) = 0$.

Trong trường hợp của ta, đẳng thức $r_{14}(x_1, x_5) = 0$ chẳng hạn, quy định chữ thứ ba của từ x_1 trùng với chữ đầu của từ x_5.

Bây giờ, ta đếm tổng số các điều kiện, tổng số đó là: $6 + 6 + 9 = 21$.

5. Nói chung, nếu bài toán chứa n ẩn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ và điều kiện chia nhỏ thành m phần (yêu cầu, điều kiện nhỏ, khoản, điểm hạn chế) (*) thì ta sẽ có một hệ gồm m hệ thức ràng buộc n ẩn; các hệ thức này có thể biểu diễn dưới dạng một hệ gồm m "phương trình", tượng trưng ràng buộc n ẩn của ta:

$r_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$

$r_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$

....

$r_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$

Trong chương 2, ta đã xét một trường hợp riêng của hệ này, trong đó các ẩn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là những số, các phương trình là những phương trình đại số thật sự (chứ không phải chỉ là tượng trưng!) và trong đó m là bằng n. Trong chương này, ta sẽ gặp luôn những trường hợp đặc biệt, giống như các trường hợp đã xét trong các mục nhỏ 1 và 2, tức là có một số phương trình không chứa hết các ẩn mà chứa một số ẩn thôi.

6. Có thể gặp trường hợp cùng một hệ phương trình tượng trưng đáp ứng hai bài toán. Hai bài toán này có thể thuộc những lĩnh vực hoàn toàn khác nhau, nhưng nếu, theo một nghĩa nhất định - trừu tượng nhiều hơn là cụ thể - mà chúng tương tự nhau, thì chúng sẽ có một cái gì là chung; cái "chung" đó, mà ta không dễ gì phát biểu chính xác, cho phép ta xếp hai bài toán vào cùng một loại. Theo con đường này, ta sẽ đi tới một sự phân loại tinh vi hơn cho các bài toán (ở đây muốn nói đến các bài toán *tìm tòi*). Thử hỏi, cách phân loại như thế có lợi gì cho chúng ta không? Liệu có thể có một quy trình giải áp dụng chung được cho hai bài toán có tính chất khác nhau, nếu nó đáp ứng cùng một hệ phương trình tượng trưng, hay không?

Câu hỏi này xem ra rất là bổ ích. Và mặc dù, nếu xem xét nó một cách thật là tổng quát thì vị tất nó đã mang lại nhiều lợi ích, song bản thân việc đặt câu hỏi này cũng đã rọi thêm ánh sáng vào một số trường hợp đặc biệt hơn, mà sau đây chúng ta sẽ đưa ra nghiên cứu.

§2. MỞ RỘNG PHẠM VI ÁP DỤNG PHƯƠNG PHÁP HAI QUỸ TÍCH

Trong mục trước, chúng ta đã phác hoạ một bức tranh rất tổng quát. Ta sẽ xếp những điều đã nhận xét được trước đây vào bức tranh đó như thế nào? Phương pháp đầu tiên mà chúng ta đã nghiên cứu trước đây chiếm một vị trí như thế nào trong bức tranh này?

(*) Ở trên ta ghi chú rằng hai số n và m này phụ thuộc vào cách nhìn nhận của ta đối với bài toán nhiều hơn là vào bản thân bài toán; chẳng hạn hai điều kiện quy định rằng trong hai số x và y không có số nào bằng không có thể thay bằng một phương trình $xy \neq 0\ldots$

1. Lời đáp của chúng ta cho câu hỏi này sẽ có sức thuyết phục hơn nếu trong phần sắp tới ta cũng vẫn sử dụng những thuật ngữ vừa đưa ra ở trên.

Trước đây, khi làm các bài tập dựng hình trong hình học, ta đã xét các "quỹ tích". Về thực chất mà nói, mỗi quỹ tích như thế là một tập hợp điểm. Rồi đây, ta sẽ gọi một tập hợp nào đó là một *quỹ tích* nếu nó xuất hiện theo một cách đặc trưng nào đó trong quá trình giải bài toán; xuất hiện như thế nào - điều này sẽ được thuyết minh trong các ví dụ sắp nêu dưới đây. Vì thuật ngữ "tập hợp" mà trong chú thích bổ sung cho chương 1 đã nói đến có một "lô" từ đồng nghĩa (loại, nhóm, phạm trù), nên hình như nếu có đưa thêm một thuật ngữ nữa có lẽ cũng chẳng ích gì. Song thuật ngữ "quỹ tích" có thể gợi nhớ lại một điều gì đó qua kinh nghiệm thu lượm được khi giải các bài toán hình học sơ cấp. Nhờ vậy, nó có thể gợi ý cho ta, theo phép tương tự những đường đi nước bước có ích áp dụng được vào một tình huống liên quan với những bài toán khác, có thể là khó hơn.

2. *Hai quỹ tích cho một điểm trên mặt phẳng.* Ta hãy quay trở về ví dụ đầu tiên, trong các ví dụ đã xét: *dựng một tam giác theo ba cạnh của nó.*

Ta xem qua lại một lần nữa lời giải quen thuộc của bài toán trình bày trong §2, chương 1. Sau khi đặt một trong các cạnh của tam giác, chẳng hạn cạnh n, là ta đã định được hai đỉnh B và C của tam giác. Chỉ còn phải tìm một đỉnh nữa là xong, đỉnh thứ ba này hiện nay ta chưa biết, ta sẽ kí hiệu là x. Theo điều kiện bài toán, điểm x phải thoả mãn hai yêu cầu:

r_1) điểm x phải cách đỉnh C đã biết một khoảng cho trước là b;

r_2) điểm x phải cách đỉnh B đã biết một khoảng cho trước là c;

Dùng kí hiệu đưa ra trong §1, ta viết các yêu cầu r_1 và r_2 dưới dạng những đẳng thức tượng trưng.

$r_1(x) = 0,$

$r_2(x) = 0.$

Các điểm x thoả mãn yêu cầu thứ nhất r_1 ("phương trình" tượng trưng thứ nhất) chiếm đầy đường tròn S, (có bán kính b, với tâm ở C, tức là đường S_1 là tập hợp quỹ tích các điểm thoả mãn yêu cầu r_1. Quỹ tích các điểm thoả mãn yêu cầu thứ hai r_2 ("phương trình" tượng trưng thứ hai) là đường tròn thứ hai S_2. Điểm x cần tìm là lời giải của bài toán nêu trên, phải thoả mãn cả hai yêu cầu, tức là phải thuộc về cả hai quỹ tích. Thành thử, tập hợp các lời giải của bài toán đang xét là giao của hai quỹ tích S_1 và S_2. Tập hợp này, nói chung, gồm hai điểm và do đó có hai lời giải, tức là hai tam giác đối xứng nhau qua cạnh BC.

3. *Ba quỹ tích cho một điểm trong không gian.* Ta hãy xét bài toán hình học không gian sau đây, tương tự như bài toán hình học phẳng đơn giản vừa nghiên cứu: Dựng một tứ diện biết sáu cạnh của nó.

Áp dụng quy trình nêu trong mục nhỏ 2 thoạt tiên ta hãy dựng đáy của tứ diện cần tìm, tức là dựng một tam giác theo ba cạnh, là cạnh của tứ diện. Sau khi dựng được đáy, ta

đã cố định được ba đỉnh của tứ diện, chẳng hạn A, B và C. Chỉ còn phải xác định một đỉnh nữa là xong và đỉnh thứ tư D này, hiện nay ta chưa biết, ta sẽ kí hiệu là x, khoảng cách từ đỉnh này đến ba đỉnh, mà ta đã biết vị trí, theo thứ tự là a, b và c (các độ dài này đã cho trước). Theo điều kiện bài toán, điểm x phải thoả mãn ba yêu cầu sau đây:

r_1) điểm x phải cách điểm A một khoảng là a,

r_2) điểm x phải cách điểm B một khoảng là b,

r_3) điểm x phải cách điểm C một khoảng là c.

Dùng các kí hiệu đưa ra trong §1, ta viết các yêu cầu này dưới dạng ba phương trình tượng trưng

$r_1(x) = 0,$

$r_2(x) = 0,$

$r_3(x) = 0.$

Các điểm x thoả mãn yêu cầu thứ nhất r_1) ("phương trình" tượng trưng thứ nhất) chiếm đầy mặt cầu Σ_1 (có bán kính a, với tâm tại A). Mặt cầu Σ_1, này tạo thành tập hợp hai quỹ tích các điểm thoả mãn yêu cầu thứ nhất r_1. Mặt cầu thứ hai Σ_2 và thứ ba Σ_3 lần lượt thoả mãn yêu cầu thứ hai và thứ ba; các mặt cầu này là quỹ tích của các điểm thoả mãn các yêu cầu đó. Điểm x lời giải của bài toán đang xét về dựng tứ diện, phải thoả mãn đồng thời cả ba yêu cầu; tức là phải thuộc cả ba quỹ tích. Do đó, tập hợp các lời giải của bài toán trùng với giao của ba quỹ tích nói trên (ba mặt cầu Σ_1, Σ_2 và Σ_3). Tập hợp này nói chung gồm hai điểm, cho đến có hai lời giải, tức là hai tứ diện đối xứng với nhau qua mặt phẳng của tam giác ABC.

4. *Quỹ tích của các điểm trong trường hợp đối tượng có tính chất tổng quát hơn.* Các ví dụ xét trong các mục nhỏ 2 và 3 có thể gợi ta nhớ lại một số bài toán nữa đã giải trong chương 1 cũng theo phương pháp này. Qua các ví dụ đó có thể phát hiện được một luận đề tổng quát.

Ẩn của bài toán là x. Điều kiện bài toán được chia nhỏ thành m khoản mà ta diễn đạt bằng một hệ gồm m "phương trình" tượng trưng

$r_1(x) = 0, r_2(x) = 0, \ldots, r_m(x) = 0.$

Các đối tượng x thoả mãn khoản thứ nhất phản ánh trong phương trình tượng trưng thứ nhất, tạo thành một tập hợp nào đó mà ta gọi là *quỹ tích thứ nhất*. Các đối tượng thoả mãn khoản thứ hai, tạo thành *quỹ tích thứ hai*; các đối tượng thoả mãn khoản cuối cùng tạo thành *quỹ tích thứ m*. Một đối tượng x là lời giải của bài toán này phải thoả mãn tất cả m khoản, tức là toàn bộ điều kiện bài toán, bởi vậy, nó bắt buộc phải thuộc tất cả m quỹ tích. Mặt khác, bất kì điểm nào đồng thời thuộc tất cả m quỹ tích, sẽ thoả mãn tất cả các khoản của điều kiện và do đó thoả mãn toàn bộ điều kiện bài toán, vì vậy nó là lời giải của bài toán. Nói vắn tắt: tập hợp các lời giải của bài toán, tức là tập hợp các đối tượng thoả mãn điều kiện bài toán, là giao của các quỹ tích nói trên.

Từ đó, suy ra khả năng khái quát hoá rộng rãi phương pháp hai quỹ tích, khả năng lập một lược đồ áp dụng được cho vô số trường hợp và giúp giải được hầu hết mọi bài toán; muốn thế, trước hết cần chia nhỏ điều kiện thành nhiều khoản thích hợp, rồi dựng các quỹ tích đáp ứng tất cả các khoản đó và cuối cùng sẽ được lời giải, là giao của các quỹ tích đó. Trước khi biện luận về lược đồ tổng quát này, ta hãy xét một vài trường hợp cụ thể.

5. *Hai quỹ tích cho một đường thẳng.* Dựng một tam giác, biết r, h_a và α.

Bạn đọc hẳn còn nhớ các kí hiệu đã dùng trong chương 1; r là bán kính đường tròn nội tiếp, h_a là đường cao hạ xuống cạnh α và α là góc đối diện cạnh a.

Bài toán này không phải dễ lắm, nhưng có một vài bước đầu tiên thật là hiển nhiên. *Liệu ta có thể giải bài toán này từng phần hay không?* Ta có thể dễ dàng vẽ một phần của hình cần tìm, cụ thể là vẽ đường tròn bán kính r và hai tiếp tuyến với nó hợp thành góc α (cần nhận xét rằng hai bán kính đi qua các điểm tiếp xúc tạo thành góc $180^0 - \alpha$). Đỉnh của góc α này sẽ là đỉnh A của tam giác cần tìm. Bây giờ, bài toán quy về việc dựng một đường thẳng (vô tận) có chứa đoạn đối diện với đỉnh A. Thành thử, nếu coi bộ phận đã dựng được của hình cần vẽ là đã biết, thì đường thẳng này - kí hiệu là x - sẽ là một ẩn mới của ta.

Điều kiện mà đường thẳng x phải thoả mãn gồm hai khoản:

r_1) x là tiếp tuyến với đường tròn bán kính r mà ta dựng được rồi,

r_2) x cách điểm đã cho A một khoảng là h_a.

Quỹ tích thứ nhất của x là tập hợp các tiếp tuyến với đường tròn bán kính r cho trước.

Quỹ tích thứ hai của x là tập hợp các tiếp tuyến với đường tròn bán kính h_a có tâm tại A. Giao của hai quỹ tích trên gồm các tiếp tuyến chung với hai đường tròn đó, các tiếp tuyến này, ta đã biết cách dựng (xem mục 1, §6, chương 1 và bài tập 35 chương 1).

Thực ra, chỉ có các tiếp tuyến chung ngoài mới là lời giải cho bài toán trên phù hợp với đề bài toán; còn những tiếp tuyến chung trong - có thể không có những tiếp tuyến này - sẽ dẫn đến một tam giác có đường tròn ngoại tiếp bán kính r).

Xem các tiếp tuyến chung của hai đường tròn như *giao của hai quỹ tích hợp thành bởi những đường thẳng,* ta sẽ đi đến một ý bổ ích, ý này càng có ích hơn nữa nếu vận dụng nó vào trường hợp giới hạn, khi một đường tròn suy biến thành một điểm.

6. *Ba quỹ tích cho một cố thể.* Ta hãy thiết kế một cái nút chai "vạn năng" có thể đậy khít ba kiểu miệng chai khác nhau: tròn, vuông và tam giác.

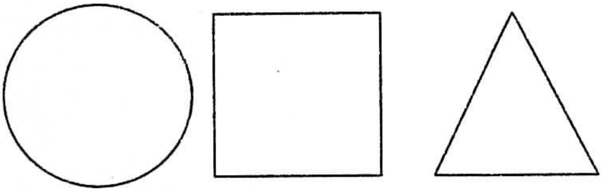
Ta xem hình 6.2a trên hình, vẽ một vòng tròn, một hình vuông và một tam giác cân, mà đường kính vòng tròn, cạnh hình vuông, đáy và đường cao của tam giác cân bằng nhau.

Dùng thuật ngữ hình học có thể nói rằng ba hình chiếu trực giác của cố thể cần tìm trùng với ba hình nói trên. Ta giả định (thực ra, giả định như vậy sẽ thu hẹp vấn đề lại) rằng các hình chiếu nằm trong ba mặt phẳng vuông góc với nhau. Trong bài toán của ta, cố thể là ẩn, kí hiệu là x chẳng hạn, điều kiện bài toán gồm ba khoản:

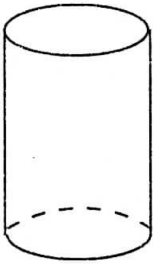
r_1) hình chiếu của x lên sàn là hình tròn.

r_2) hình chiếu của x lên tường bên là hình vuông.

r_3) hình chiếu của x lên tường hậu là tam giác cân.



Hình 6.2a. Ba kiểu miệng chai đối với cái nút chai vạn năng

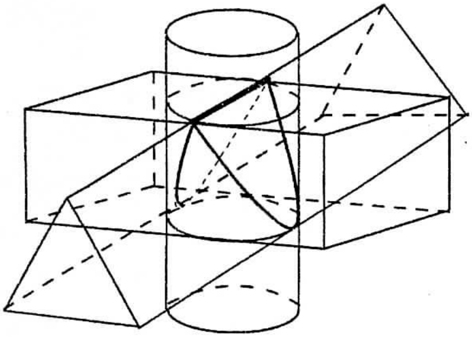


Hình 6.2.b. Quỹ tích thứ nhất

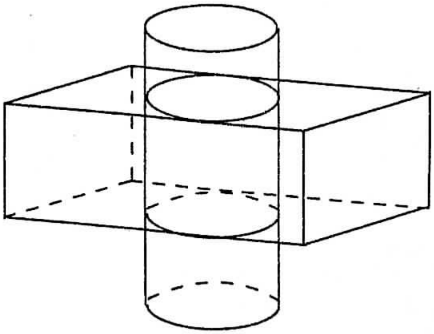
Ở đây, ngầm hiểu rằng có thể x đặt trong một phòng hình hộp chữ nhật, các phép chiếu là trực giao và kích thước của ba hình vẽ trên hình 6.2a như đã thuyết minh ở trên.

Trước hết, ta hãy nghiên cứu quỹ tích thứ nhất, tức là tập hợp các cố thể thoả mãn yêu cầu r_1). Hình tròn cho trước của ta nằm trên sàn. Ta hãy xét một đường thẳng thẳng đứng vô tận cắt vòng tròn này; đường thẳng này ta gọi là "dây dọi". Các dây dọi đó chiếm đầy một hình trụ tròn vô tận *(hình 6.2b)* mà thiết diện là hình tròn của ta. Cố thể x sẽ thoả mãn yêu cầu thứ nhất, nếu nó là một phần của hình trụ tròn này và chứa ít ra là một điểm của mỗi dây dọi hợp thành hình trụ tròn. Tập hợp tất cả các cố thể như thế chính là quỹ tích thứ nhất của ta.

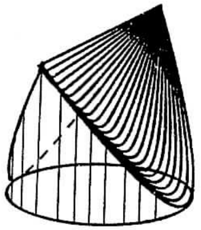
Quỹ tích thứ nhất có liên quan với một trụ tròn vô tận như thế nào, thì hai quỹ tích kia cũng có liên quan với hai lăng trụ (nằm ngang) vô tận tương tự như thế. Thiết diện của lăng trụ ứng với yêu cầu r_2) là một hình vuông, giả sử lăng trụ này nằm dài theo hướng từ đông sang tây *(hình 6.2c)*. Khi đó, lăng trụ ứng với yêu cầu r_3) mà thiết diện là một tam giác cân sẽ nằm dài theo hướng từ bắc xuống nam *(hình 6.2d)*.



Hình 6.2c. Hai quỹ tích



Hình 6.2d. Ba quỹ tích



Hình 6.2e. Cái nút chai vạn năng tốt nhất

Mọi cố thể thuộc cả ba quỹ tích sẽ là lời giải của bài toán, tức là là một "nút chai vạn năng", cố thể thuộc loại này có thể tích lớn nhất là giao của ba cố thể vô tận nói trên, tức là của một hình trụ và hai lăng trụ; cố thể này được phác hoạ trên hình 6.2e.

(Vì sao nó lại có thể tích lớn nhất. Bạn hãy vẽ các phần của bề mặt cố thể. Rồi vẽ một số cố thể khác cũng là lời giải của bài toán).

7. *Hai quỹ tích cho một từ.* Trong bảng ô chữ dùng để chơi đố chữ, ta gặp câu đố sau đây: "This form of rash aye is no pfoof" (7 letter) nghĩa là:

"Cái hình thức "vâng ngay" ấy không phải là chứng minh" (7 chữ). (*)

Đây là một câu thiếu mạch lạc, thậm chí ta có thể hiểu là: "Nếu anh cứ hấp tấp nói "vâng" thì không chứng minh được cái gì". Song ta có thể ngờ rằng chút xíu ý nghĩa đó đưa vào trong câu chỉ cốt đánh lạc hướng chúng ta. Và bây giờ, ta có thể đưa ra một kiểu giải thích hay hơn: từ "hình thức" có thể có nghĩa là "đồng trọng" (tức là một từ có cùng những chữ như từ kia). Và nếu thế thì có thể giảng nghĩa câu đố trên như sau:

Ẩn x là một từ. Điều kiện gồm hai phần:

r_1) x là một "đồng trọng" của từ "rash aye" (vâng ngay),

r_2) "x không phải là một chứng minh" phải là một câu có ý nghĩa (thậm chí là một câu rất quen thuộc).

Bây giờ, ta hãy nghiên cứu bài toán theo cách giải thích mới. Điều kiện phân chia rành mạch thành hai khoản: r_1) liên quan đến số chữ trong từ, r_2) liên quan đến nghĩa của từ. Ứng với mỗi khoản sẽ là một "quỹ tích" nào đó, mặc dù các quỹ tích này ta khó mà bao quát được hết như trong các trường hợp trước.

Quỹ tích thứ nhất, tự nó đã đủ rõ ràng. Ta có thể xếp bảy chữ: AAEYHRS theo 2520 cách khách nhau (ở đây có lẽ bạn đọc cũng chẳng cần phải quan tâm đến nguồn gốc con số này, cụ thể là $\frac{7!}{2!}$). Ví thử nhất thiết cần phải làm việc này thì ta cũng có thể viết ra 2520 cách xếp khác nhau bằng bảy chữ đã cho (không trùng lặp và không bỏ sót và do đó khai thác hết khả năng của khoản r_1), tức là mô tả hay tái hiện đầy đủ quỹ tích đang xét. Song, đó là một việc rất vất vả và không cần thiết (bởi vì phần lớn cách xếp đó là những tổ

(*) Ở đây, cũng như trong một số bài toán về đố chữ sau này, chúng tôi sử dụng câu trong nguyên bản tiếng Anh, vì không có khả năng đặt một câu đố tương đương theo tiếng Việt (N.D).

hợp các nguyên âm và phụ âm không bao giờ gặp trong tiếng Anh). Vả lại, người ta cũng không yêu cầu viết ra hết tất cả các trường hợp có thể trong bài toán một cách máy móc, vì làm như vậy chẳng phù hợp chút nào với tinh thần đố chữ là một trò chơi vui, giải trí. Nếu không phải là về nguyên tắc thì trên thực tế, quỹ tích đáp ứng khoản r_1) cũng là bất tận, ta không thể bao quát hết được. Quỹ tích tương ứng với khoản r_2) chẳng những là bất tận mà còn phần nào mơ hồ nữa. Cho một từ *x*, câu "*x* không phải là chứng minh" có nghĩa không? Câu đó có phải là một câu bình thường không? Trong nhiều trường hợp, câu trả lời còn phải bàn cãi.

Vậy vì nhiều lí do khác nhau, không có cái nào trong hai quỹ tích trên dùng được trong thực tế và không có cái nào trong hai quỹ tích trên có thể mô tả bao quát hay dựng được một cách thoả đáng. Và đĩ nhiên, ta không có một quy trình rành mạch để tìm ra giao của hai quỹ tích đó. Tuy vậy, hình dung điều kiện bài toán gồm hai khoản khác nhau và từ cần tìm phải thoả mãn cả hai khoản đó cũng vẫn là có ích. Thoạt đầu, tập trung chú ý vào một khoản, rồi sau đó vào khoản kia, ngẫm nghĩ về những từ đại khái thoả mãn khoản thứ nhất hoặc khoản thứ hai, tấn công theo một hướng này, rồi theo hướng kia, cứ theo cách đó, cuối cùng ta sẽ có thể lục soát lại trí nhớ của mình, rà đi rà lại vốn từ và câu của mình đến mức đột nhiên nảy ra từ cần tìm.

(Ở trên, chúng tôi đã nhấn mạnh rằng không có khoản nào trong hai khoản r_1) và r_2) có thể dùng được trong thực tế, quan điểm này rất có ích để đánh giá chung khả năng ứng dụng lược đồ vừa xét. Trên thực tế, bao giờ cũng xảy ra tình trạng một trong hai khoản đó tiện lợi hơn khoản kia, - nhận thức này có thể giúp ích ta khi giải một câu đố nho nhỏ nào đó.

§3. NÊN BẮT ĐẦU TỪ KHOẢN NÀO CỦA ĐIỀU KIỆN

Trong mục trước, ta đã xét những kiểu bài toán khác nhau và đã giải các bài toán đó bằng cùng một phương pháp có thể gọi là "phương pháp *m* quỹ tích". Chỉ còn một bài toán, bài cuối cùng trong mục 7, §2 là chưa giải). Vậy thì cái khó của bài toán này là ở chỗ nào? Ta đã chia điều kiện thành nhiều khoản một cách khá khéo léo, nhưng ta chưa biết cách vận dụng các quỹ tích tương ứng với các khoản đó, ta chưa khai thác hết được các quỹ tích đã tìm ra, ta chưa mô tả được chúng một cách thích đáng và kết quả là ta chưa thể tạo ra được giao của chúng.

Có những trường hợp, điều khó khăn mà ta vấp phải không đến nỗi quá lớn, khi đó, ta có thể giải quyết được khó khăn ấy.

1. *Hai quỹ tích cho một từ.* Trong bảng ô đố chữ, ta đọc thấy một "câu đố" như sau: "Flat both way (5 chữ)". (Nghĩa là: "Phẳng lì cả hai phía"- 5 chữ (*)).

(*) Một từ trong tiếng Anh (N.D).

Sau vài ba lần làm thử, có thể đi đến cách giải thích sau đây: ẩn x là một từ. Điều kiện gồm hai khoản:

r_1) x có nghĩa là một cái gì "phẳng lì".

r_2) x là một từ gồm năm chữ (**), mà đọc xuôi hay đọc ngược cũng vẫn có nghĩa là "phẳng lì".

Vậy ta nên bắt đầu từ khoản nào của điều kiện? Chuyện đó có khác nhau đấy. Để sử dụng điều kiện r_2) một cách có hiệu quả, ta buộc phải nhớ trong đầu bản liệt kê tất cả các từ năm chữ mà đọc xuôi hay đọc ngược, nghĩa vẫn không thay đổi. Song khó có ai lại có sẵn một bản liệt kê như vậy, trong khi phần lớn chúng ta đều có thể nhớ được những từ ít nhiều phù hợp với nghĩa của "phẳng lì"; ta chỉ việc, mỗi khi nảy ra một từ nào trong đầu thì thử lại xem có thoả mãn điều kiện r_2) không. Xin nêu một số từ: even (phẳng phiu), smooth (nhẵn nhụi), unbroken (liền, không bị đứt) - plain (bằng phẳng), dull (đều đều, nhạt nhẽo) - horizontal (nằm ngang) - và dĩ nhiên LEVEL (đồng bằng).

2. Chúng ta hãy thử gắng nêu lên đặc điểm đặc trưng của quy trình vừa xét trên.

Trong khoản r_1), trong tập hợp rộng tất cả các từ ta chọn ra một tập hợp con những từ nào trong đó có một từ là lời giải. Trong khoản r_2), ta cũng làm như thế, song có điều khác là ở đây việc lựa chọn khó khăn hơn rõ rệt: vận dụng khoản r_1) có thể đạt kết quả tốt hơn vận dụng khoản r_2). Ta đã vận dụng khoản thuận tiện hơn để lựa chọn sơ bộ các từ và khoản bất tiện hơn để lựa chọn lần sau. Thoạt tiên mà có được khả năng lựa chọn thuận tiện là một điều quan trọng, bởi vì lần đầu các đối tượng được lựa chọn trong số vốn khổng lồ tất cả các từ, còn lần thứ hai thì các từ được lựa chọn trong một quỹ tích hạn chế hơn nhiều thu được qua lần lựa chọn sơ bộ.

Quy tắc ở đây cũng giản dị thôi: ứng với mỗi khoản là một quỹ tích. *Hãy bắt đầu từ khoản nào có thể dựng được quỹ tích cụ thể nhất, có hiệu lực nhất.* Làm như thế, bạn khỏi phải dựng đầy đủ các quỹ tích đáp ứng các khoản còn lại, bởi vì các khoản đó có thể để đến sau này, khi lựa chọn trong quỹ tích thứ nhất mới dùng đến.

3. *Hai quỹ tích cho một ẩn ba thành phần.* Hỏi vị thuyền trưởng bao nhiêu tuổi, có mấy con và tàu của ông ta dài bao nhiêu, nếu tích của ba số (nguyên) đó bằng 32118. Giả định rằng chiều dài của tàu tính ra mét (và bằng nhiều mét, tức là hơn 1 mét); vị thuyền trưởng có nhiều (hơn 1) con trai và nhiều con gái, số tuổi của ông ta nhiều hơn số con, nhưng ông ta chưa thọ đến một trăm tuổi.

Trong câu đố này, cần tìm các số

x	y	z
lần lượt biểu thị số con	số tuổi của thuyền trưởng	chiều dài chiếc tàu.

Ở đây, nên hình dung bài toán theo cách: chỉ có một ẩn nhưng ẩn này không giản đơn là một số mà là "một ẩn ba thành phần" một số "bộ ba" (x, y, z).

(**) Một từ trong tiếng Anh (N.D).

Điều rất quan trọng là phải biết cách phân chia điều kiện trong đề toán thành những khoản thích hợp. Việc này đòi hỏi phải nghiên cứu kĩ lưỡng các chi tiết và phải ghép các phần của điều kiện thành những nhóm khác đi rõ rệt. Sau nhiều lần làm thử (chúng tôi bỏ qua, không trình bày ra đây), ta có thể đi tới hai khoản sau đây:

r_1) x, y và z là những số dương $\neq 1$ mà tích $xyz = 32118$,

r_2) $4 \leq x < y < 100$.

Vậy thì trong hai khoản đó ta nên bắt đầu từ khoản nào? Dĩ nhiên, nên bắt đầu từ khoản r_1) là khoản chỉ để lại một số hữu hạn khả năng, trong khi khoản r_2) nói chung không hạn chế z và do đó sẽ để lại một tập hợp khả năng vô tận.

Cho nên, ta hãy bắt tay vào nghiên cứu khoản r_1). Vì số 32118 chia hết cho 6, nên có thể dễ dàng phân tích nó ra thừa số nguyên tố.

$32118 = 2.\ 3.\ 53.\ 101.$

Muốn có được một khai triển của số 32118 ra ba thừa số, ta cần kết hợp hai thừa số nào đó trong bốn thừa số vừa viết trên. Như vậy, cả thảy có 6 khả năng khác nhau biểu diễn số 32118 dưới dạng một tích ba thừa số khác 1:

6. 53. 101,

3. 101. 106,

3. 53. 202,

2. 101. 159,

2. 53. 303,

2. 3. 5353.

Trong sáu khả năng đó, căn cứ theo yêu cầu nêu trong khoảng r_2), phải loại bỏ tất cả các khả năng, trừ khả năng thứ nhất và như vậy là ta được $x = 6$, $y = 53$, $z = 101$.

Vị thuyền trưởng có 6 con, 53 tuổi và chiếc tàu của ông ta dài 101 mét.

Tư tưởng cơ bản của cách giải câu đố đơn giản này thường được vận dụng vào những trường hợp phức tạp hơn. Nội dung của tư tưởng đó là: tách ra trong điều kiện một khoản "mấu chốt", là khoản chỉ để chừa lại một số khả năng không nhiều lắm, rồi trong số các khả năng này sẽ tiến hành lựa chọn bằng cách sử dụng phần "thứ yếu" còn lại của điều kiện. (*)

4. *Hai quỹ tích cho một hàm.* Có một kiểu bài toán toán học rất quan trọng, gặp hàng ngày trong môn vật lí và kĩ thuật, mà điều kiện được phân chia một cách tự nhiên thành hai khoản: cần tìm một hàm cho trước bằng một phương trình vi phân và các điều kiện ban đầu hay điều kiện biên. Dưới đây là một ví dụ đơn giản, trong đó ẩn là một hàm của biến độc lập t; phải tìm một hàm thoả mãn:

(*) So sánh với các bài tập 12 - 18 ở phần bài tập.

r_1) phương trình vi phân $\frac{d^2x}{dt^2} = f(x,t)$, trong đó $f(x, t)$ là một hàm cho trước.

r_2) các điều kiện ban đầu: $x = 1$, $\frac{dx}{dt} = 0$ với $t = 0$.

Trong trường hợp này, ta nên bắt đầu từ đâu? Từ phương trình vi phân hay từ điều kiện ban đầu? Cái đó còn tuỳ thuộc vào dạng của hàm $f(x, t)$ cho trước.

Trường hợp thứ nhất. Giả sử $f(x, t) = -x$ tức là ta giả định rằng phương trình vi phân ban đầu có dạng $\frac{d^2x}{dt^2} = -x$.

Phương trình vi phân này thuộc một kiểu trong một số ít kiểu mà ta có khả năng biểu diễn "tích phân tổng quát" dưới dạng tường minh. Thật vậy dạng tổng quát nhất của hàm thoả mãn phương trình vi phân này là:

$x = A\cos t + B\sin t$

trong đó A và B là những hằng số tuỳ ý (hằng số tích phân). Như vậy là ta đã tìm được "quỹ tích" đáp ứng khoản r_1).

Bây giờ, ta chuyển sang khoản r_2) và dùng khoản này để tách ra lời giải từ quỹ tích thứ nhất đã tìm được. Đặt $t = 0$ trong biểu thức của x và $\frac{dx}{dt}$, từ các điều kiện ban đầu, ta được $A = 1$, $B = 0$, $x = \cos t$.

Trường hợp thứ hai. Giả sử khi giải phương trình vi phân, ta không tìm được tích phân tổng quát của nó (hay một tích phân nào đó trong số các tích phân riêng của nó) và ta đã đi đến kết luận là dù có cố gắng theo phương hướng này thêm nữa cũng vô ích. Vậy, ta sẽ làm gì tiếp đây? Ta nên bắt đầu từ khoản nào trong hai khoản r_1) và r_2) đây?

Trong tình huống này, có thể dùng r_2) trước; ta biểu diễn x dưới dạng một chuỗi nguyên (khai triển theo luỹ thừa của biến độc lập t), mà hai hệ số đầu tiện u_o và u_1 được xác định bằng các điều kiện ban đầu, còn các hệ số còn lại $u_2, u_3, u_4, \dots$ thì hiện vẫn chưa được xác định (thực ra, chúng sẽ là những ẩn mới của ta; so sánh với bài tập 87 chương 3): $x = 1 + u_2t_2 + u_3t_3 + u_4t_4 + \dots$

Vậy, theo một ý nghĩa nào đó, ta đã tìm được quỹ tích đáp ứng khoản r_2). Bây giờ, có thể chuyển qua khoản thứ nhất, tức là r_1), bằng cách sử dụng phương trình vi phân đã cho để tìm ra các hệ số còn lại $u_2, u_3, u_4, \dots$ (dùng phương pháp đệ quy, nếu có thể được; xem bài tập 87 chương 3 vừa nhắc ở trên).

Có thể nhận xét rằng phương trình vi phân trong mọi trường hợp đều có tính "chọn lọc" hơn (tức là thu hẹp hơn nhiều việc lựa chọn hàm) so với điều kiện ban đầu. Thực vậy, dùng khoản r_2) ta chỉ xác định được hai hệ số của chuỗi nguyên, trong khi cả một dãy vô tận những hệ số còn lại thì phải dùng phương trình vi phân (tức là khoản r_1) để xác định. Từ đó, ta thấy rằng, không phải bao giờ bắt đầu từ khoản chọn lọc hơn cũng đều là hay cả.

§4. MỞ RỘNG LĨNH VỰC ÁP DỤNG PHÉP ĐỆ QUY

Trong mục trước, chúng ta đã nhận xét về tầm quan trọng của việc phân biệt các khoản trong điều kiện bài toán, vì có thể có những lí do (rất xác đáng) đòi hỏi ta phải bắt đầu công việc từ một khoản nhất định nào đó, chứ không thể từ một khoản khác. Thực ra, cho đến đây, ta chỉ mới xét những bài toán có một ẩn; trường hợp này có thể xem là một trường hợp hạn chế (sự hạn chế này thực ra cũng không quan trọng, về vấn đề này xem chỉ dẫn trong §5, chương 5). Bây giờ, ta hãy xét trường hợp giải bài toán có nhiều ẩn.

1. Một loạt ví dụ xét trong chương 3 cho phép ta nêu lên một luận đề tổng quát quan trọng. Giả sử có một hệ gồm n ẩn $x_1, x_2, \dots, x_n$ thoả mãn n điều kiện sau đây:

$r_1(x_1) = 0,$

$r_2(x_1, x_2) = 0,$

$r_3(x_1, x_2, x_3) = 0.$

Hệ đặc biệt này, gồm n hệ thức, chẳng những chỉ dẫn cho ta thấy nên bắt đầu từ đâu, mà còn cho ta thấy cần tiến hành tiếp tục theo phương hướng nào. Về thực chất mà nói, hệ này gợi ý cho ta toàn bộ kế hoạch "tiến công".

Từ hệ thức thứ nhất, ta tìm được x_1, có x_1 rồi, ta xác định được x_2 từ hệ thức thứ hai, biết x_1 và x_2 rồi, ta tìm được x_3 từ hệ thức thứ ba... Về thực chất, bằng cách sử dụng các ẩn đã tìm được trước để xác định ẩn tiếp sau, ta sẽ lần lượt thu được giá trị của tất cả các ẩn và thu được đúng theo thứ tự đánh số của chúng.

Kế hoạch này được thực hiện một cách tốt đẹp nếu hệ thức thứ k.

$r_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k) = 0$

đối với mọi $k = 1, 2, 3, \dots, n$ là một phương trình mà từ đó ta biểu diễn được x_k theo $x_1, x_2, \dots x_{k-1}$. Nếu phương trình này là tuyến tính đối với x_k (dĩ nhiên hệ số của x_k không được triệt tiêu) thì có thể coi đó là trường hợp thuận lợi đặc biệt.

Đó chính là phương pháp đệ quy: ta tìm được x_k theo kiểu đệ quy, tức là quay lại sử dụng các đại lượng đã tìm được trước đó: $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$.

Sử dụng phương pháp này, ta tiến dần từng bước, từng bước, một cách tự nhiên, bắt đầu từ x_1, sau x_1 đến x_2, sau x_2 đến x_3, tức là ta tiến hành đúng là theo cách xem chừng hiển nhiên nhất và hợp lí nhất. Ở mỗi giai đoạn mới, ta sử dụng hết tất cả thông tin thu lượm được trước đó, điều này có lẽ là nét đặc trưng nhất của phương pháp. Ta sẽ thấy rõ đặc điểm này hơn nữa sau khi xét một vài ví dụ.

2. Trong mục nhỏ 3, §5, chương 2, ta đã thu được một hệ bảy phương trình với bảy ẩn. Ta kí hiệu chúng theo kiểu mới như sau:

$S = x_7$

$a = x_4 \quad b = x_5 \quad c = x_6$

$l = x_1 \quad m = x_2 \quad n = x_3.$

Bây giờ, ta viết lại hệ phương trình trên, mà chỉ cần chỉ rõ ẩn nào liên hệ với phương trình nào, chứ không cần chú ý đến các chi tiết khác; ngoài ra, ta đánh số lại các phương trình sao cho thấy rõ được cần phải xét chúng theo thứ tự nào.

Ta sẽ được một hệ thức sau đây:

$r_1(x_2, x_3) = 0,$

$r_2(x_3, x_1) = 0,$

$r_3(x_1, x_2) = 0,$

$r_4(x_2, x_3, x_4) = 0,$

$r_5(x_3, x_1, x_5) = 0,$

$r_6(x_1, x_2, x_6) = 0,$

$r_7(x_4, x_5, x_6, x_7) = 0.$

Với cách viết này, ta suy ra được kế hoạch hiển nhiên sau đây: tách riêng ba hệ thức đầu tiên ra. Ba hệ thức này chỉ chứa ba ẩn đầu tiên x_1, x_2, x_3 và có thể xem chúng như một hệ ba phương trình với ba ẩn. Thật vậy, từ hệ ba phương trình nêu trong m.3 §5, chương 2 tương ứng với ba hệ thức đầu tiên ở đây, ta dễ dàng tìm được $x_1 = l$, $x_2 = m$, $x_3 = n$. Sau khi tìm được ba ẩn đầu tiên x_1, x_2, x_3, hệ của ta "trở thành một hệ đệ quy". Thoạt tiên, ta tìm các ẩn x_4, x_5, x_6 - mỗi hệ thức có số thứ tự tương ứng với ẩn (thực ra, thứ tự xét ba ẩn này không có ý nghĩa gì hết). Tìm được x_4, x_5, x_6 rồi, từ hệ thức cuối cùng, ta sẽ xác định được x_7 (ẩn này là ẩn chính trong bài toán ban đầu ở m.3, §5, chương 2: tất cả các ẩn kia mà ta đưa vào chỉ là những ẩn phụ).

Bạn đọc nên so sánh hệ vừa xét với hệ đã gặp trong m.1, §1.

3. *Giải phương trình*

$\overline{(\text{he})}^2 = \overline{\text{she}}$ (*)

trong đó $\overline{\text{he}}$ và $\overline{\text{she}}$ là những số thường xuyên (nguyên dương) viết theo hệ thập phân (chứ không phải là tích của các chữ số) một số là số có hai chữ số, số kia có ba chữ số, h, e và s là những chữ số. Bài toán này có thể phát biểu theo cách khác, dài dòng hơn: tìm các số h, e và s thoả mãn hệ thức $(10h + e)^2 = 100s + 10h + e$, trong đó h, e và s là những số nguyên và $1 \leq h \leq 9$, $0 \leq e \leq 9$, $1 \leq s \leq 9$.

Câu đố nhỏ này không có gì khó lắm và nếu bạn đọc tạm gấp sách lại và tự lực giải bài toán, thì bạn đọc sẽ có thể đánh giá được đồ nêu trên được đầy đủ hơn. Ở giai đoạn đầu tiên, ta chỉ xét một ẩn. Chuyển sang giai đoạn sau, ta đưa thêm vào một ẩn nữa và xét hai ẩn cùng một lúc. Và chỉ trong giai đoạn cuối cùng, ta mới xét đồng thời b ẩn.

Giai đoạn (e). Ta bắt đầu từ e, vì số e tuân theo một yêu cầu riêng biệt: chữ số cuối cùng của số e^2 phải trùng với e. Liệt kê bình phương của tất cả mười chữ số:

(*) Trong tiếng Anh, "he" nghĩa là anh ấy, ông ấy, "she" nghĩa là chị ấy, bà ấy (N.D.)

$$0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81$$

ta nhận thấy trong mười số, chỉ có bốn số thoả mãn yêu cầu trên; vậy $e = 0$, hay 1, hay 5, hay 6.

Giai đoạn (e, h). Có thể phát triển yêu cầu chỉ liên quan với hai trong ba chữ số cần tìm, cụ thể là e và h như sau: $100 \leq \overline{(\text{he})}^2 < 1000$

từ đó, dễ dàng tìm được: $10 \leq \overline{(\text{he})} < 31$.

Kết hợp kết quả vừa thu được với kết quả thu được trong giai đoạn (e), ta xác định được rằng số có hai chữ số *he* phải trùng với một trong mười số sau đây:

10, 11, 15, 16,

20, 21, 25, 26,

30, 31.

Giai đoạn (e, h, s.). Liệt kê các bình phương của mười số vừa thu được:

100, 121, 225, 256,

400, 441, 625, 676,

900, 961.

ta chỉ thấy trong đó chỉ có một số thoả mãn đầy đủ điều kiện bài toán. Vậy:

$e = 5, h = 2, s = 6.$

$(25)^2 = 625.$

4. Trong mục nhỏ trước, ta đã chia điều kiện bài toán thành ba khoản, mà (nếu dùng các kí hiệu đưa ra trong §1, chương 6), có thể biểu diễn bằng một hệ ba phương trình tượng trưng.

$r_1(e) = 0,$

$r_2(e, h) = 0,$

$r_3(e, h, s) = 0.$

Ta hãy đối chiếu hệ gồm ba khoản này với hệ gồm ba phương trình tuyến tính dưới đây:

$a_1x_1 = b_1,$

$a_2x_1 + a_3x_2 = b_2,$

$a_4x_1 + a_5x_2 + a_6x_3 = b_3,$

trong đó x_1, x_2, x_3 là những ẩn, $a_1, a_2, \ldots, a_6$, b_1, b_2, b_3 là những số cho trước, trong đó a_1, a_3 và a_6 giả thiết là khác số không.

Ta hãy so sánh kĩ hai hệ mà chỗ giống nhau bộc lộ rõ hơn chỗ khác nhau.

Trước hết, ta nhìn vào hệ phương trình tuyến tính với các ẩn x_1, x_2, x_3; phương trình thứ nhất xác định ẩn thứ nhất x_1 một cách đơn trị, còn các phương trình kia không hề liên quan gì với giá trị đó của x_1 và không thể làm giá trị đó thay đổi. Phương trình thứ hai xác

định ẩn thứ hai x_2 một cách đơn trị, lúc đó phải sử dụng giá trị của x_1 đã tìm được ở phương trình thứ nhất.

Bây giờ, ta hãy xét hệ gồm ba khoản, là những phần chia nhỏ của điều kiện đặt ra cho các ẩn e, h, s. Về hình thức, hệ này tương tự với hệ ba phương trình đối với x_1, x_2, x_3, nhưng về thực chất thì lại khác rất nhiều.

Khoản thứ nhất xác định ẩn e một cách không đơn trị; nó chỉ thu hẹp miền các giá trị có thể của e mà thôi; nó vạch rõ *quỹ tích* của chữ số e (và đây là cách diễn đạt thích đáng nhất). Khoản thứ hai xác định ẩn thứ hai h một cách cũng không đơn trị; nó vạch rõ quỹ tích cho cặp ẩn (e, h) - và chỉ có khoản cuối cùng mới bảo đảm tính đơn trị của lời giải bài toán, bởi vì nó tách ra từ quỹ tích đã xác lập được qua hai khoản trước một bộ ba duy nhất (e, h, s) hoàn toàn thoả mãn điều kiện bài toán.

§5. LIÊN TIẾP CHIẾM LĨNH CÁC ẨN

Khi xét n ẩn bằng số $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ta có thể coi chúng là những thành phần liên tiếp của một ẩn nhiều thành phần x (xem §5, chương 5), chẳng hạn từ hệ phương trình đã gặp trong mục nhỏ 1, §4. Quy trình giải theo phép đệ quy sẽ bóc dần, liên tiếp hết bước này sang bước khác, lớp vỏ của ẩn nhiều thành phần của chúng ta. Thoạt đầu kiến thức của ta về ẩn đó còn ít: ta mới chỉ biết có một thành phần duy nhất x_1. Nhưng ta sẽ sử dụng kiến thức ban đầu đó để tiến thêm một bước: ta sẽ tìm thêm được thành phần thứ hai x_2. Mỗi bước, ta lại thêm một thành phần nữa bổ sung vào thông tin đã thu được trước đó, ta sử dụng những kiến thức đã biết để thu thêm những kiến thức mới. Ta chinh phục toàn lãnh thổ hết tỉnh này đến tỉnh khác và mỗi bước tiến quân ta lại lấy các tỉnh đã chiếm được làm *căn cứ tác chiến* để tấn công tiếp tỉnh sau.

Chúng ta gặp những trường hợp áp dụng quy trình trên dưới hình thức cải biên chút ít. Đôi khi, không nhất thiết mỗi chiến dịch chỉ chiếm một tỉnh: đã có trường hợp, vị tướng đi chinh phục chiếm được một vùng đất đai rộng lớn hơn - hai hay ba tỉnh một lúc (so sánh với mục nhỏ 2, §4 và mục nhỏ 1, §1) Cũng có trường hợp, qua một chiến dịch vẫn chưa chiếm hết một tỉnh; lại cũng có khi chiếm được một phần tỉnh này, rồi chiếm được một phần tỉnh khác và mãi đến cuộc tiến công cuối cùng mới chiếm hết được hai tỉnh (so sánh với mục nhỏ 3, §4).

Có thể, trước đây ta cũng đã gặp những kiểu khác của quy trình đang xét; chẳng hạn, ta đã có dịp tìm hiểu một phương pháp đặc biệt là phương pháp giải mở rộng (xem §7, chương 2), phương pháp này đã gây cho ta ấn tượng mạnh mẽ vì tính chất mới mẻ của nó. Nếu ẩn gồm nhiều thành phần (như trường hợp bảng ô đố chữ chẳng hạn) thì có thể "tiến công" cùng một lúc theo nhiều hướng; không nhất thiết ta cứ phải xâu tất cả các hạt cườm vào một sợi dây, mà cũng có thể dùng nhiều sợi dây. Song, điều căn bản nhất ở đây là phải làm sao *sử dụng thông tin đã thu được lúc trước làm căn cứ tác chiến để thu thông tin tiếp sau*. Với nghĩa này, có lẽ *tất cả* các quá trình hợp lí nghiên cứu và giải các bài toán đều có tính chất đệ quy cả.

BÀI TẬP VÀ CHÚ THÍCH BỔ SUNG CHO CHƯƠNG 6

1. Điều kiện gồm nhiều khoản. Trong hình vuông kì ảo gồm n dòng và n cột, có n^2 số, mà tổng các số trong mỗi dòng và trong mỗi cột, cũng như các số nằm dọc theo mỗi đường chéo chính của hình vuông, đều bằng nhau cả; tổng này gọi là "hằng số" của hình vuông kì ảo. Hình vuông kì ảo đơn giản nhất và quen thuộc nhất bao gồm 3 dòng và 3 cột và chứa chín số tự nhiên đầu tiên 1, 2,..., 9. Ta hãy phát biểu bài toán xây dựng hình vuông kì ảo này một cách tỉ mỉ hơn.

Những cái gì là ẩn? Có 9 số chưa biết, ta kí hiệu số cần tìm ở giao điểm giữa dòng thứ i và cột thứ k là x_{ik}; $i, k = 1, 2, 3$.

Điều kiện là những gì? Điều kiện gồm bốn loại yêu cầu khác nhau:

1) x_{ik} là số tự nhiên;

2) $1 \leq x_{ik} \leq 9$;

3) $x_{ik} \neq x_{ji}$ nếu $i \neq j$ hay $k \neq 1$ (hay đồng thời có cả hai bất đẳng thức);

4) $x_{i1} + x_{j2} + x_{i3} = x_{11} + x_{22} + x_{33}$ trong đó $i = 1, 2, 3$;

$x_{1k} + x_{2k} + x_{3k} = x_{11} + x_{22} + x_{33}$ trong đó $k = 1, 2, 3$;

$x_{13} + x_{22} + x_{31} = x_{11} + x_{22} + x_{33}$.

Hãy xác định số yêu cầu thuộc mỗi loại và tổng số yêu cầu. Với cách kí hiệu trong m.5, §1, các yếu cầu này có hình thức ra sao?

2. Dùng ẩn nhiều thành phần, hãy đưa hệ thống dưới dạng tổng quát xét trong m.5, §1 về hệ thống(chắc hẳn là hẹp hơn) xét trong mục nhỏ 4, §2.

3. Dùng ẩn nhiều thành phần, hãy đưa hệ xét trong m.1, §1 về trường hợp riêng xét trong mục nhỏ 1, §4.

4. Áp dụng quy trình nêu trong bài tập 3 cho hệ xét trong m.2, §4.

5. Lập kế hoạch giải hệ

$r_1(x_1, x_2, x_3) = 0,$

$r_2(x_1, x_2, x_3) = 0,$

$r_3(x_1, x_2, x_3) = 0,$

$r_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$

$r_5(x_1, x_2, x_3, x_5) = 0,$

$r_6(x_1, x_2, x_3, x_6) = 0,$

$r_7(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = 0.$

6. Hệ phương trình

$r_1(x_1) = 0,$

$r_2(x_1, x_2) = 0,$

$r_3(x_2, x_3) = 0,$

$r_4(x_3, x_4) = 0,$

....

$r_n(x_{n-1}, x_n) = 0,$

là một trường hợp riêng lí thú của một trong số các hệ đã xét trong phần lí thuyết; bạn hãy chỉ rõ đó là hệ nào?

Trước đây, bạn đã từng gặp hệ này chưa? Bạn đã gặp ở đâu trường hợp phải so sánh hai hệ có tương quan với nhau giống như thế?

7. Qua một điểm cho trước nằm trong một vòng tròn, hãy kéo một dây cung có độ dài cho trước. Hỏi, bài tập này thuộc loại bài toán nào?

8. Cho hai đường thẳng a và b và một điểm C, ngoài ra còn cho biết thêm một độ dài 1. Qua điểm C hãy vạch một đường thẳng x sao cho chu vi tam giác tạo thành bởi các đường thẳng a, b và x có độ dài bằng 1.

Hỏi bài tập này thuộc loại bài toán nào?

9. *Chỉ giữ lại một phần điều kiện.* Trong hai khoản của điều kiện bài toán xét trong mục nhỏ 7, §2 khoản r_1) có tiện lợi hơn ít nhiều, bởi vì khi tìm cách thoả mãn yêu cầu nêu trong khoản này, ta có thể phác hoạ tương đối dễ dàng được kế hoạch giải bài toán. Muốn tìm ra được từ "đồng trọng" với tập hợp các chữ "vâng ngay" (rash aye), ta phải tìm kiếm một từ gồm những chữ chỉ thuộc tập hợp đó và hơn nữa có đủ mặt các chữ đó. Ở đây, ta có thể vận dụng quy trình sau đây: ta tạm bỏ qua phần cuối của điều kiện tức là từ này phải "có đủ mặt các chữ đó" và gắng tìm kiếm những từ hay những bộ phận của từ đã học trong tu từ học như: tiền tố, vĩ tố hợp thành bởi các chữ thuộc tập hợp trên. Những từ ngắn thuộc loại này cũng dễ tìm; sau đó, chuyển qua những từ dài hơn, ta có thể hi vọng cuối cùng sẽ tìm được đồng trọng mong muốn. Trong trường hợp đang xét, ta có thể nghĩ ra những từ sau đây:

ASH, YES, SHI, RYE, EAR,

HEAR, HARE, AREA,

SHARE,

RE - (tiền tố)TT,

- ER, - AY, -EY (vĩ tố). (*)

Muốn giải được bài toán trong m.7, §2, ta phải nghiên cứu các "mảnh" từ này và chẳng những phải lưu ý đến bản thân từ đồng trọng (tức là khoản r_1), mà còn phải lưu ý và

(*) Chép theo nguyên bản tiếng Anh, theo thứ tự có nghĩa là TRO, VÂNG, NÓI, NHÚT NHÁT, LÚA MẠCH, ĐEN, TAI, NGHE, THƠ, DIỆN TÍCH, CHIA.

chủ yếu là phải lưu ý đến khoản r_2, có thể xếp một số mảnh lại thành từ đồng trọng, chẳng hạn SHI AREA (**) song không thể chấp nhận từ này làm lời giải được vì nó vô nghĩa.

10. *Sợi chỉ Arian.* Công chúa Arun, con vua Minốt đem lòng yêu chàng Têzê và trao cho chàng một cuộn chỉ để mỗi khi bước vào mê lộ, chàng sẽ gỡ dần cuộn chỉ để lúc trở ra sẽ lần theo đường dây mà đi giữa vô vàn đường ngang lối dọc chằng chịt.

Không biết bậc thiên tài nào của thuật phát minh trong thời tiền sử đã góp công sáng tạo nên thiên thần thoại này? Nó giống nội dung một số bài toán đến mức khiến ta phải kinh ngạc.

Trong quá trình cố xoay xở giải một bài toán, nhiều khi chúng ta rơi vào một tình thế khó khăn và không biết làm thế nào tiến lên thêm một bước từ cái điểm cuối cùng mình vừa đạt tới. Mê lộ là một bài toán có tính chất khác hẳn: từ một điểm nhất định mà ta đạt được, có nhiều lối đi tiếp; cái khó là ở chỗ không biết nên chọn con đường nào. Để định ra được phương hướng giải bài toán loại này (hay để vạch ra cách giải sau khi đã định được phương hướng), ta cần xét đối tượng nghiên cứu theo một *trình tự thích đáng*, theo một trật tự tiết kiệm nhất, phù hợp nhất với tinh thần bài toán và nếu ta đứng trước một tình huống phải "chọn một, bỏ những cái khác" thì ta *cần lựa chọn đối tượng tiếp sau sao cho có thể khai thác tối đa kết quả công việc đã làm trước đó.* Ý nghĩa của câu "chọn đúng đường ở chỗ ngã tư" được diễn đạt hoàn toàn chính xác bằng thành ngữ "sợi chỉ Arian", là một trong những thành ngữ Lép-nít rất ưa dùng.

Những bài toán phức tạp với nhiều ẩn, bao quát một số bài toán và điều kiện có liên quan qua lại với nhau, thường có tính chất một mê lộ; có thể lấy bảng ô đố chữ và việc dựng những hình hình học phức tạp làm ví dụ minh hoạ rất tốt. Đứng trước một bài toán phức hợp như vậy, ở mỗi giai đoạn giải, ta sẽ phải dừng lại lựa chọn: ta nên chuyển qua bài toán trung gian nào đây (từ nào, hay bộ phận nào của hình)? Ngay từ đầu, ta cũng phải cố tìm tòi một "chỗ yếu" nhất, một điểm thuận lợi nhất, để xuất phát, chẳng hạn một từ dễ đoán nhất trong bảng ô đố chữ hay một bộ phận dễ dựng nhất trong hình cần dựng. Sau khi tìm được một từ đầu tiên hay dựng được một yếu tố đầu tiên của hình, ta phải lựa chọn thật kĩ lưỡng bài toán thứ hai, tức là chọn một từ (hay một phần hình vẽ) khác với từ (hay phần hình vẽ) thứ nhất, mà ta có thể tìm được dễ dàng nhất dựa trên cơ sở từ thứ nhất (hay phần hình vẽ thứ nhất) vừa tìm được. Tiếp tục tiến hành theo tinh thần đó, mỗi lần ta đều phải chọn một bài toán trung gian tiếp sau, một ẩn tiếp sau làm sao có thể lợi dụng đến mức tối đa các ẩn đã tìm được trong những lần trước (ở đây chúng tôi đã trình bày lại quan điểm nêu trong §5, nhưng trình bày tỉ mỉ hơn).

Dưới đây, chúng tôi đưa ra một số bài toán giúp bạn đọc vận dụng những lời khuyên nói trên vào thực hành.

11. Tìm một hình vuông kì ảo gồm ba dòng và ba cột, mô tả bằng lược đồ trong bài toán 1 (có thể, bạn cũng đã biết một trong số lời giải bài toán này, nhưng ở đây ngầm hiểu là phải tìm hết tất cả các lời giải. Trình tự xét các ẩn ở đây có ý nghĩa rất quan trọng.

(**) Chép theo nguyên bản tiếng Anh, có nghĩa là DIỆN TÍCH NHÚT NHÁT.

Trước hết, ta hãy cố sắp xếp vào trong hình vuông kì ảo những ẩn được xác định một cách đơn trị, đó là điều quan trọng nhất!).

12. Một số có bốn chữ số nếu nhân với 9 thì thành một số cũng viết bằng những chữ số trước nhưng theo thứ tự đảo lại. Hỏi số đó là bao nhiêu?

(Bạn định dùng phần nào trong điều kiện trước tiên?)

13. Tìm các chữ số a, b, c và d, nếu biết $\overline{ab}\ \overline{ba} = \overline{cdc}$ và giả định rằng các chữ số a và b của số hai chữ số $\overline{ab}$ (tức là của số $10a + b$) là khác nhau.

14. Chứng minh rằng trong các số của dãy 11, 111, 1111, 11, 111... không có một số nào là bình phương của một số nguyên.

15. Người ta gọi ba cạnh và ba góc của một tam giác là những yếu tố của nó. Hỏi, có thể dựng được hai tam giác không bằng nhau một khi năm yếu tố của tam giác này đồng nhất với năm yếu tố của tam giác kia hay không? (Ở đây, không đòi hỏi các cạnh bằng nhau của hai tam giác đó phải "giống nhau").

16. Actơ, Bili và Corít cùng nhau chuẩn bị cho cuộc đi trại. Mỗi cậu đều mua bánh mì kẹp xúc xích, kem và nước quả và đều tiêu hết 9 đôla mỗi người. Tiền mua mỗi khoản (bánh mì, kem, nước quả) cộng gộp cả ba cậu lại cũng là 9 đôla, tuy rằng phần đóng góp của mỗi cậu một khác và không cậu nào mua hai khoản khác nhau với số tiền bằng nhau. Kể về tiền một người mua một thứ thì có khoản kem của Actơ là to tiền nhất, còn Bili thì chỉ tiêu vào khoản bánh mì xúc xích nhiều gấp đôi khoản kem. Hỏi Corít đã bỏ ra bao nhiêu tiền mua nước quả? (Giả thiết rằng tiền mỗi người mua mỗi khoản đều là một số nguyên đôla).

17. Sắp đến ngày lễ 1 tháng mười một(*), ba cặp vợ chồng B-rao, Giôn-xơ và X-mít mua một số quà nhỏ để tặng trẻ con láng giềng. Mỗi người (kể cả vợ hoặc chồng) mua đồng loạt một loại tặng phẩm. Và cặp vợ chồng nào thì vợ cũng tiêu nhiều hơn chồng 75 xu. Biết rằng Antơ mua nhiều hơn Bil B-rao một tặng phẩm, còn Betty thì mua ít hơn Giô Giôn-xơ một tặng phẩm. Hỏi Mêry (**) là vợ ai?

18. Một buổi trưa hè nóng nực, có bốn cặp vợ chồng uống cả thảy 44 chai côca côla. Bà Annơ uống 2, bà Betty uống 3, bà Kêrôn uống 4 và bà Đôrô uống 5 chai. Ông X-mít uống một số chai ngang với vợ, còn ba ông chồng kia thì uống nhiều hơn vợ: Ông B-rao uống nhiều gấp hai, ông Hoai-tơ uống nhiều gấp ba, ông G-rin uống nhiều gấp bốn vợ mình. Hỏi bà nào là vợ ông nào?

19. Một bữa, có một ông khách hỏi một giáo viên dạy toán: - Ông được mấy cháu và các cháu lên mấy?"

"Tôi được ba cháu" - Ông X-mít (tên ông giáo) trả lời - "tích của số tuổi các cháu là 72 và tổng của số tuổi các cháu bằng số nhà của tôi đấy".

(*) Ngày lễ Các thánh của đạo thiên chúa.

(**) Annơ, Betty và Mêry là tên phụ nữ, Bil, Giô là tên đàn ông, B-rao, Giôn-xơ và X-mít là họ.

Khách ra cổng xem số nhà; rồi trở vào bảo với chủ: "Bài toán này không xác định".

"Đúng, ngài nói phải đấy - ông X-mít trả lời - nhưng tôi vẫn hi vọng rằng thằng cháu lớn nhất nhà tôi sẽ chiếm giải tại cuộc thi ở Xten-pho(*).

Hãy cho biết số tuổi của từng con ông giáo, với luận cứ đủ vững chắc.

20. Những bài toán khác. Bạn hãy gắng tìm tòi thêm ví dụ thuộc về chủ đề chương này. Bạn hãy chú ý đến việc phân chia điều kiện thành nhiều khoản và cân nhắc xem bắt đầu công việc từ khoản này hay khoản khác thì lợi hại ra sao. Với quan điểm trình bày trong chương trình, bạn hãy xét lại một lần nữa một vài bài toán trước đây đã giải và hãy nghĩ thêm một số bài toán mới mà khi giải vận dụng quan điểm này có thể có ích.

21. Mục đích trung gian. Giả sử ta đã bắt tay vào giải một bài toán, nhưng loay hoay mãi vẫn không ra khỏi giai đoạn đầu tiên. Ta đã hiểu rõ đề toán, về toàn bộ; đó là một bài toán tìm tòi. Ta đã trả lời câu hỏi "cái gì là ẩn?", ta biết đối tượng cần tìm thuộc loại gì. Ngoài ra, ta đã liệt kê các dữ kiện và đã phân tích điều kiện bài toán; bây giờ, ta muốn chia nhỏ điều kiện thành những phần thích hợp.

Cần nhận xét rằng, bài toán trung gian này không phải bao giờ cũng tầm thường đâu, bởi vì có thể có nhiều cách chia nhỏ điều kiện và dĩ nhiên là ta muốn chọn cách nào lợi nhất. Chẳng hạn, khi giải một bài toán hình học bằng phương pháp đại số, ta sẽ biểu diễn mỗi khoản điều kiện bằng một phương trình; phân chia thành các khoản theo những cách khác nhau sẽ đi tới những hệ phương trình khác nhau và dĩ nhiên ta muốn có một hệ phương trình nào giải tiện nhất (so sánh các m.3 và m.4, §5, chương 2).

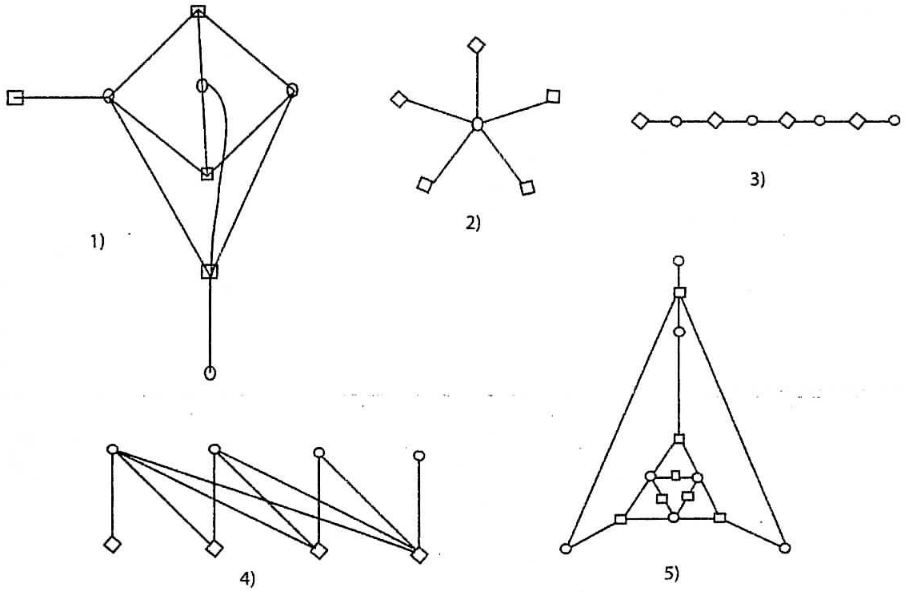
Điều kiện nêu trong đề toán có thể là khối thống nhất, nhưng cũng có thể đã chia nhỏ thành một số khoản. Trong mọi trường hợp, ta đều phải giải một bài toán trung gian: trong trường hợp thứ nhất thì chia nhỏ điều kiện thành một số khoản thích hợp; trong trường hợp thứ hai thì ta chia nhỏ điều kiện thành nhiều khoản hơn nữa một cách thích hợp. Chia nhỏ điều kiện thành nhiều khoản sẽ có thể dẫn ta đến gần lời giải, đó là mục đích trung gian của ta, có ý nghĩa rất quan trọng trong nhiều trường hợp.

22. *Biểu diễn đồ thị.* Giả sử ta đã diễn đạt mối quan hệ quy định bởi điều kiện bài toán (có chứa đựng những ẩn nào đó) bằng một phương trình tượng trưng (đưa ra trong m.3, §1). Cũng có thể biểu diễn các quan hệ này theo đồ thị, tức là bằng những biểu đồ; và cách biểu diễn đồ thị này có thể giúp ta hiểu rõ hơn hệ thống các quan hệ đã cho trong bài toán.

Trên biểu đồ, ta kí hiệu các ẩn bằng những hình tròn và mối quan hệ giữa các ẩn bằng những hình vuông và muốn diễn đạt rằng trong một quan hệ nào đó có sự tham gia của một ẩn nào đó, ta kéo một đường nối hình vuông với hình tròn. Chẳng hạn biểu đồ 1)

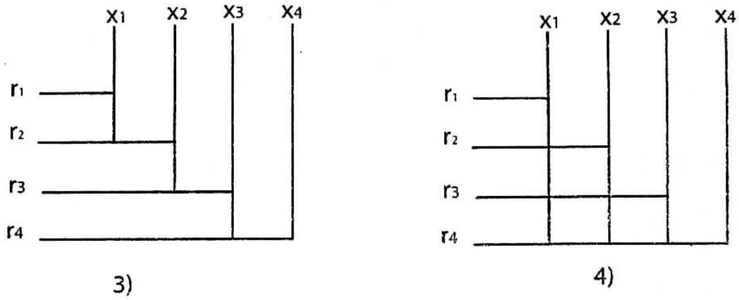
(*) Cuộc thi cổ truyền (hàng năm) về giải toán sơ cấp, lâu nay vẫn từng giữ vai trò cuộc thi quan trọng nhất về giải toán trong học sinh Mỹ, tựa như cuộc thi học sinh giỏi toán của ta vậy. (Cần chú thích rằng G. Pôlya là một giáo sư lâu năm của khoa toán trường đại học tổng hợp Xtenpho (Caliphonia) (chú thích của người dịch bản tiếng Nga).

trên hình 6.3 là một hệ gồm bốn quan hệ ràng buộc bốn ảnh trên biểu đồ, ta thấy chỉ có một ẩn tham gia tất cả bốn quan hệ và cũng chỉ có một quan hệ chứa đựng tất cả bốn ẩn; về thực chất mà nói; biểu đồ 1) và hệ bốn phương trình trong mục nhỏ 1, §1 diễn đạt đúng cùng một tình huống, trường hợp đầu là bằng ngôn ngữ hình học, trường hợp sau là bằng ngôn ngữ các công thức. Trường hợp các đường giao nhau tại những điểm nằm ngoài các hình tròn và hình vuông (như xảy ra một trường hợp trên hình 1) thì không cần lưu ý đến; cần hình dung rằng trên thực tế, chỉ có các hình tròn và hình vuông là nằm trong mặt phẳng hình vẽ; còn các đường nối thì vẽ trong không gian, tuy rằng hình chiếu của chúng lên mặt phẳng hình vẽ có thể ngẫu nhiên gặp nhau.



Hình 6.3. Các hình tròn và hình vuông, các ẩn số và các quan hệ

Các biểu đồ 1), 3), 4), 5) cũng như biểu đồ 2) (hình 6.3) là những hệ thống quan hệ (hệ thức) mà ta đã xét trước đây; bạn hãy chỉ rõ các biểu đồ này ứng với mục nào hay bài tập nào?



Hình 6.4. Các đường thẳng đứng và nằm ngang; các ẩn và các quan hệ

Hình 6.4 đưa ra những lược đồ đồ thị có một dạng khác, mà trên một ý nghĩa nhất định là "đối ngẫu" với các biểu đồ vừa xét trên. Trên hình vẽ, các quan hệ cũng như các ẩn, đều được biểu diễn bằng đường, quan hệ bằng đường nằm ngang, ẩn bằng đường thẳng đứng; nếu trong quan hệ có chứa ẩn thì hai đường tương ứng sẽ có một điểm chung. Cùng một cấu trúc của hệ thống các ẩn và hệ thống các quan hệ ràng buộc chúng được biểu diễn bằng các biểu đồ 3) và 4) trên các hình 6.3 và 6.4.

Hình 6.4 có thể gợi ý cho ta về cách biểu diễn bài toán bằng đại số: có thể xem bài toán như một lược đồ ma trận, trong đó mỗi dòng ứng với một quan hệ và mỗi cột ứng với một ẩn; phần tử của ma trận này hoặc là bằng đơn vị hoặc là bằng không, tuỳ theo quan hệ đang xét có chứa ẩn hay không).

23. Một số kiểu bài toán không thuộc lĩnh vực toán học. Trước tiên, ta phải tìm cách thoả mãn khoản nào trong điều kiện? Câu hỏi này là điển hình cho nhiều bài toán. Sau khi đã chọn được khoản xem chừng có ý nghĩa chủ yếu và lập được bản liệt kê (đầy đủ hay chưa đầy đủ) các đối tượng thoả mãn điều kiện "chính" này, ta mới "lục" đến các khoản còn lại, các khoản "thứ yếu" và dùng các khoản này để loại đi phần lớn các đối tượng trong bản liệt kê, cho mãi đến khi rốt cuộc chỉ còn lại một đối tượng thoả mãn đồng thời cả khoản chính lẫn các khoản phụ trong điều kiện và do đó thoả mãn toàn bộ điều kiện bài toán. Lược đồ hành động như vậy, mà ở trên chúng ta đã có dịp tìm hiểu (xem mục nhỏ 3, §3 và bài tập 16 và 17) nảy ra một cách rất tự nhiên trong nhiều kiểu bài toán ngoài lĩnh vực toán học và do đó mở ra khả năng giải được chúng.

Bài toán của người phiên dịch. Khi dịch từ tiếng Pháp sang tiếng Việt(*) cần phải tìm được từ tương đương với một từ Pháp nào đó, chẳng hạn từ "confiance". Trong bộ từ điển Pháp - Việt có đưa ra nhiều từ Việt (lòng tin, tín nhiệm, tín dụng, tín thác) thoả mãn khoản chính, diễn đạt khá thô thiển điều kiện bài toán của chúng ta và chúng ta phải tìm hiểu thật kĩ văn cảnh của chúng ta để phát hiện thêm những khoản tinh vi hơn và dùng chúng loại bớt trong số các từ kể trên những từ nào ít phù hợp với ý nghĩa câu văn đang dịch và chỉ giữ lại một từ thích hợp nhất.

Nước cờ chiếu tướng sau hai bước. Cho trước một cách sắp xếp quân trắng quân đen nào đó trên bàn cờ, phù hợp với quy tắc chơi. Ẩn ở đây là nước đi của bên trắng. Điều kiện yêu cầu rằng phải tìm ra một nước đi để sau đó, bất kể nước đi của bên đen như thế nào, thì bên trắng đi tiếp một nước nữa sẽ chiếu được tướng bên đen.

Nước đi cần tìm phải "cản" được mọi nước đi có thể của bên đen (ngăn ngừa sự tấn công bất ngờ và trong khi đối phó thì đồng thời lại chiếu tướng đối phương). Như vậy, có thể nói, trong trường hợp này có bao nhiêu nước đi của bên đen cần phải cản, thì điều kiện sẽ chứa bấy nhiêu khoản.

Chiến lược đổ nước đi, tức là: phải bắt đầu từ một nước đi "hiểm hóc" ("tới hạn") của bên đen, tức là nước đi xem chừng nguy hiểm nhất và lập bản liệt kê các nước đi của bên trắng có thể cản được nguy cơ chính này. Sau đó, ta xét đến những nước đi "thứ yếu" của bên đen và gạch bớt trong bản liệt kê lúc đầu những nước đi nào của bên trắng mà không

(*) Trong nguyên bản là dịch sang tiếng Anh. Chúng tôi sửa đổi một chút (N.D).

cản nổi một bước đi "thứ yếu" nào đó của bên đen, cuối cùng, trong bản liệt kê chỉ còn lại một lời giải duy nhất "chắc ăn".

Việc thiết kế của kĩ sư: Người ta đề nghị một kĩ sư thiết kế một thiết bị mới. Muốn thiết bị mới này sử dụng được trong sản xuất; nó phải thoả mãn "một lô" yêu cầu; có một số yêu cầu thuộc về "kĩ thuật"; chẳng hạn như yêu cầu về làm việc bảo dảm, an toàn, bền lâu,... một số yêu cầu khác có tính chất kinh tế, chẳng hạn giá thành không cao, nhu cầu thị trường,... thoạt đầu, người kĩ sư chỉ tính toán đến các yêu cầu kĩ thuật (toàn bộ hay từng phần), ta có thể coi những yêu cầu này là "phần chính" trong điều kiện; như vậy là người kĩ sư phải giải một bài toán kĩ thuật (vật lí) rất rõ nét. Thông thường, các bài toán thuộc loại này có một số lời giải và người kĩ sư sẽ tính toán và nghiên cứu hết tất cả các lời giải đó. Khi qua được giai đoạn này rồi, thì trên sân vẫn bị coi là "thứ yếu"; cuối cùng, sẽ đi tới chỗ lựa chọn được trong số những thiết bị đều bảo đảm yêu cầu kĩ thuật, một thiết bị có lợi nhất về mặt kinh tế để đưa vào sản xuất, còn các thiết bị kia thì loại bỏ.

24. Hãy giải "nhẩm", tức là không dùng giấy bút, hệ sau đây gồm ba phương trình với ba ẩn.

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 30, \\ 2x + 3y + z = 30, \\ x + 2y + 3z = 30. \end{cases}$$

Chứng minh rằng lời giải của bạn là đúng.

25. Cho một tam giác có các cạnh là a, b, c. Từ các đỉnh của tam giác, xem như tâm vạch ba đường tròn ngoại tiếp với nhau. Tìm các bán kính x, y, z của ba vòng tròn đó.

26. Tìm giá trị của các ẩn thoả mãn hệ bốn phương trình

$y + u + v = 5,$

$x + u + v = 0,$

$x + y + v = -8,$

$x + y + u = 4.$

Thử tìm một con đường nhanh chóng và độc đáo để giải hệ này.

27. Một cách phân loại tinh vi hơn. Trong các bài tập 24, 25 và 26, có minh hoạ một tình huống quan trọng: tính đối xứng của điều kiện một bài toán chứa nhiều ẩn đối với các ẩn đó (nếu như bạn nhận xét thấy được) có thể có ảnh hưởng rất nhiều đến quá trình giải bài toán và giúp giải bài toán được dễ dàng hơn nhiều (xem thêm bài tập 8, chương 2 và toán học và những suy luận có lí. Đôi khi, như trong bài tập 25, phải xét không những những phép thế giữa các ẩn với nhau, mà cả những phép thế trong đó có cả ẩn lẫn dữ kiện của bài toán cùng tham gia). Cũng có trường hợp tuy không gặp luôn, nhưng cũng không kém phần lí thú, là trường hợp điều kiện của bài toán chỉ giữ nguyên không thay đổi nhờ một số (chứ không phải tất cả!) hoán vị (tức là nhờ một nhóm hoán vị nào đó) các ẩn (và dữ kiện). Nghiên cứu và phát triển một cách có hệ thống nhận xét này, ta sẽ đi đến một sự phân loại các bài toán tìm tòi theo cách khác, tinh vi hơn cách phân loại chỉ dựa trên độc một nhận xét chủ yếu nêu trong mục nhỏ 6, §1; có thể đoán trước rằng cách phân loại này sẽ đem lại nhiều điều bổ ích trong việc nghiên cứu của chúng ta.

CHƯƠNG 7. BIỂU DIỄN HÌNH HỌC QUÁ TRÌNH GIẢI MỘT BÀI TOÁN

Cách biểu diễn tương tự như thế đối với các đối tượng này rất là có ích, bởi lẽ không có cái gì trực quan đối với chúng ta hơn là hình vẽ, là cái mà ta có thể sờ mó và nhìn thấy được.

ĐỀ-CÁC

Trích "Các quy tắc chỉ đạo của trí tuệ"

§1. ẨN DỤ

Chuyện xảy ra đã gần năm chục năm nay, hồi tôi còn là một sinh viên; tôi phải giảng một bài toán hình không gian sơ cấp cho một chú bé, mà tôi đang kèm để chuẩn bị thi; song tôi đã lạc mất sợi dây suy luận và đâm bí. Tôi có đủ lí do để tự giận mình, vì chỉ có một bài toán tầm thường như thế mà cũng không giải nổi. Và tối hôm ấy, tôi vùi đầu vào tìm cho ra lời giải bài toán với một nhiệt tình khiến cho không bao giờ tôi có thể quên được cách giải nữa. Cố tìm kiếm bằng trực giác đường lối tự nhiên giải bài toán và mối liên hệ qua lại giữa các nguyên tắc cơ bản giải bài toán, cuối cùng tôi đã đi đến một cách biểu diễn hình học quá trình giải một bài toán. Đó là phát minh đầu tiên của tôi vì nó đã nhen nhóm trong tôi niềm hứng thú suốt đời đối với quá trình giải các bài toán.

Thực ra, một số thành ngữ ẩn dụ thường dùng đã dẫn tôi đến ý nghĩ minh hoạ bằng hình học. Người ta hay nhận xét rằng ngôn ngữ chúng ta vẫn dùng chứa đầy ẩn dụ (những ẩn dụ bóng bảy, những ẩn dụ trực tiếp và những ẩn dụ lộ liễu). Song, tôi không biết người ta có nhận xét thêm rằng trong các ẩn dụ đó có nhiều ẩn dụ phụ thuộc lẫn nhau: chúng có thể liên hệ với nhau hoặc kết hợp với nhau: chúng có thể hợp thành những nhóm ít nhiều dính líu với nhau. Dù sao chăng nữa, vẫn tồn tại một "họ" ẩn dụ rộng lớn có đồng thời hai nét đặc trưng sau đây: tất cả các ẩn dù đó đều đả động đến những nguyên tắc cơ bản để giải các bài toán và tất cả các ẩn dụ đó đều dẫn đến những hình tượng hình học như nhau.

Tìm ra lời giải một bài toán có nghĩa là xác lập mối liên hệ giữa các sự vật hay ý nghĩ đã phân biệt từ trước (giữa các sự vật sẵn có và các sự vật cần tìm, giữa các dữ kiện và ẩn, giữa giả thiết và kết luận). Các đối tượng độc lập lúc đầu càng xa nhau bao nhiêu thì người nghiên cứu khám phá được mối liên hệ giữa chúng với nhau càng đáng khâm phục bấy nhiêu. Đôi khi, chúng ta hình dung mối liên hệ ấy như một cái cầu: một phát minh lớn làm chúng ta sửng sốt, ví như một cái cầu bắc qua vực sâu ngăn cách hai tư tưởng rất xa nhau vậy. Người ta thường hay hình dung mối liên hệ này được thực hiện tựa hồ như bằng một dây xích: một chứng minh được hình dung như một sự liên hệ qua lại giữa các luận cứ, như một dây xích - có thể là dài - những kết luận. Toàn bộ dây xích không bền chắc hơn mắt xích yếu nhất của nó, - và nếu thiếu dù chỉ một mắt xích thì sẽ không thể có một chứng minh vững chắc, không thể có mạch, suy luận liên tục. Người ta cũng thường hay

liên tưởng mối liên hệ trong tư duy với một sợi dây: chúng ta ai mà chẳng đã từng trông thấy ông giáo của mình có lúc bị lạc mất sợi dây lí lẽ rối tinh và ông buộc phải nhìn vào sách để "khôi phục" lại sợi dây bị lạc mất (chúng ta đến là mệt trong lúc ông ta lần ra sợi dây để đi đến kết luận cuối cùng). Một sợi dây thật mảnh, đương nhiên ta sẽ hình dung như một đường hình học, còn các đối tượng liên quan qua lại với nhau thì hình dung giản đơn như những điểm; thế là hầu như không thể tránh được, xuất hiện biểu đồ, xuất hiện cách biểu diễn đồ thị các liên hệ qua lại giữa các kết luận toán học.

Bây giờ chúng ta xét các hình hình học thay cho các "hình nói bằng lời".

§2. BÀI TOÁN LÀ GÌ?

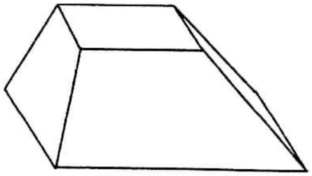
Chúng ta cần có một ví dụ: tôi chọn một bài toán hình học không gian rất đơn giản (*).

Tìm thể tích V của hình chóp cụt đều đáy vuông, nếu biết chiều cao h, cạnh a của đáy trên và cạnh b của đáy dưới.

Một hình chóp có đáy vuông sẽ là đều nếu chân đường cao của nó trùng với tâm hình vuông. Người ta gọi phần của hình chóp bao gồm giữa đáy hình chóp và một mặt phẳng song song với đáy là hình chóp cụt. Mặt phẳng này chứa một trong các mặt của chóp cụt, mặt này gọi là đáy trên của nó; đáy dưới của chóp cụt trùng với đáy của hình chóp ban đầu, hình chóp toàn phần, khoảng cách giữa hai đáy của chóp cụt gọi là chiều cao của nó (chiều cao này nhỏ hơn chiều cao hình chóp toàn phần).

Trước hết, ta hãy tập trung tìm hiểu xem mục đích của bài toán là gì; đó là bước đầu tiên của ta trên con đường giải bài toán. Bài toán yêu cầu cái gì đây? Ta tự đặt cho mình câu hỏi ấy và cố gắng tưởng tượng càng rõ nét càng hay hình dạng của cố thể mà ta muốn tìm thể tích (xem phần bên trái hình 7.1a). Hình ảnh tưởng tượng trong đầu này, đương nhiên ta sẽ biểu diễn theo đồ thị bằng một điểm - ta kí hiệu điểm này là V và ta phải tập trung tất cả sự chú ý vào đó (xem phần bên phải hình 7.1a).

Nhưng ta sẽ không thể tìm ra ẩn, nếu ta không biết một chút gì về nó. Người ta đã cho trước những gì? hoặc ta đã biết những gì? - ta tự hỏi và sẽ chú ý đến những đường trong hình mà ta đã biết độ dài, tức là đến các đoạn thẳng có độ dài a, b và h.



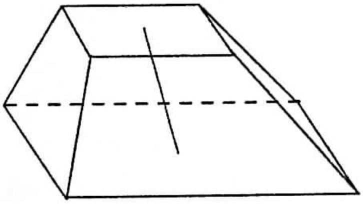
^{0}V

Yêu cầu cái gì?

Hình 7.1a. Hãy tập trung chú ý vào đối tượng, vào mục đích của bài toán

(*) Bài toán này rất giống một bài toán mà trước đây có lần tác giả đã xét đến, nhưng có phần nào đơn giản hơn.

(xem phần bên trái hình 7.1b - hình vuông có cạnh là *a* ở phía trên có thể đang xét và hình vuông có cạnh là *b* ở phía dưới). "Bức tranh" tưởng tượng trong đầu của ta đã thay đổi và phản xạ của điều đó là ba điểm mới xuất hiện trên hình 7.1b bên phải (ta kí hiệu chúng là *a*, *b* và *h*); các điểm này biểu diễn các dữ kiện và giữa chúng với ẩn là một chỗ trống, một khoảng gián đoạn. Chỗ trống này tượng trưng cho vấn đề đang đặt ra cho chúng ta: chúng ta phải liên hệ ẩn *V* với các dữ kiện *a*, *h* và *b*, tức là chúng ta phải lấp được khoảng trống giữa ẩn và các dữ kiện.



Cho trước những gì?

$^0a\ ^0h\ ^0b$

Hình 7.1b. Một câu hỏi chưa giải quyết, làm thế nào lấp được khoảng trống?

§3. PHẢI CÓ CÁI "Ý"!

Ta đã bắt đầu giải bài toán từ chỗ cố gắng hình dung cụ thể mục đích mà ta muốn đạt, hình dung ẩn và các dữ kiện. Giai đoạn đầu tiên trong công việc của ta được phản ánh khá trung thực trên hình 7.1a và 7.1b. Nhưng ta sẽ bước tiếp như thế nào đây, ta sẽ chọn con đường nào đây?

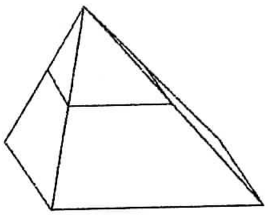
Nếu bạn chưa thể giải nổi bài toán đặt ra thì bạn hãy thử tìm một bài toán dễ hơn na ná giống bài toán đó.

Trong ví dụ đang xét thì bất tất phải đi xa lắm. Thật vậy, ở đây cái gì là ẩn? Thể tích hình chóp cụt. Thế thì đó là một cố thể hình học như thế nào? Cố thể này được định nghĩa là gì? Là một phần của hình chóp toàn phần. Phần nào? phần bao gồm... Ta không nói tiếp nữa, thế là đủ rồi; ta hãy phát biểu định nghĩa một cách khác. Người ta gọi, phần của hình chóp toàn phần còn lại sau khi bỏ đi một hình chóp con do một mặt phẳng song song với đáy cắt ra là hình chóp cụt. Trong trường hợp đang xét (hình 7.1c,) đáy của hình chóp lớn (hình chóp toàn phần) là một hình vuông có diện tích bằng b^2. Ví thử ta đã biết thể tích của hai hình chóp ấy - ta kí hiệu chúng lần lượt là *B* và *A* - thì ta sẽ tìm được thể tích *V* của chóp cụt:

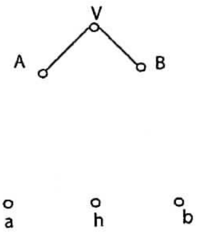
$V = B - A.$

Ta hãy thử tìm các thể tích *B* và *A* - đó chính là cái "ý" của ta vậy!

Như vậy là, ta đã đưa bài toán ban đầu tìm thể tích *V* về hai bài toán phụ gần gũi với nó, cụ thể là tìm *A* và *B*. Để biểu diễn quá trình này theo đồ thị, ta đặt vào chỗ trống giữa các dữ kiện *a*, *h*, *b* và ẩn *V* hai điểm mới mà ta kí hiệu là *A* và *B*. Ta nối *A* và *B* với *V* bằng những đoạn xiên để chỉ rõ mối liên hệ qua lại quan trọng giữa ba đại lượng đó; xuất phát từ *A* và *B*, ta có thể đi tới *V* được; việc giải bài toán tìm *V* quy về việc giải hai bài toán tìm *A* và *B*.



Một bài toán gần gũi, thích hợp: V= B-A

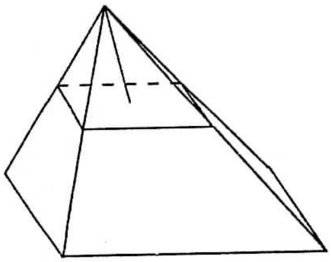


Hình 7.1c. Nếu bạn không giải nổi bài toán đặt ra thì bạn hãy xem xét kĩ xung quanh.

Công việc của ta còn lâu mới xong; ta phải tìm hai A và B; trên hình 7.1c hai điểm lơ lửng A và B có cách các điểm a, h, b cho trước một khoảng trống. Song tình hình xem chúng cũng không đáng bi quan; hình chóp toàn phần là một hình hình học quen thuộc với chúng ta hơn hình chóp cụt và mặc dù thay thế cho một ẩn V đã xuất hiện hai ẩn A và B, song cả hai ẩn này đều có bản chất như nhau là đều có quan hệ qua lại như nhau với các đại lượng đã biết, theo thứ tự là với a và với b. Do đó, biểu đồ của bức tranh tưởng tượng của chúng ta trên hình 7.1c có tính đối xứng. Đường VA nghiêng về phía đại lượng cho trước a, đường VB nghiêng về phía đại lượng cho trước b. Thế là, chúng ta đã bắt tay vào việc lấp khoảng gián đoạn giữa các ẩn và các dữ kiện; phần còn lại của chỗ trốn đã hẹp hơn trước.

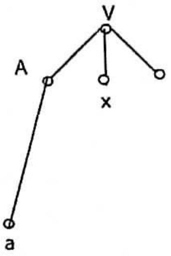
§4. PHÁT TRIỂN "Ý"

Giờ đây, ta đang ở giai đoạn nào của quá trình giải? Ta đang cần gì? Ta cần tìm các ẩn A và B. Ẩn A là gì? - Là thể tích một hình chóp. Làm thế nào tìm được một đối tượng như thế. Có thể tìm được một ẩn tương tự như thế bằng cách nào? Cần những dữ kiện gì để tìm được ẩn đó? Có thể tính được thể tích một hình chóp nếu biết diện tích đáy và chiều cao hình chóp; thể tích này bằng tích của hai đại lượng vừa nêu chia cho 3. Trong đề bài toán, không cho chiều cao hình chóp, nhưng ta hãy tử tìm cho ra. Ta kí hiệu nó là x. Khi đó: $A = \dfrac{a^2 x}{3}$.



Có thể tính được một đại lượng thuộc loại này bằng cách nào?

$$A = \frac{a^2 x}{3}$$



Hình 7.1d. Đã tìm ra được mối liên hệ đầu tiên với các dữ kiện, nhưng vẫn còn những đầu mút "lơ lửng"

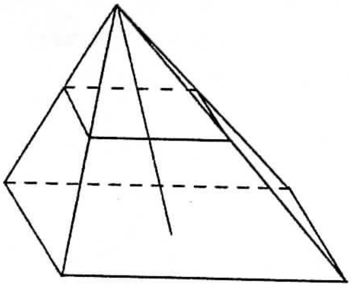
Trên phần bên trái hình 7.1d, hình chóp nhỏ bên trên chóp cụt được vẽ tỉ mỉ hơn: chiều cao x và cạnh a của nó được vẽ nổi bật lên. Giai đoạn hiện tại của công việc của chúng ta được thể hiện trên phần bên phải hình 7.1d, phía trên các đại lượng đã biết, xuất hiện một điểm mới x và những đường nối A với x và với a - các đường này chỉ rõ ràng có thể đi tới A xuất phát từ x và a, tức là có thể biểu diễn A theo x và a. Tuy vẫn còn hai ẩn (trong phần bên phải hình 7.1d, vẫn còn hai đầu mút lơ lửng), song ta đã đạt được một bước tiến bộ. Ít ra ta đã nối được ẩn V với một trong các đại lượng cho trước, cụ thể là với a.

Bây giờ, bước tiếp sau dĩ nhiên là đã rõ ràng. Các ẩn A và Bước bản chất như nhau (trên hình 7.1c, chúng nằm ở mực cao ngang nhau); ta đã tìm được biểu thức của thể tích A theo đáy và chiều cao, ta cũng có thể biểu diễn thể tích B tương tự như thế

$$B = \frac{b^2(x + h)}{3}.$$

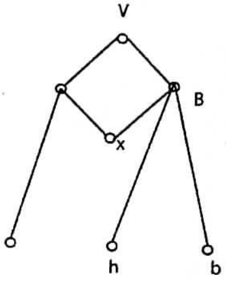
Trên phần bên trái hình 7.1e, hình chóp toàn phần (mà hình chóp cắt của ta là một bộ phận) được vẽ tỉ mỉ hơn: chiều cao $x + h$ và cạnh b của nó được vẽ nổi bật lên. Trên phần bên phải hình 7.1e, xuất hiện ba đường xiên mới nối B với b, h và x. Các đường này chỉ rõ ràng có thể đi đến B xuất phát từ b, h và x, tức là có thể biểu diễn B theo b, h và x. Như vậy, chỉ còn lại một điểm lơ lửng chưa nối được với các dữ kiện, đó là điểm x. Khoảng trống bây giờ càng thu hẹp hơn: chỉ còn lại khoảng gián đoạn giữ x và các đại lượng cho trước mà thôi.

Còn cái gì chưa biết? Độ dài đoạn thẳng x. Làm thế nào tìm được ẩn này? Làm thế nào tìm được một đối tượng thuộc loại này?



Ta cũng tính theo cách đó

$$B = \frac{b^2(x + h)}{3}$$

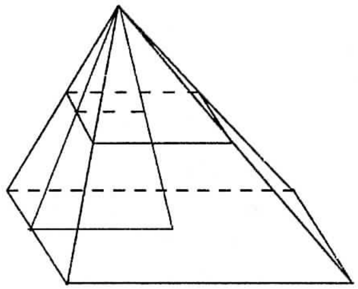


Hình 7.1e. Bây giờ chỉ còn một đầu mút lơ lửng

Độ dài một đoạn thẳng có thể tính đơn giản nhất nhờ dùng một tam giác (tam giác vuông, nếu có thể được), hay dựa trên sự đồng dạng của hai tam giác. Trên hình của ta, không có tam giác nào thích hợp cả; hơn nữa, còn phải làm sao đoạn thẳng x là một cạnh của tam giác ấy mới được. Một tam giác như thế có thể nằm, chẳng hạn, trong mặt phẳng đi qua đường cao của hình chóp con có thể tích A; khi đó, mặt phẳng này cũng sẽ đi qua đường cao của hình chóp lớn có thể tích B, hình chóp lớn này đồng dạng với hình chóp con. Đúng rồi, ta đang cần chính là các tam giác đồng dạng này, nằm trong mặt phẳng đi qua đường cao và song song với cạnh đã biết của đáy một trong hai hình chóp của ta. Thì ra, đó là cái mà ta đang cố tìm ra. Thực chất vấn đề là ở đây đây!

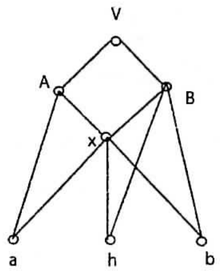
Trên hình 7.1f, trình bày hai tam giác đồng dạng mà từ đó ta tính được x không khó khăn gì hết bằng cách dùng tỉ lệ: $\frac{x}{x+h} = \frac{a/2}{b/2} = \frac{a}{b}$.

Tuy nhiên, ở giai đoạn này, ta không cần chi tiết nào thêm nữa, vì ta có thể biểu diễn x theo các đại lượng cho trước a, h và b, thế là được rồi. Trên phần bên phải hình 7.1f, xuất hiện ba đường xiên mới, nối x và a, h và b và đúng là phản ánh tình hình trên bằng đồ thị.



Vậy thì có thể tích một đại lượng thuộc loại này bằng cách nào?

$$\frac{x}{x+h} = \frac{a}{b}$$



Hình 7.1f. Ta đã lấp đầy được khoảng trống

Thế là xong! Chúng ta đã lấp được chỗ trống, đã dùng những đại lượng trung gian A, B và x (những ẩn phụ) để xác lập được mối liên hệ giữa ẩn V với các dữ kiện a, h và b.

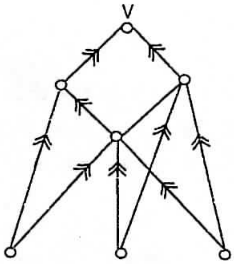
§5. TRÌNH BÀY LỜI GIẢI

Như vậy là bài toán của ta đã giải xong hoàn toàn chưa? Chưa, chưa xong hoàn toàn. Ta còn phải biểu diễn thể tích V của chóp cụt theo các đại lượng đã cho a, h và b, mà việc này ta chưa làm. Song phần việc quan trọng nhất và lí thú nhất đã "trôi" rồi; chỉ còn phải làm phần việc "quen lệ" hơn và đơn giản hơn nhiều.

Lúc bắt đầu công việc, ta có phần nào thiếu phương hướng, ta phải mò mẫm. Ở mỗi giai đoạn, ta hi vọng rằng bước tiếp sau sẽ dẫn ta đến mục đích mong muốn, dẫn ta đến chỗ lấp được khoảng trống giữa ẩn và các dữ kiện. Ta giả định như thế, nhưng không dám chắc như thế; ở mỗi giai đoạn, ta phải phát kiến (mà không tin tưởng hoàn toàn rằng sẽ đạt kết quả) ra một bước mới. Thế nhưng, giờ đây ta không cần phải "bịa" ra nữa, không còn phải hồ nghi nữa; ta nhìn thấy rõ ràng ta sẽ có thể tìm ra ẩn V một cách thuận lợi dựa và các dữ kiện a, h, b và lần theo sợi dây liên tục các liên hệ biểu diễn trên hình 7.1e.

Ta bắt đầu phần thứ hai của công việc từ chỗ kết thúc phần thứ nhất. Trước hết, ta xét ngay đến ẩn x mà ta vừa đưa ra ở trên; từ đẳng thức cuối cùng trong §4, ta được.

$x = \frac{ab}{b-a}$ (và tức là $x + h = \frac{ah}{b-a}$). Sau đó, thay thế giá trị này của x vào hai đẳng thức trước trong §4, ta tìm được:



Hình 7.1g. Ta tiến dần từ các dữ kiện đến ẩn

$$A = \frac{a^3h}{3(b-a)},\ B = \frac{b^3h}{3(b-a)}$$ (Đáng chú ý sự giống nhau giữa ba kết quả này). Cuối cùng ta dùng đẳng thức viết đầu tiên ở §3:

$$V = B - A = \frac{b^3 - a^3}{b - a} \cdot \frac{h}{3}.$$

$$V = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} h.$$

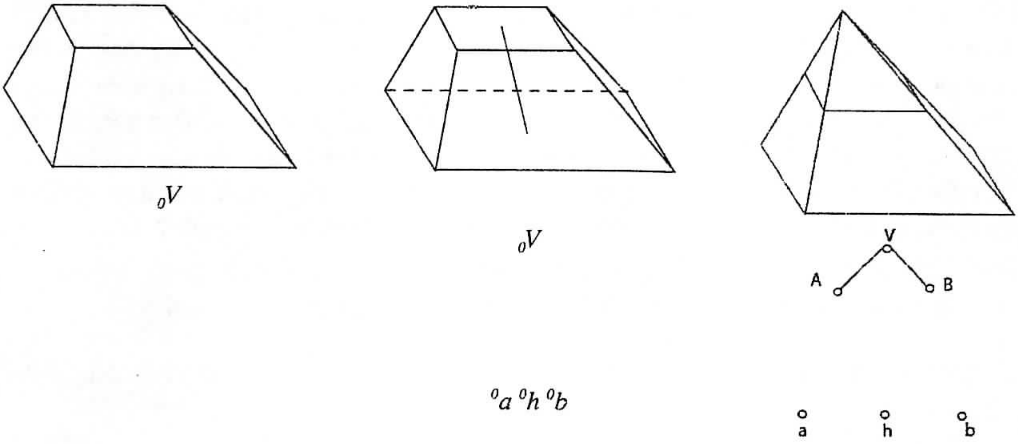
Đó chính là biểu thức cần tìm.

Toàn bộ công việc ta đã làm trong mục này được biểu diễn tượng trưng trên hình 7.1g.

Mỗi đường liên hệ trên hình vẽ này đều có mũi tên chỉ hướng vận dụng sự liên hệ. Ta đã bắt đầu từ các đại lượng cho trước a, h và b và đã tiến dần qua các ẩn phụ x, A và B nhằm hướng ẩn ban đầu, ẩn chính V bằng cách lần lượt biểu diễn các đại lượng đó, cái nọ tiếp cái kia, theo các đại lượng cho trước.

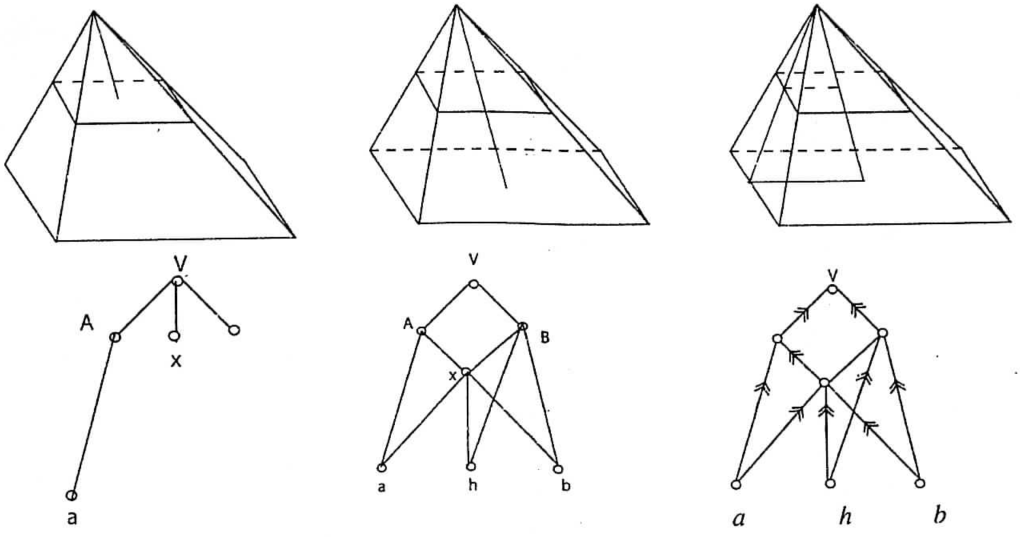
§6. NHỮNG THƯỚC PHIM QUAY CHẬM

Trên các hình 7.1a - 7.1g, trình bày các giai đoạn liên tiếp giải bài toán trên; từ bảy hình rời rạc đó, ta dựng được một bức tranh chung (hình 7.2). (Hình 7.1f được nhập lại với hình 7.1g). Ta hãy đưa mắt nhìn dãy hình trên hình 7.2 theo hướng từ trái sang phải. Nếu đưa mắt thật nhanh thì có thể coi hình 7.2 như một thứ hình ảnh quay phim các kết quả của người giải bài toán hay quá trình giải bài toán. Còn nếu đưa mắt thật chậm, thì ta sẽ thấy hiện ra trước mắt một thứ phim quay chậm, dành đủ thời gian để quan sát những chi tiết quan trọng.



Yêu cầu cái gì? *Cho trước những gì?* $V = B - A$

Một bài toán gần gũi thích hợp



$A = \dfrac{a^2x}{3}$ — *Có thể tính được một đại lượng thuộc loại này bằng cách nào?*

$B = \dfrac{b^2(x+h)}{3}$ — *Ta cũng tính theo cách đó.*

$\dfrac{x}{x+h} = \dfrac{a}{b}$ — *Kế hoạch đã hoàn thành. Ta tiến dần từ dữ kiện đến ẩn.*

Hình 7.2. Tiến lên đồng thời theo bốn mức khác nhau

Trên hình 7.2, mỗi giai đoạn giải (mỗi hình ảnh tưởng tượng xảy ra trong đầu người giải bài toán) được trình bày dưới bốn hình thức. Các hình thức diễn đạt cùng một hình ảnh tưởng tượng sắp xếp cái nọ dưới cái kia theo chiều dọc và ta có thể theo dõi quá trình giải theo bốn đường ngang ở bốn mức khác nhau.

Dọc theo con đường quan trọng nhất, tức là ở hàng hình ảnh hình học, ta sẽ thấy sự tiến triển của hình hình học đang xét trong đầu người giải nảy ra hình ảnh của hình hình học đang xét và hình ảnh ấy biến đổi đi khi chuyển qua giai đoạn sau; khi đó, một số chi tiết lùi lại phía sau, một số chi tiết khác bắt đầu thu hút sự chú ý của người giải và một số chi tiết mới xuất hiện.

Xuống mức dưới, ta gặp hàng các liên hệ. Với cách biểu diễn đồ thị quá trình giải, các yếu tố của bài toán (ẩn, dữ kiện, ẩn phụ) được kí hiệu tượng trưng bằng những điểm, còn các quan hệ ràng buộc các yếu tố đó được kí hiệu bằng những đường nối các điểm đó.

Ngay dưới hàng các liên hệ là hàng các tính toán, biểu diễn bằng những công thức; theo một nghĩa nào đó, hàng này có tính chất đối lập với hàng trên (hàng các liên hệ). Ở đây chúng tôi muốn diễn đạt cái ý sau đây: ở hàng các liên hệ, ta ghi tập hợp tất cả các quan hệ đã tìm được cho đến lúc đó; quan hệ cuối cùng trong số đó được tách biệt rõ (bằng màu hay bằng đường đậm nét: nó là điểm tập trung chú ý của ta), nhưng không biểu diễn tỉ mỉ hơn các quan hệ trước. Còn ở hàng các tính toán, ở mỗi giai đoạn giải, chỉ viết đầy đủ công thức cuối cùng, còn các công thức trước thì không nên làm gì hết.

Xuống mức dưới nữa, ta gặp hàng các phát kiến, là hàng có ý nghĩa quan trọng nhất đối với ta. Ở mỗi giai đoạn, chỉ ghi một câu hỏi đơn giản tự nhiên (mà trong bất kì bài toán nào khác cũng có thể đặt ra) hoặc chỉ nêu một chỉ dẫn nào đó giúp ta đạt tới giai đoạn này. Nghiên cứu thực chất của các câu hỏi và chỉ dẫn này là mục đích cơ bản của chúng ta.

§7. VÀI LỜI VỀ NHỮNG CHUYỆN SAU NÀY

Chúng tôi muốn trở lại xét hình 7.2 một lần nữa cốt để liên hệ nó với kinh nghiệm đã tích luỹ được trước đây. Hình vẽ này giúp ta biết thêm chút gì đó thì cũng hay: chúng tôi muốn rút ra từ nội dung kín đáo của nó những điểm bổ ích về phương diện tìm kiếm những quan điểm tổng quát và do đó đáng để ta tiếp tục nghiên cứu thêm nữa.

Trong bản "tường thuật" bằng đồ thị về quá trình giải một bài toán đơn lẻ, chúng ta sẽ tìm được những chỉ dẫn bổ ích cho các vấn đề tổng quát sẽ xét trong các chương sau. Chúng ta sẽ xét lướt qua các chương đó, chương nọ tiếp chương kia, theo một trình tự thích đáng.

(Mỗi mục sắp tới của chương này "nói trước" về nội dung của một trong những chương tiếp sau chương này; số thứ tự cũng như nhau để mỗi mục cũng hệt như số thứ tự và tiêu đề của chương tương ứng).

Bây giờ, chúng ta hãy thử xuyên qua trường hợp riêng của ta mà nhìn thấu những tư tưởng chung nằm ở tận đáy của nó.

§8. KẾ HOẠCH VÀ CHƯƠNG TRÌNH

Nhìn bao quát các giai đoạn biểu diễn liên tiếp trên hình 7.2, ta sẽ thấy sự chú ý của người giải lan rộng ra trên hình cần xét như thế nào, người giải bao quát mỗi lúc một nhiều thêm chi tiết như thế nào và người giải cứ tiến dần từng bước mà xây dựng được hệ thống các liên hệ hợp thành kế hoạch giải như thế nào. Xem kĩ quá trình giải khai triển, ta có thể phân biệt trong đó một số giai đoạn và phương hướng.

Ở trên, chúng ta đã nhận xét về sự tương phản giữa hai phần quá trình giải (xem §5); trong phần thứ nhất (biểu diễn trên các hình 7.1a - 7.1e), chúng ta đi từ ẩn xuống các dữ kiện, trong phần thứ hai (biểu diễn trên hình 7.2), chúng ta đi từ các dữ kiện lên tới ẩn.

Nhưng ngay trong phần thứ nhất, ta cũng có thể phân biệt hai giai đoạn. Trong giai đoạn đầu (xem các hình 7.1a và 7.1b), sự nỗ lực chủ yếu của người giải hướng vào chỗ làm sao hiểu được bài toán. Trong giai đoạn cuối (xem các hình 7.1c - 7.1g), người giải phát triển hệ thống các liên hệ lôgic, lập kế hoạch giải.

Giai đoạn cuối cùng, giai đoạn lập kế hoạch, có lẽ là phần chính yếu nhất của công việc, chúng ta sẽ nghiên cứu phần này tỉ mỉ hơn trong chương 8.

§9. NHỮNG BÀI TOÁN NẰM TRONG MỘT BÀI TOÁN

Trở lại §8, ta có thể nhận xét rằng khi giải bài toán ban đầu (bài toán cơ bản, bài toán chính), người giải gặp một chuỗi bài toán phụ (bài toán hỗ trợ). Chẳng hạn như khi tính đến hình chóp cụt, ta phải tìm thể tích hình chóp toàn phần, rồi lại tính thể tích một hình chóp toàn phần nữa, sau đó phải tính độ dài một đoạn thẳng. Để đạt tới ẩn chính V, phải đi qua các ẩn phụ A, B và x. Chỉ cần có chút ít kinh nghiệm giải các bài toán cũng đủ dám chắc rằng sự chia nhỏ một bài toán thành nhiều bài toán phụ có tính chất điển hình đến mức nào (chẳng hạn, xem mục nhỏ 3, §5, chương 2).

Chúng ta sẽ nghiên cứu thật kĩ vai trò của các bài toán phụ (bài toán hỗ trợ) và sẽ tiến hành phân loại theo từng kiểu.

§10. NẢY RA "Ý"

Trong các bước của quá trình giải minh hoạ trên hình 7.2, thì bước nào là quan trọng nhất? Dĩ nhiên, đó là bước nảy ra hình chóp toàn phần.

Tôi cho là như thế, và chắc phần lớn những ai có ít nhiều kinh nghiệm về chuyện này hoặc đã từng suy nghĩ về các vấn đề đại loại như thế, cũng sẽ đồng ý với tôi. Đưa vào một hình chóp toàn phần và biểu diễn chóp cụt dưới dạng hiệu của hai hình chóp toàn phần, đó là cái ý chính của lời giải; phần còn lại trong lời giải bài toán, đối với phần đông người giải, là phần công việc dễ dàng hơn, hiển nhiên hơn, quen thuộc hơn, còn đối với những nhà toán học nhiều kinh nghiệm thì có thể đó là phần công việc hết sức tầm thường.

Trong ví dụ vừa xét trên, sự nảy ra ý chính không gây ra ấn tượng sâu sắc lắm; nhưng ta đừng quên rằng bài toán này là một bài toán rất đơn giản. Còn nói chung, nảy ra một ý mới, như vụt loé lên tia sáng sau một thời gian dài suy nghĩ căng thẳng và phân vân dao động, có thể gây ấn tượng mạnh mẽ; đó là phút giây huy hoàng của cảm xúc mà bạn đọc phải gắng đừng để lỡ.

§11. CÔNG VIỆC TRÍ ÓC

Dấu hiệu nổi bật nhất của sự tiến bộ trong quá trình giải một bài toán là sự xuất hiện hết chi tiết mới này đến chi tiết mới khác trên hình minh hoạ phép giải bằng đồ thị (xem hình 7.2). Người giải bài toán càng tiến tới, thì trên các hình hình học và trên biểu đồ liên hệ càng xuất hiện thêm những đường mới. Qua "bức tranh" mỗi lúc một phức tạp thêm đó, ta cảm thấy rõ sự phát triển cấu trúc tư duy của người giải. Qua mỗi bước tiến mới quan trọng, người giải vận dụng thêm những tài liệu mới vào công việc; người giải nhận ra trên hình vẽ đang xét một hình tượng quen thuộc nào đó, áp dụng một định lí đã biết nào đó. Như vậy là công việc trí óc của người giải biểu diễn như là sự khơi gợi những yếu tố có liên quan với vấn đề từ trong vốn kinh nghiệm của mình, như là sự liên hệ kinh nghiệm của mình với bài toán cần giải, như là một công tác động viên và tổ chức.

Ở trên, chúng ta đã có dịp nêu những nhận xét này (nhất là trong bài tập 83, chương 2); rồi đây, ta sẽ còn có dịp phát triển những ý vừa nói tỉ mỉ hơn nữa, đồng thời sẽ còn chú ý tới các mặt khác của công việc trí óc đặc trưng cho giải toán.

§12. QUY LUẬT CỦA TRÍ TUỆ

Hình 7.2 minh hoạ sự tiến bộ trong quá trình giải một bài toán ở bốn mức giúp ta có một quan niệm nào đó về công việc của người giải bài toán. Đối với chúng ta, biết người giải bài toán làm việc như thế nào, dĩ nhiên là bổ ích, nhưng có lẽ bổ ích hơn nữa là vấn đề: vì sao người giải bài toán lại phải làm việc như thế. Liệu qua hình 7.2, ta có rút ra được những thu hoạch nào đó về vấn đề này hay không?

Hàng dưới cùng trên hình 7.2 gồm một dãy câu hỏi và chỉ dẫn thuyết minh các bước liên tiếp trong quá trình giải một bài toán các câu hỏi này rất đơn giản, tự nhiên mang tính chất rất chung; chúng có tác dụng định hướng sự cố gắng của người giải trong khi giải bài toán đơn giản mà ta vừa chọn làm ví dụ và người giải có thể lấy đó làm phương hướng trong vô số những trường hợp khác. Và nếu có thể nói đến một quy luật trí tuệ (một hạt nhân nguyên tắc hay quy tắc nào đó, một hệ thống phương hướng trên con đường đi tới một phương pháp vạn năng mà Đề-các và Lép-nít đã từng cố gắng phát minh ra), thì chúng tôi hi vọng rất nhiều rằng các câu hỏi và chỉ dẫn nêu trong dòng dưới hình 7.2 (dòng dùng làm nền cho hình 7.2!) sẽ có một quan hệ nào đó với quy luật ấy. Về điểm này, phía dưới sẽ dành một chương trình bày riêng.

BÀI TẬP VÀ CHÚ THÍCH BỔ SUNG CHO CHƯƠNG 7

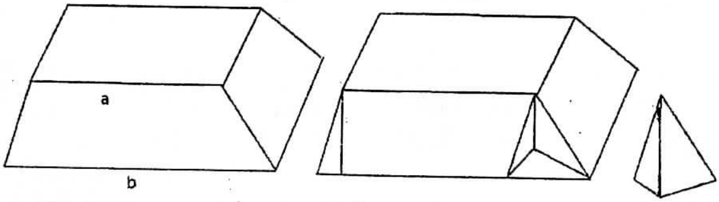
1. Một cách xử lí khác đối với bài toán nêu trong §2. Ta giả định rằng đáy của chóp cụt nằm trên mặt phẳng nằm ngang (trên mặt bàn). Ta cắt hình này bằng bốn mặt phẳng đứng đi qua bốn cạnh của đáy trên và thu được chín đa diện (hình 7.3a).

một lăng trụ đáy vuông, thể tích Q;

bốn lăng trụ đáy tam giác, mỗi cái có thể tích T;

bốn hình chóp đáy vuông, mỗi cái có thể tích P.

Hãy tính V theo cách xử lí mới, dựa trên hình 7.3a.

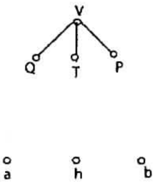


Hình 7.3a. Ta cắt chóp cụt bằng bốn mặt phẳng thẳng đứng

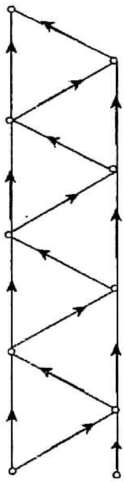
2. Biểu diễn trên biểu đồ hai cách giải bài toán nêu trong các mục nhỏ 3 và 4, §5, chương 2 (các đại lượng nêu trong điều kiện biểu diễn bằng những điểm, còn các quan hệ giữa các đại lượng thì thể hiện bằng những đường).

3. Có thể giải thích biểu đồ vẽ trên hình 7.4 liên hệ với một bài toán có ý nghĩa lí thú về mặt lịch sử. Bạn có đoán được đó là bài toán gì không?

4. Tìm tòi cách chứng minh. Mệnh đề 4 trong quyển XI bộ "nguyên lí" của Ơ-clít có thể diễn đạt như sau:



Hình 7.3b. Một cách xử lí khác

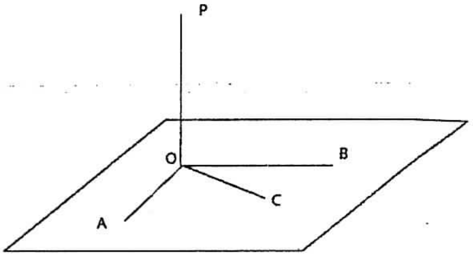


Hình 7.4. Bạn có biết cái này hay không?

Nếu một đường thẳng đi qua giao điểm của hai đường thẳng cho trước và vuông góc với cả hai đường ấy thì nó sẽ vuông góc với bất kì đường thẳng thứ ba nào nằm trong cùng mặt phẳng với hai đường cho trước và đi qua giao điểm của hai đường ấy.

Chúng tôi muốn phân tích cách chứng minh mệnh đề này, làm sáng tỏ một cách trực quan cấu trúc của chứng minh đó và tìm hiểu sâu các "đòn bẩy phát động" của nó; trong việc này ta sẽ vận dụng cách minh hoạ bằng hình học quá trình giải đã nêu trong chương này. Vì các suy luận ở đây cũng tương tự như các suy luận biểu diễn trên các hình 7.1a - 7.1g và 7.2, nên có thể xét ví dụ này một cách vắn tắt hơn.

Chúng ta sẽ quan tâm chủ yếu đến quá trình hình thành trong đầu cách chứng minh. Song chúng ta không được bỏ qua, không lưu ý đến bản thân nội dung mệnh đề cần chứng minh - mệnh đề này xác lập một trong những sự kiện quan trọng nhất trong hình học không gian. Ngay cả hình thức lôgic phát biểu mệnh đề cũng có phần bổ ích nhất định. Có một giáo viên đã phát biểu rằng "hai học sinh hư làm hỏng cả lớp" nói như vậy, chắc là không đúng; nhưng hình thức mà ông ta phát biểu điều khẳng định này của mình thì lại na ná giống hình thức phát biểu mệnh đề của Ơ-clít mà chúng ta sắp chứng minh.



Hình 7.5. Hai học sinh hư làm hỏng cả lớp

1) Chúng ta đi từ điểm cuối đến điểm đầu. Ta hãy dựng một hình, vẽ trên hình 7.5 và ghi những kí hiệu cần thiết. Sau đó, ta tạo cho mệnh đề mà ta sắp chứng minh một hình thức tiêu chuẩn, bằng cách phân tách nó ra thành điều kiện và kết luận.

Điều kiện: Ba đoạn thẳng OA, OB, OC cắt nhau tại điểm O, nằm trong cùng một mặt phẳng và không trùng nhau, ngoài ra $PO \perp OA$, $PO \perp OB$.

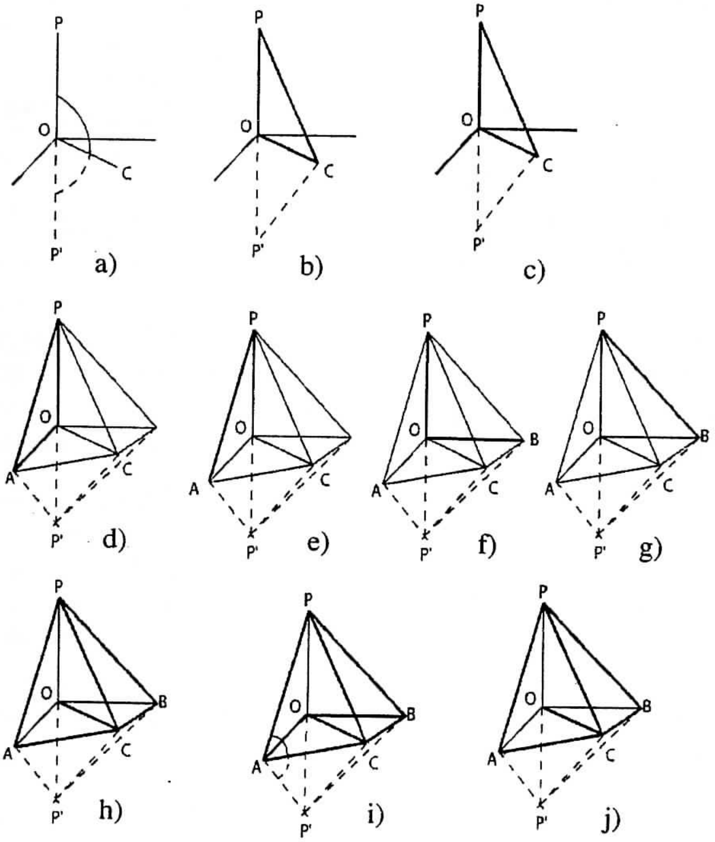
Kết luận: $PO \perp OC$.

"Kết luận là thế nào?"

Là: Đường thẳng PO vuông góc với OC, tức là $\widehat{POC}$ vuông.

"Góc thế nào thì gọi là góc vuông? Định nghĩa một góc vuông như thế nào?". Góc vuông là góc bằng với góc bù của nó. Có thể rằng, biến đổi cách phát biểu kết luận như trên sẽ có ích hơn. Ta kéo dài đoạn PO về quá phía O, đến điểm P' (tức là sao cho các điểm P, O, P' nằm trên một đường thẳng và sao cho điểm O và mặt phẳng chứa nó nằm giữa P và P'). Khi đó (hình 7.6a) sẽ có thể viết kết luận như sau: $\widehat{POC} = \widehat{P'OC}$.

"Vì sao ta lại nghĩ rằng hình thức kết luận này hay hơn hình thực trước"? Ta đã từng nhiều lần gặp trường hợp phải chứng minh hai góc bằng nhau dựa trên sự bằng nhau của hai tam giác nào đó. Trong trường hợp bài toán này, ta cũng có thể suy ra được kết luận mong muốn, nếu biết rằng: $\Delta\ POC = \Delta\ P'OC$ (hình 7.6b). Để chứng minh điều đó, ta hãy giả thiết rằng $PO = P'O$ (ta có quyền làm như thế). Thật vậy, muốn chứng minh hai tam giác trên bằng nhau thì cần những gì? Ta đã biết hai cặp cạnh bằng nhau $PO = P'O$ (do ta dựng) và $OC = OC$ (dĩ nhiên). Để hoàn thành chứng minh này, chỉ cần có (hình 7.6c) $PC = P'C$.



Hình 7.6. Hình hình học dưới hình thức cải biên

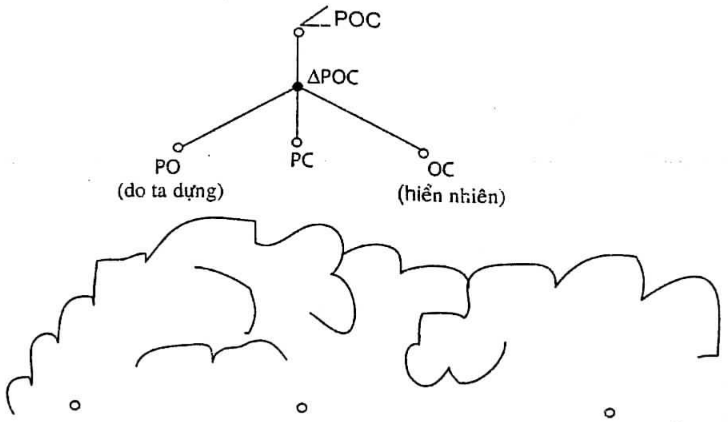
Cho đến đây, ta đã tiến hành chứng minh, xuất phát từ kết luận mong muốn và tiến về phía điều kiện đã cho, ta đã giải bài toán từ điểm cuối đến điểm đầu và đã đi được một đoạn đường đáng kể, mặc dù con đường đi tiếp để đến điều kiện vẫn còn "mờ mịt hơi sương". Công sức của ta được diễn tả tượng trưng trong hình 7.7a, ở đó trình bày theo đồ thị những điều khẳng định nào được suy ra từ những điều khẳng định khác nào, tựa như trên các hình 7.1a-h và 7.2 đã trình bày những đại lượng nào được tính toán nhờ những đại lượng khác nào. Trên hình 7.7a, mỗi đẳng thức trong số các đẳng thức trước được biểu diễn bằng vế trái của nó.

$\widehat{POC} = \widehat{P'OC}$ - $\widehat{POC}$

$\Delta POC = \Delta P'OC$ - ΔPOC

$OC = OC$ - OC

… và quả thực, ở đây chỉ cần vế trái của các đẳng thức đó là đủ, bởi vì vế phải có thể thu được từ vế trái bằng cách thay P' cho P, tức là bằng cách chuyển từ nửa không gian nằm phía trên mặt phẳng đi qua các điểm A, B, G; O, sang nửa không gian nằm phía dưới mặt phẳng đó.



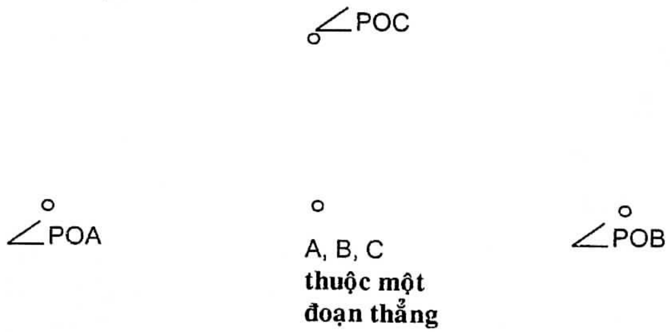
Hình 7.7a. Chúng ta đi từ điểm cuối đến điểm đầu

2) Thay đổi cách phát biểu bài toán. Suy nghĩ một lúc về kết luận, bây giờ ta hãy chú ý đến điều kiện của định lí sắp chứng minh.

Điều kiện là những gì? Ta cần thay đổi cách phát biểu sao cho nó phù hợp với kết luận mà ta vừa thay đổi đi; ta phải xích điều kiện lại gần kết luận hơn, chứ không kéo chúng ra xa nhau hơn. Vậy, ta cần chứng minh (kết luận đã thay đổi) rằng $\widehat{POC} = \widehat{P'OC}$, với giả thiết (điều kiện cũng được thay đổi tương thích) rằng $\widehat{POA} = \widehat{P'OA}$ và $\widehat{POB} = \widehat{P'OB}$.

Mệnh đề, nhìn chung, được phát biểu khá hay; cả ba đẳng thức đều thuộc cùng một loại, mỗi cái đều biểu diễn sự bằng nhau của hai góc. Bây giờ ta cần thêm vào điều kiện vừa thay đổi đi đó một khoản quan trọng nữa, đó là: ba đoạn thẳng không trùng nhau OA, OB và OC nằm trong một mặt phẳng. Ngoài ra, còn cần liên hệ khoản này bằng cách nào đó với kết luận. Nhưng, ta làm thế nào đây?

Để có thể nhận xét được rằng có thể sắp xếp các điểm A, B và C trên một đường thẳng và cách sắp xếp như vậy có thể có lợi, ta cần phải có sáng kiến, phải đoán giỏi. (Có thể lấy đường này là một đường thẳng bất kì không đi qua O và không song song với một đoạn nào trong ba đoạn thẳng OA, OB và OC). Thế là ta đi tới một cách phát biểu mới cho mệnh đề cần chứng minh.



Hình 7.7b. Khoảng trống giữa điều kiện (giả thiết) và kết luận

Điều kiện: Giả sử các điểm A, B, C nằm trên một đường thẳng không đi qua O. Ngoài ra còn giả định rằng: $\widehat{POA} = \widehat{P'OA}$, $\widehat{POB} = \widehat{P'OB}$.

Kết luận: Thế thì $\widehat{POC} = \widehat{P'OC}$.

Trên hình 7.7b điều khẳng định này được biểu diễn dưới dạng tượng trưng.

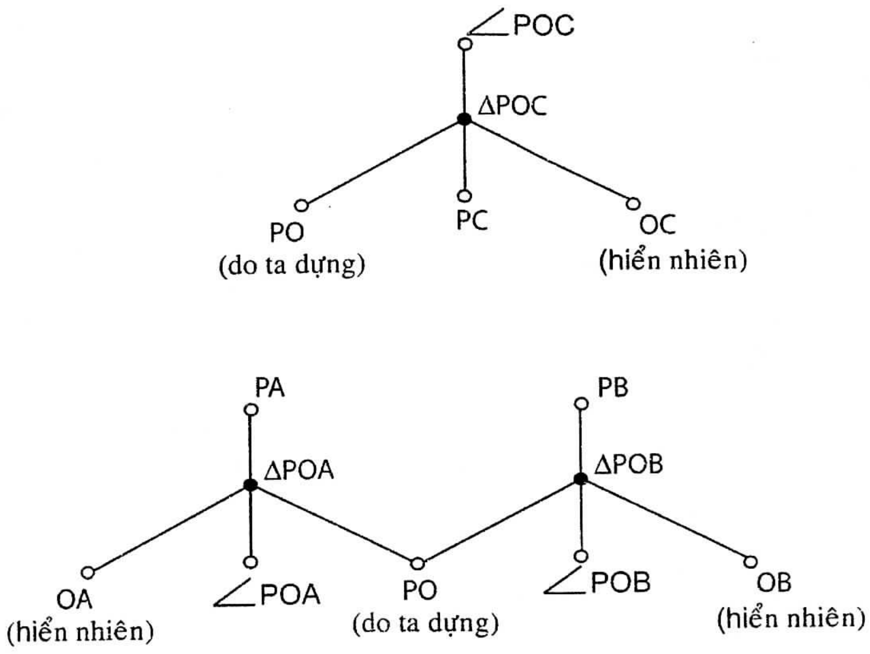
3) Ta đi từ điểm đầu đến điểm cuối khi nghiên cứu điều kiện, ta cũng xét các quan hệ giống như khi nghiên cứu kết luận, nhưng theo trình tự ngược lại.

Vì	$\widehat{POA} = \widehat{P'OA}$	theo giả thiết;
	$PA = P'O$	theo dựng hình;
	$OA = OA$	dĩ nhiên!

nên có thể suy ra: $\Delta POA = \Delta P'OA$. (Xem hình 7.6d), từ đó suy ra $PA = P'A$. (Xem hình 7.6f). Cũng suy luận giống hệt như thế, ta được $PB = P'B$. (Xem các hình 7.6g và h).

Như vậy là ta đã tiến hành chứng minh, đi từ điểm đầu đến điểm cuối, tức là từ điều kiện đến kết luận.

Trên hình 7.7c biểu diễn "bức tranh" tưởng tượng trong đầu của công việc vừa làm và công việc thể hiện trên hình 7.7a. Hình 7.7c cho thấy rằng, chúng ta còn phải làm một việc là: dựa trên các điều khẳng định vừa chứng minh được là $PA = P'A$ và $PB = P'B$; và dựa trên một điều kiện chưa sử dụng tới là các điểm A, B và C nằm trên một đường thẳng, ta phải chứng minh $PC = P'C$. So sánh tình hình này với tình hình biểu diễn trên các hình 7.7a và 7.7b, ta thấy có ít nhiều cơ sở để lạc quan: khoảng trống mà chúng ta cần lấp giờ đây đã hẹp hơn trước nhiều.



A, B, C
Trên một
đường thẳng

Hình 7.7c. Ta đi từ điểm đầu đến điểm cuối

4) Ta tiến theo cả hai chiều. Phần còn lại của chứng minh, có lẽ người giải bài toán (hay bạn đọc) đã từng gặp rất nhiều lần rồi, cho nên điều kết luận cuối cùng có thể chỉ trong nháy mắt là làm xong. Thế nhưng, chúng tôi cứ viết hết các chi tiết ra đây.

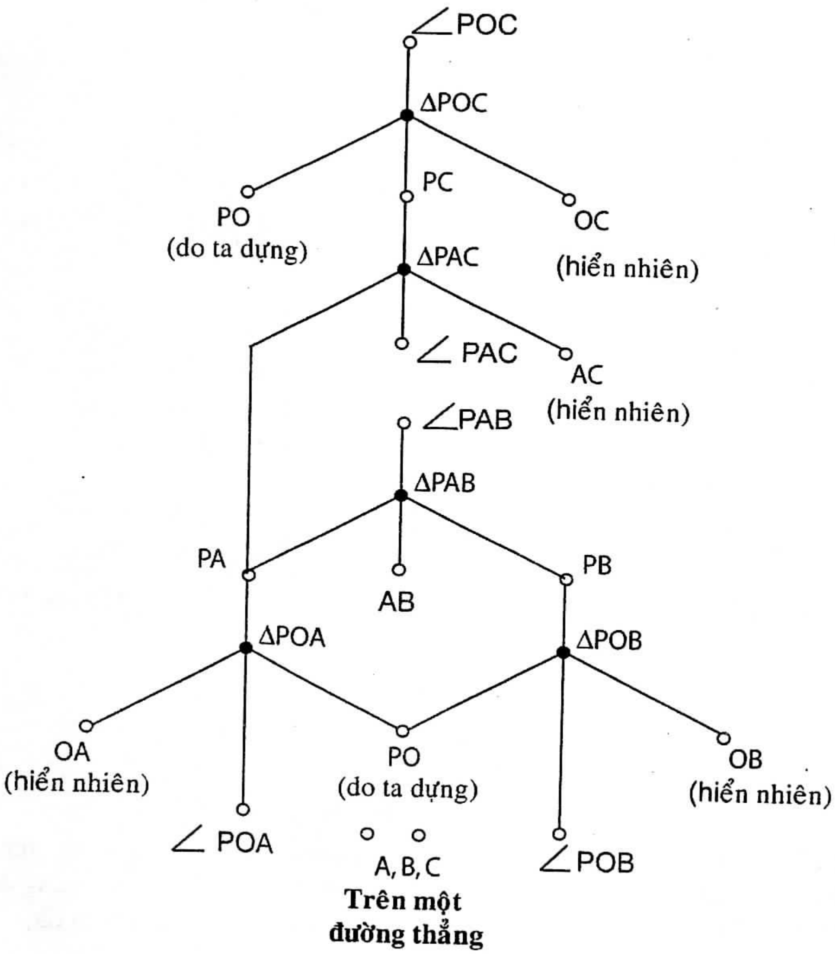
Hệ thức cần tìm $PC = P'C$ (xem hình 7.6c) có thể suy ra được dựa trên sự bằng nhau của hai tam giác (phần này có liên quan tới quá trình đi từ điểm cuối đến điểm đầu).

Thật vậy, từ các hệ thức tìm được trước $PA = P'A$, $PB = P'B$ và từ đẳng thức hiển nhiên $AB = AB$ ta hoàn toàn dễ dàng thiết lập được đẳng thức giữa hai tam giác $\Delta PAB = \Delta P'AB$ (xem hình 7.6h, ở đây chúng ta đi từ điểm đầu đến điểm cuối).

Song, đó không phải là cặp tam giác ta đang cần. Để có được đẳng thức $PC = P'C$ (kết thúc chứng minh), ta có thể căn cứ chẳng hạn vào đẳng thức giữa hai tam giác $\Delta PAC = \Delta P'AC$, đẳng thức này sẽ nghiệm đúng (bây giờ ta lại đi từ điểm cuối đến điểm đầu) nếu ngoài đẳng thức đã được chứng minh: $PA = P'A$

và đẳng thức hiển nhiên: $AC = AC$ ta biết thêm một điều nữa là $PAC = P'AC$.

Thế nhưng hiện giờ, dựa vào đẳng thức giữa hai tam giác PAB và $P'AB$ mà ta đã chứng minh được - ta chỉ mới biết.



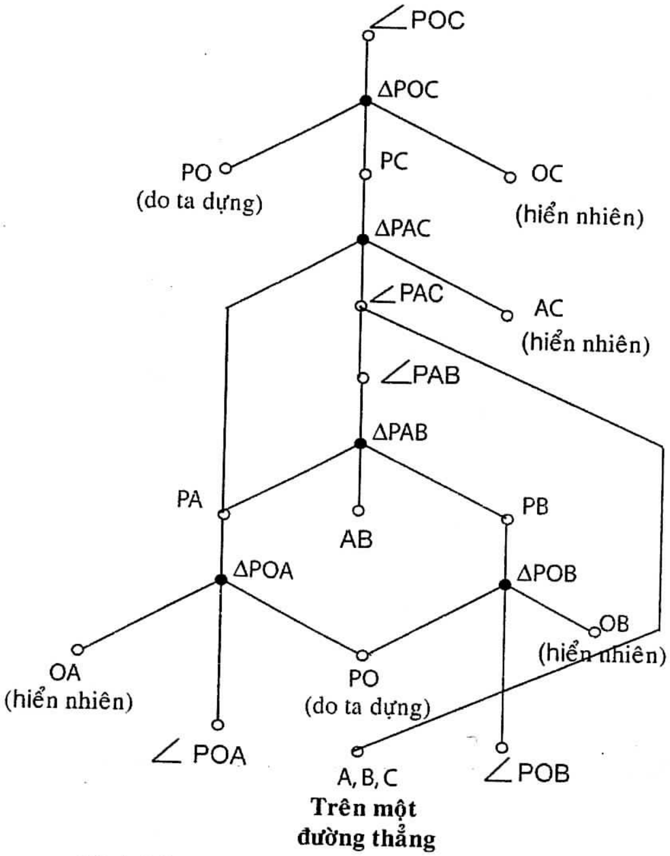
Hình 7.7d. Ta tiến theo cả hai chiều

(Hình 7.7d tương ứng với hình ảnh tưởng tượng trong đầu vào đúng lúc này trong quá trình giải). Nhưng, vì theo giả thiết, các điểm A, B và C nằm trên một đường thẳng, nên

$$PAB = PAC \text{ và } PAC = P'AC.$$

Nhận xét được điều này là ta đã lấp được khe hở (xem hình 7.7d; và nhìn vào bao quát toàn bộ hình 7.6 một lần nữa).

Bước cuối cùng của quá trình chứng minh chuyển từ hình 7.7d qua hình 7.7e - đáng được chúng ta chú ý đặc biệt; mãi đến bước cuối cùng này, ta mới sử dụng đến khoản điều kiện quan trọng nhất là: ba đường thẳng OA, OB và OC nằm trong cùng một mặt phẳng.



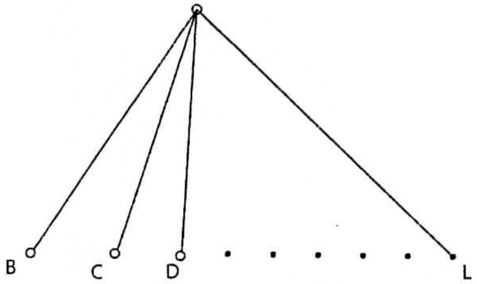
Hình 7.7e. Ta lấp được khoảng trống cuối cùng

5. Những biểu đồ tối giản. Trong §2, mục 6, ta đã nghiên cứu một bài toán tìm tòi (trong trường hợp ấy, là một bài toán tính toán) và trong bài tập 4 ở trên, ta đã nghiên cứu một bài toán chứng minh. Trong cả hai trường hợp, để minh hoạ quá trình giải và cấu trúc giải, ta đã sử dụng những biểu đồ gồm những điểm và những đường nối. Qua việc so sánh hai trường hợp này, chúng tôi muốn xác định cho rõ ý nghĩa của các biểu đồ đó.

Ta hãy xét một biểu đồ "thô sơ nhất" nào đó, chẳng hạn biểu đồ vẽ trên hình 7.8. Trên biểu đồ này, cả thảy có $n + 1$ điểm, trong đó có một điểm A nằm phía trên các điểm khác, là các điểm $B, C, \ldots, i$. Điểm A này, nằm cao hơn các điểm khác, được nối với mỗi điểm trong n điểm còn lại bằng một đoạn thẳng đi từ trên xuống. Những biểu đồ đơn giản nhất này là những "viên gạch" xây nên các biểu đồ mà chúng ta đã tìm hiểu ở các hình 7.1a-g, 7.2 và 7.7a-d. Vậy thì biểu đồ đơn giản nhất này diễn đạt cái gì?

Nếu biểu đồ đơn giản nhất lập cho một bài toán tìm tòi, chẳng hạn biểu đồ vẽ trên hình 7.1a-g và 7.2, thì trên biểu đồ này các điểm $A, B, C \ldots, L$ biểu diễn các đại lượng (đoạn thẳng, độ dài, thể tích), còn nếu biểu đồ đơn giản nhất thuộc về một bài toán chứng minh, giống như biểu đồ vẽ trên các hình 7.7a-d, thì các điểm trên biểu đồ sẽ biểu thị

những điều khẳng định. Trong trường hợp thứ nhất, hình 7.8 chứng tỏ rằng chúng ta có thể tìm được đại lượng *A* nếu biết các đại lượng *B*, *C*,..., *L*.



Hình 7.8. Chúng ta sẽ có thể có A nếu chúng ta tìm ra được B, C, D,..., L.

Trong trường hợp thứ hai, hình 7.8 chứng tỏ rằng chúng ta có thể suy ra được điều khẳng định *A* từ các điều khẳng định *B*, *C*,..., *L*. Nói cách khác, trong trường hợp thứ nhất, biểu đồ đơn giản nhất biểu thị rằng đại lượng *A* là một hàm đã biết của các đại lượng *B*, *C*,..., *L*, còn trong trường hợp thứ hai thì biểu thị rằng điều khẳng định *A* là hệ quả của các điều khẳng định *B*, *C*,..*L*.

Cũng có thể nói: trong trường hợp thứ nhất, biểu đồ đơn giản nhất (xem hình 7.8) trả lời câu hỏi: "Có thể tìm ra đại lượng *A* dựa theo những dữ kiện nào", trong trường hợp thứ hai thì giải đáp câu hỏi. "Có thể suy ra điều khẳng định *A* từ những giả thiết nào?".

Qua những điều vừa trình bày, ta có thể dễ dàng tiên đoán rằng có khả năng sử dụng các biểu đồ loại này để minh hoạ quá trình giải mọi kiểu bài toán. Trong mỗi bài toán cụ thể, các điểm *A*, *B*, *C*, *D*,..., *L* có thể biểu diễn các đối tượng cho trước hoặc các đối tượng có khả năng tìm được. Hình 7.8 cho thấy rằng có thể đạt tới điểm *A* nếu ta có các điểm *B*, *C*, *D*,..., *L* hoặc là tập hợp các dữ kiện *B*, *C*,..., *L* là đủ để ta đạt tới điểm cuối cùng *A*. Biểu đồ sẽ giải đáp câu hỏi: "Muốn đạt tới *A* thì trước hết cần biết những gì?".

6. Những bài toán khác. Mặc dù, như chúng tôi vừa nói, các biểu đồ trên có thể vận dụng để minh hoạ quá trình giải mọi kiểu bài toán (xem bài tập 5); song cách minh hoạ như vậy có thể dài dòng và không tự nhiên. Hãy tìm những bài toán mà quá trình giải có thể biểu diễn dễ dàng trên các biểu đồ và nhờ đó trở nên rõ ràng hơn và bổ ích hơn.

CHƯƠNG 8. KẾ HOẠCH VÀ CHƯƠNG TRÌNH

Từ ước muốn, sẽ nảy ra ý nghĩ về những phương tiện nào đó mà ta thấy rằng dùng chúng sẽ có thể thực hiện được một cái gì giống như cái ta đang muốn và từ ý nghĩ đó sẽ nảy ra ý nghĩ về những phương tiện để đạt được các phương tiện kia và cứ như thế tiếp tục cho đến khi nào ta tới được một nguồn nào đó thuộc quyền sở hữu của ta.

T.HÔP-XƠ - LÊ-VI-APHAN

§1. LẬP KẾ HOẠCH LÀ MỘT PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN

Mấy lời của Hôp-xơ để ở đầu chương này đã trình bày một cách ngắn gọn và chính xác tuyệt diệu một phương pháp quan trọng có tính chất nền tảng, quyết định quá trình giải một bài toán. Chúng ta hãy gắng tìm hiểu sâu thêm những dòng vừa dẫn và bao quát toàn diện hơn quá trình này với tất cả sự đa dạng của các trường hợp có thể vận dụng được nó.

Giả sử ta đang đứng trước một bài toán. Nói cách khác, ta đang có một mục đích mà ta không thể đến ngay được và ta gắng tìm ra một cách hành động thích hợp để đạt mục đích đó. Mục đích có thể thuộc lĩnh vực thực hành hay lí thuyết, chẳng hạn thuộc lĩnh vực toán học - đó có thể là một đối tượng toán học nào đấy (một số, một tam giác,...) mà ta muốn tìm (tính, dựng,...) Dù mục đích A đó như thế nào mặc lòng, ta cũng muốn đạt được.

"Từ ước muốn, sẽ nảy ra ý nghĩ về những phương tiện nào đó" - đó là một thuộc tính rất dễ thấy của trí tuệ. Mục đích sẽ gợi ra phương tiện: thông thường, sau khi có ước muốn, ta liền nảy ra ý nghĩ về những hành động nhất định cần thiết để thực hiện ước muốn ấy. Tôi đang nghĩ đến một đồ vật nào đó mà tôi muốn có, tôi liền nhớ ngay đến cửa hiệu mà tôi có thể đến mua đồ vật ấy.

Nhưng ta hãy trở lại những lời của Hôp-xơ: "Từ ước muốn, sẽ nảy ra ý nghĩ về phương tiện nào đó" B(*) mà dùng chúng có thể đạt được A. Có thể rằng, ý nghĩ này bắt nguồn từ kinh nghiệm thu được từ trước, "chúng ta đã từng có dịp nhận xét thấy rằng B sinh ra một cái gì giống như mục đích A mà chúng ta đang muốn đạt". Dù trong trường hợp nào mặc lòng, ta cũng nghĩ rằng sẽ có thể thu được A nếu như có B. Và từ ý nghĩ về B, sẽ nảy ra ý nghĩ về những phương tiện nào, chẳng hạn C, mà dùng chúng sẽ có thể thu được B: ta sẽ thu được B nếu như có C. "Và cứ thế tiếp tục lần lần", - ta sẽ có thể thu được C nếu như có D, - "cho đến khi nào ta tới được một nguồn thuộc quyền sở hữu của ta", ta sẽ có thể thu được D nếu như có E - nhưng E lại là cái mà ta có! Quá trình suy nghĩ của ta kết thúc ở E này: ta có E, E "thuộc quyền sở hữu của ta", E là cái cho trước, là cái đã biết.

Chuỗi ý nghĩ của ta chứa nhiều "nếu": "Sẽ có cái này nếu có cái kia", "ta sẽ thu được cái này, nếu như có cái kia". Quả thật, ta thường nói:

(*) Tuy nói "những phương tiện" (số nhiều), song tác giả vẫn kết hợp chúng thành một "đối tượng" B. Về vấn đề này, xem §2 - (chú thích người dịch bản tiếng Nga).

có A nếu có B; có B nếu có C;

có C nếu có D; có D nếu có E;

đến E ta dừng lại, vì E dứt khoát là có rồi, không cần phải thêm "nếu" nữa.

(Có một điều nhận xét, có thể cũng là thừa, rằng ở đây, số lần" "nếu", tức là số bước trung gian, không thành vấn đề; trong ví dụ của ta, có bốn bước và năm "mục đích" hay "đối tượng", - còn trong trường hợp tổng quát, sẽ có n bước và $n + 1$ đối tượng).

Những điều vừa nói ở trên có thể gọi là việc lập kế hoạch. Tiếp theo việc lập kế hoạch. Bắt đầu từ E là "cái nguồn thuộc quyền sở hữu của ta", ta phải thu được D; tìm ra D, ta phải lần tới C, từ C tới B và cuối cùng từ B tới A là mục đích mong muốn.

Cần nhận xét rằng lập kế hoạch và thực hiện kế hoạch tiến hành theo hướng trái ngược nhau. Ta bắt đầu lập kế hoạch từ A (mục đích ẩn, kết luận); ta lập kế hoạch xong sau khi đạt tới E (những đối tượng cho trước, dữ kiện, điều kiện). Còn khi ta thực hiện kế hoạch, thì ngược lại, ta đi từ E đến A; thành thử, ta bắt đầu nghĩ đến A, tức là về mục đích của ta, ngay từ đầu, nhưng mãi đến cuối cùng, ta mới đạt tới mục đích đó. Nếu xem sự vận động về phía mục đích là theo chiều xuôi thì có thể nói, khi lập kế hoạch ta đã đi theo chiều ngược. Như vậy, phương pháp quan trọng do Hôp-xơ miêu tả để giải các bài toán sẽ có thể gọi là lập kế hoạch theo chiều ngược, tức là đi ngược từ điểm cuối đến điểm đầu. Các nhà hình học Hi Lạp gọi phương pháp này là phép phân tích, có nghĩa là "giải từ cuối lên đầu". Còn nếu ta đi ngược lại, tức là đi từ các đối tượng sẵn có về phía mục đích (trong trường hợp của ta là đi từ E đến A thì phương pháp giải như thế (ngược với phương pháp trước), gọi là lập kế hoạch theo chiều xuôi, hay đi từ điểm đầu đến điểm cuối, hay phép tổng hợp (theo tiếng Hi Lạp có nghĩa là "kết hợp")(*).

Bạn đọc nên dựa trên một ví dụ đơn giản nào đó mà hình dung trực quan công việc tiến hành từ điểm cuối đến điểm đầu khi lập kế hoạch và công việc tiến hành từ điểm đầu đến điểm cuối khi thực hiện kế hoạch. "Tôi sẽ có thể kiếm ra được cái đồ vật mà tôi đang thích A tại một cửa hiệu nào đó, nếu tôi bỏ ra một số tiền B nhất định để mua đồ vật ấy; tôi sẽ có thể kiếm được số tiền B ấy, nếu như... "Tôi tin rằng bạn đọc sẽ lĩnh hội dễ dàng kĩ thuật lập kế hoạch và cũng hi vọng rằng bạn đọc sẽ không bao giờ gặp khó khăn trong khi thực hiện các kế hoạch đó".

§2. MỘT PHƯƠNG PHÁP TỔNG QUÁT HƠN

Chúng ta hãy thử đứng trên quan điểm của phương pháp vừa trình bày trong mục trước mà xét một ví dụ đã được xét kĩ trong chương 7 (và được minh hoạ trên hình 7.2). Dựa trên ví dụ này, ta có thể xác lập được một cách chắc chắn xu hướng chung của phương pháp: đi ngược chiều từ ẩn đến dữ kiện trong giai đoạn lập kế hoạch và đi xuôi chiều, từ dữ kiện đến ẩn, trong giai đoạn thực hiện kế hoạch. Còn về các chi tiết giải thì phương pháp không đề cập đến.

(*) Xem Giải một bài toán như thế nào?

Ta hãy xét bước đầu tiên. Trong §1, khi mô tả việc lập kế hoạch như một phương pháp giải bài toán, chúng tôi nói rằng A được quy về B mục đích ban đầu được thay bằng mục đích thứ cấp, việc thu được A phụ thuộc vào tình hình có đạt được B hay không. Còn trong ví dụ minh hoạ trên hình 7.2, việc tính ẩn (thể tính chóp cụt) quy về việc tính hai ẩn mới (hai thể tích); bây giờ không có một, mà có hai mục đích thứ cấp).

Song nếu ta trở lại một lần nữa ví dụ minh hoạ trên hình 7.2 và nhớ lại những nhận xét đã nêu trong chương trình 7 về vấn đề minh hoạ bằng đồ thị bài toán này (nói riêng, xem bài tập 5 trong chương 7; thì ta có thể hiểu dễ dàng cần phải khái quát hoá phương pháp trình bày trong §1 như thế nào để chẳng những nó bao quát được ví dụ trong chương 7, mà còn bao quát được vô số những trường hợp khác cũng đáng được quan tâm.

Giả sử ta có một mục đích A trước mắt. Ta không thể đạt được mục đích đó ngay, nhưng ta nhận xét rằng sẽ có thể đạt được cái đó nếu như ta có một số đối tượng B', B'', B'''. Thực ra, hiện giờ ta cũng chưa có những cái đó, nhưng ta đã bắt đầu nghĩ đến vấn đề làm thế nào thu được những cái đó; nói cách khác, ta xem B', B'', B''' như những mục đích thứ cấp. Tiếp đó, sau một hồi suy nghĩ, ta sẽ xác định được nếu ta nắm được một số đối tượng mới C', C'', C'''. Trên thực tế, các đối tượng này (C', C'', C'''). Ta cũng không có, nhưng ta có thể cố gắng tìm ra; đó là những mục đích cấp ba của ta,... Cứ như thế ta dệt dần dần nên "tấm mạng nhện" kế hoạch của ta. Có thể, ta phải nói nhiều lần: "Ta sẽ có thể đạt được cái này nếu như ta có cái kia và cái khác nữa và cái thứ ba nữa" và cứ như thế tiếp tục cho đến khi nào ta tới được "chỗ đất rắn", tức là tới được những đối tượng mà ta nắm trong tay thật sự. Tấm mạng nhện kế hoạch của ta cấu tạo bởi những mục đích phụ, phục tùng mục đích ban đầu A của ta và bởi những liên hệ giữa các mục đích đó. Các mục đích phụ này có thể có nhiều, cho nên khó có thể mô tả được các chi tiết tấm lưới phức tạp trong tấm mạng nhện của ta, nhưng lúc này biểu đồ đã có, ta đã xây dựng trong chương 7, nó sẽ giúp đỡ ta, chẳng hạn như trong mục nhỏ 3 §5, chương 2, mục đích đầu tiên của ta là S, các mục đích thứ cấp là a, b, c và mục đích cấp ba là l, m, n (xem cả hai bài tập 2, chương 7).

Thiết tưởng, những điều vừa trình bày ở trên cũng đã nêu lên khá rõ ràng đặc điểm của một phương pháp tổng quát hơn, mà một trường hợp riêng của nó là phương pháp mô tả trong §1; chúng ta sẽ gọi phương pháp này là phương pháp đi giật lùi, phương pháp có nội dung là lập kế hoạch; điểm xuất phát ở đây là mục đích (đối tượng cần tìm, ẩn, kết luận) và chúng ta đi giật lùi về phía các đối tượng "thuộc quyền sở hữu của ta" (các đối tượng đã biết, các dữ kiện, điều kiện). Kế hoạch của chúng ta giả định rằng một khi đạt được các đối tượng vừa nêu mà ta "nắm trong tay", ta sẽ dùng chúng làm điểm xuất phát và ta sẽ đi ngược lại theo vết cũ mà tiến về phía mục đích (xem mục nhỏ 3, bài tập 2 trong chương 9).

§3. CHƯƠNG TRÌNH

Hỏi hai số $\sqrt{3}+\sqrt{11}$ và $\sqrt{5}+\sqrt{8}$ có bằng nhau không? Nếu không bằng nhau thì số nào lớn hơn? (giả định rằng giá trị của tất cả các căn được hiểu theo nghĩa số học).

Nếu đã có ít nhiều kinh nghiệm thực hiện những biến đổi đại số, thì vạch kế hoạch trả lời câu hỏi này chẳng có gì khó khăn; thậm chí, chúng ta còn có thể phát biểu nó một cách xác định đến mức có thể dùng một thuật ngữ riêng để gọi cái kế hoạch này: chương trình.

Hai số của ta có thể hoặc là bằng nhau hoặc là số thứ nhất lớn hơn hoặc là số thứ hai lớn hơn. Giữa hai số có thể xảy ra ba quan hệ biểu diễn bằng các dấu =, > và <, nhưng chỉ có một quan hệ là có thật; cụ thể đó là quan hệ nào thì hiện giờ ta chưa biết, tuy rằng ta hi vọng chẳng bao lâu sẽ tìm ra được. Thay cho quan hệ duy nhất đúng ấy, trong trường hợp đang xét, ta đặt dấu "?" và viết:

$$\sqrt{3}+\sqrt{11} \quad ? \quad \sqrt{5}+\sqrt{8}$$

Dù trên thực tế xảy ra quan hệ nào trong ba quan hệ khả dĩ đó mặc lòng, ta vẫn có thể thực hiện được một số biến đổi đại số "hợp pháp" đối với cả ba trường hợp. Chẳng hạn, trước hết có thể nâng cả hai số lên bình phương; làm như thế, quan hệ giữa vế trái và vế phải vẫn giữ nguyên.

$$3+2\sqrt{33}+11 \quad ? \quad 5+2\sqrt{40}+8$$

Nhờ phép biến đổi này, ta đã giảm được số lượng căn bậc hai: trước có bốn, nay chỉ còn hai. Tiếp đó, ta sẽ dần dần khử hết được các căn còn lại và lúc ấy ta sẽ có thể xác định được quan hệ nào trong ba quan hệ khả dĩ ứng với dấu "?".

Bạn đọc không cần phải dự kiến trước tất cả các phép biến đổi đại số tiếp sau, cùng với tất cả các hệ quả của chúng; song bạn đọc phải thấy rõ rằng các phép biến đổi này có thể thực hiện không có gì khó khăn và nhất định sẽ dẫn đến mục đích mong muốn và bạn đọc cũng có thể quyết rằng trong trường hợp cụ thể này nên dùng một thuật ngữ riêng thì thật là thích hợp và cần phải gọi cái kế hoạch xây dựng tỉ mỉ như thế là chương trình (xem §5).

Thực ra, nhận xét vừa nêu đã dẫn ta đến mục đích đặt ra trong mục này, không cần thiết phải nêu các bước trong chương trình nữa. Thế nhưng, ta cứ làm:

$$1+2\sqrt{33} \quad ? \quad 2\sqrt{40}$$

$$1+4\sqrt{33}+132 \quad ? \quad 160$$

$$4\sqrt{33} \quad ? \quad 27$$

$$528 \quad ? \quad 729$$

Bây giờ vấn đề đã được giải quyết; ta nhận ra số nào trong hai số là số lớn hơn và đi lộn lại theo vết cũ, ta sẽ xác định được $\sqrt{3}+\sqrt{22}<\sqrt{5}+\sqrt{8}$.

§4. LỰA CHỌN GIỮA NHIỀU KẾ HOẠCH

Trên các cạnh của một tam giác (bất kì) cho trước, dựng ba tam giác đều ở ngoài tam giác đó và nối tâm của các tam giác này lại. Chứng minh rằng tam giác thu được theo cách đó là một tam giác đều.

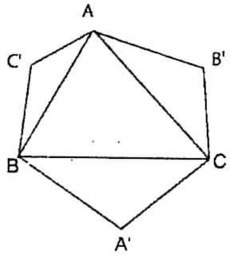
Trên hình 8.1a, vẽ tam giác cho trước *ABC*; các chữ *A*', *B*', *C*' là kí hiệu của các tam giác đều theo thứ tự, dựng trên các cạnh *BC*, *CA* và *AB*. Ta cần chứng minh tam giác *A'B'C'* là đều, tuy rằng điều đó có vẻ là lạ, gần như phi lí; ta khó mà hi vọng rằng các cạnh của tam giác *A'B'C'* này bao giờ cũng bằng nhau, rằng hình dạng của nó, vốn là kết quả

của một phép dựng hình khá phức tạp, lại hoàn toàn không lệ thuộc vào hình dạng của tam giác (bất kì!) lúc đầu; có thể đoán chừng việc chứng minh ở đây sẽ không đơn giản.

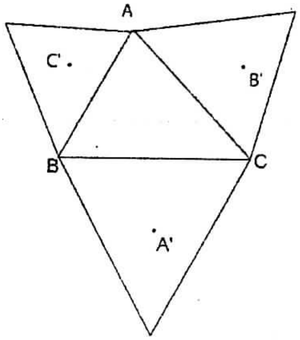
Trước hết, ta không thấy thích thú gì đối với các điểm A', B' và C' vì chúng có vẻ như là tách rời khỏi phần còn lại trên hình 8.1a. Tuy nhiên các khuyết điểm này cũng không đến nỗi nghiêm trọng lắm. Như có thể nhận thấy không khó khăn lắm, tam giác $BA'C$ là một tam giác cân; trong tam giác này $A'B = A'C$ và $\widehat{BA'C} = 120^0$. Sau khi dựng tam giác này và hai tam giác tương tự với nó lên hình vẽ ta sẽ được một hình nhìn "mạch lạc" hơn (xem hình 8.1b).

Dù sao, lúc này ta vẫn chưa biết làm thế nào đi tới mục đích. Có thể chứng minh kết luận mong muốn bằng cách nào đây? Theo phong cách Ơ-clít chăng? Hay bằng hình học giải tích? Hay dùng lượng giác?

1. Nếu kiên trì theo phong cách Ơ-clít, thì sẽ chứng minh $A'B' = A'C'$ như thế nào đây? Có thể chứng minh được đẳng thức này nếu chứng tỏ được rằng $A'B'$ và $A'C'$ là những cạnh tương ứng của hai tam giác bằng nhau. Nhưng trên hình của ta, không thấy có hai tam giác như thế và cũng chưa nhìn thấy có cách gì tạo ra hai tam giác như thế. Điều đó khiến ta hoang mang - ta sẽ tìm kiếm xem ở đây liệu có cách xử lí nào khác không.



Hình 8.1a. Ba điểm cô lập



Hình 8.1b. Đã có thêm những liên hệ

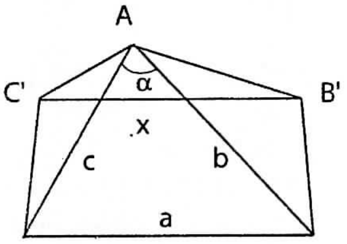
2. Dùng hình học giải tích thì chứng minh $A'B' = A'C'$ như thế nào đây? Ta sẽ xem toạ độ của các điểm A, B và C như những đại lượng cho trước, còn toạ độ của các điểm A', B' và C' như những đại lượng chưa biết (ẩn). Sau khi biểu diễn các đại lượng chưa biết theo các đại lượng cho trước, ta có thể dùng các dữ kiện đó để tìm ra các khoảng cách mà ta đang quan tâm và qua đó sẽ biết được các khoảng cách đó có bằng nhau hay không. Đó là một kế hoạch hoàn toàn rõ ràng, nhưng để thực hiện kế hoạch ấy, ta sẽ phải đụng chạm tới sáu đại lượng chưa biết và sáu đại lượng cho trước... thành thử, con đường này chẳng có gì hấp dẫn cho lắm; ta hãy thử cách thứ ba xem sao.

3. Dùng lượng giác để chứng minh $A'B' = A'C'$ thì làm như thế nào? Ta sẽ xem các cạnh a, b, c của tam giác ABC như những đại lượng cho trước và các khoảng cách $B'C = x$, $C'A' = y$, $A'B' = z$ như những đại lượng chưa biết. Sau khi tính được các ẩn đó, ta sẽ xét

xem có thật $x = y = z$ hay không. Xem chừng, theo con đường này "dễ làm ăn" hơn theo cách ở mục nhỏ 2; ở đây, ta chỉ có ba đại lượng cho trước và ba ẩn thôi.

4. Trên thực tế, không cần phải tìm cả ba ẩn, mà chỉ tìm ra hai cũng đủ. Nếu $y = z$ thì bất kì hai cạnh nào của tam giác $A'B'C'$ cũng đều bằng nhau và thế là đủ rồi.

5. Hơn nữa, thực ra, cũng không cần tìm hai ẩn nữa kia; nếu vận dụng những suy luận tinh vi hơn thì có thể chỉ tính một ẩn cũng đủ rồi. Chỉ cần biểu diễn x chẳng hạn theo a, b, c; nếu ta có được một biểu thức đối xứng đối với a, b, c thì tức là mục đích của ta đã đạt (một biểu thức gọi là đối xứng đối với a, b, c, nên nó không thay đổi khi hoán vị các chữ đó).



Hình 8.1c. Hãy tập trung chú ý vào một cạnh

Thật vậy, nếu đối với x ta thu được một biểu thức như thế, thì biểu thức này cũng sẽ ứng với cả y và z.

Mặc dù kế hoạch này còn tuỳ thuộc vào sáng kiến của người giải, tức là vào năng lực đề xuất một ý mới nho nhỏ, song xem ra thì khá hấp dẫn; bạn đọc nên thử thực hiện (xem hình 8.1c và bài tập 3).

6. Qua câu chuyện vừa kể, liệu ta có thể rút ra được điều gì bổ ích không? Tôi thiết nghĩ là có.

Nếu bạn đang đứng trước một số kế hoạch mà không có cái nào hoàn toàn tin tưởng cả, nếu từ địa điểm bạn đang đứng toả ra nhiều con đường, thì bạn hãy tìm hiểu từng con đường trong tất cả các con đường ấy một quãng ngăn ngắn trước khi đi quá xa theo một con đường, bởi vì chưa biết chừng con đường này lại đúng là con đường đưa bạn vào ngõ cụt cũng nên.

§5. KẾ HOẠCH VÀ CHƯƠNG TRÌNH

Chúng ta có thể xem một kế hoạch như một con đường mà ta sắp đi du lịch. Song có thể có nhiều kế hoạch khác nhau. Có lẽ, chúng ta cũng mong có được một kế hoạch hành động thế nào để đi thẳng đến đích; song, tiếc rằng không phải bao giờ người ta cũng có khả năng lập được một kế hoạch khá đầy đủ, vả lại trong khi sơ bộ lập kế hoạch cũng không cần phải nêu quá nhiều hành động cụ thể đến thế. Đôi khi, ta chỉ nhìn thấy một đoạn ngắn của con đường sắp đi, khi nhìn thấy một đoạn đường dài và có trường hợp nhìn thấy suốt con đường, đến tận đích. Ngoài ra, chúng ta có thể nhìn thấy con đường thật rõ. Trên đoạn đường nào ta nhìn thấy rõ hay hoàn toàn không nhìn thấy gì hết, ta có thể gặp nhiều điều bất ngờ - và ta phải chuẩn bị đối phó với mọi điều bất ngờ ấy. Trong số những điều bất ngờ, thì thích thú nhất, hào hứng nhất (và ta không bao giờ được rời bỏ niềm hi vọng ấy!) là lúc nảy ra một ý "sáng ngời", ngay tức khắc chiếu rọi bản chất vấn đề.

Rất nhiều khi ta không có ngay được một kế hoạch từ đầu đến cuối, mà trong kế hoạch của ta vẫn còn những chỗ trống, vẫn còn thiếu một ý cần thiết. Nhưng điều đó không làm ta dừng bước, ta cứ bắt tay vào thực hiện kế hoạch với hi vọng rằng rồi sẽ nảy ra một ý "sáng" nào đó hay, đơn giản, một ý mới nào đó, giúp ta lấp được chỗ trống.

Một kế hoạch tốt khác một kế hoạch tồi trước hết ở chỗ trong kế hoạch tốt thì có nhiều hi vọng nảy ra ý mới hơn. Nhưng nói chung chúng ta không cần đến những ý mới, mà ngược lại, chúng ta tin chắc rằng những bước đã cân nhắc và dự kiến trước sẽ bảo đảm đạt tới đích, thì kế hoạch của chúng ta có thể coi là đủ rõ ràng và xác định để được gọi là một chương trình hành động (đầy đủ). Đôi khi ta phải mất rất nhiều thời gian để xây dựng nhiều kế hoạch không hoàn thiện, trước khi biến một kế hoạch thành chương trình.

Ta hãy đối chiếu §3 với §4 chẳng hạn thì sẽ rõ.

§6. PHƯƠNG PHÁP KẾ HOẠCH

Trong những hoàn cảnh thích hợp, mỗi phương pháp trong số các phương pháp ta đã nghiên cứu trước đây, sẽ đẻ ra một kế hoạch, song phương pháp đó không phải ngay một lúc đã biến thành một kế hoạch tỉ mỉ, tức là một chương trình. Chúng ta hãy xét các bài toán dựng hình chẳng hạn. Ta có thể thử giải bằng phương pháp hai quỹ tích. Dĩ nhiên, như thế cũng đã là một kế hoạch rồi; song, kế hoạch này đòi hỏi phải có những ý bổ sung để có thể tìm ra được một điểm thích hợp mà bài toán có thể quy về việc dựng điểm ấy và để có thể phân chia điều kiện thành hai phần sản sinh ra hai quỹ tích xác định vị trí của điểm ấy.

Hoặc giả, ta định giải bài toán hình học này bằng phương pháp Đề-các, bằng cách đưa nó về một hệ phương trình. Dĩ nhiên đó cũng là một kế hoạch; song kế hoạch này đòi hỏi phải có những ý bổ sung để có thể lập được một hệ phương trình với số phương trình tương đương với số ẩn và ngoài ra còn phải có những ý để giải hệ phương trình vừa lập được.

Đi giật lùi (từ điểm cuối lên điểm đầu) là một phương trình rất tổng quát và rất có ích trong việc lập kế hoạch; song để có thể lấp được khoảng trống giữa ẩn và dữ kiện, rõ ràng là chúng ta còn phải có thêm những ý nào đấy, do bản chất của vấn đề gợi ra. Nhưng khi lập xong kế hoạch theo chiều ngược và đã bện xong các sợi dây lôgic nối liền những chỗ gián đoạn, thì tình hình sẽ khác hẳn. Trường hợp này, chúng ta có một chương trình đi xuôi, để tiến từ điểm đầu đến điểm cuối, từ dữ kiện đến ẩn.

BÀI TẬP VÀ CHÚ THÍCH BỔ SUNG CHO CHƯƠNG 8

1. Đi ngược (từ điểm cuối đến điểm đầu) hay đi xuôi (từ điểm đầu đến điểm cuối)? phân tích hay tổng hợp? Theo thuật ngữ của chúng ta (xem §2), nói "ta đi từ điểm cuối đến điểm đầu" có nghĩa là ta vận dụng một chiến lược giải nhất định, một con đường tiêu chuẩn lập kế hoạch giải. Vậy thì chiến lược này có phải là chiến lược duy nhất có thể vận dụng không? Liệu nó có phải là chiến lược hay nhất không?

1) Ta hãy trở lại "ví dụ của chúng ta", cái ví dụ mà ta đã nghiên cứu bằng đồ thị trong chương 7. Kế hoạch giải cuối cùng của bài toán này được trình bày trên hình 7.1g; đó là

một mạng lưới những điểm và đường, những ẩn trung gian và những liên hệ qua lại giữa chúng với nhau, căng trên cái "vực" trống hoác ngăn cách ẩn và dữ kiện ở hình vẽ lúc đầu. Ta bắt đầu dệt tấm lưới ấy xuất phát từ ẩn và tiến về phía các dữ kiện. Trên hình 7.2, trình bày các giai đoạn liên tiếp của công việc của chúng ta. Ta gọi đó là đi ngược hay đi giật lùi từ "điểm cuối đến điểm đầu" (trên hình 7.2, là từ trái sang phải).

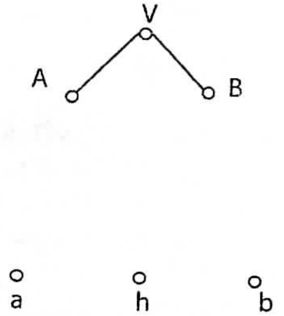
Kế hoạch cuối cùng, hệ thống toàn bộ các liên hệ qua lại (xem hình 7.1g; có khi tấm lưới còn phức tạp hơn nữa) không chỉ rõ hướng đi trong quá trình lập kế hoạch. Một người này có thể bắt đầu lập kế hoạch từ các dữ kiện và đi theo chiều mũi tên trên hình 7.1g (như chúng ta đã làm khi thực hiện kế hoạch). Triển khai kế hoạch theo chiều này có thể gọi là triển khai theo chiều xuôi, đi từ điểm đầu đến điểm cuối.

Trong khi đó, một người khác (người này đứng trước một bài toán có thể là phức tạp hơn) có thể lập kế hoạch mà không nhất thiết từ đầu đến cuối cứ đi theo một hướng. Sau khi chọn hoặc là điểm đầu hoặc là điểm cuối làm điểm xuất phát, người ấy có thể khi thì đi, từ ẩn đến dữ kiện, khi thì đi từ dữ kiện đến ẩn; người ấy cũng có thể luân phiên đi theo cả hai hướng; khi đó, thậm chí người ấy còn có thể xác lập một số liên hệ "tương lai" nào đó giữa các đối tượng mà hiện tại chưa có liên hệ gì với cả điểm đầu lẫn điểm cuối của lược đồ giải đã vạch, người ấy có thể bắc một nhịp cầu nho nhỏ giữa những điểm cô lập, nằm lẻ loi ở đâu đó giữa dữ kiện và ẩn. Như vậy, lập kế hoạch từ điểm đầu đến điểm cuối tuyệt nhiên không phải là một khả năng duy nhất. Có thể dùng bài tập 4 trong chương 7 làm một ví dụ cụ thể minh hoạ điều này.

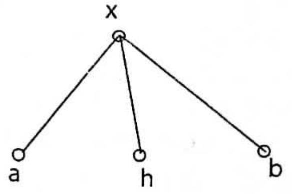
2) Trong ví dụ tổng kết trên hình 7.2, chúng ta đã lập kế hoạch bằng cách đi ngược từ điểm cuối đến điểm đầu. Bây giờ, ta thử so sánh công việc của chúng ta với công việc của một người đã lập kế hoạch giải cùng bài toán này bằng cách đi xuôi từ điểm đầu đến điểm cuối.

Chúng ta đã bắt đầu từ ẩn, cho nên chúng ta tự đặt cho mình những câu hỏi dựa trên ẩn. Bài toán yêu cầu gì? Cái gì là ẩn? Có thể thu được một đối tượng như thế bằng cách nào đây? Có thể tìm ra ẩn loại này bằng cách nào đây? Để thu được một ẩn như thế nào thì cần những dữ kiện gì? Và chúng ta đã tìm được hai "dữ kiện", đó là các thể tích A và B mà thông qua chúng có thể biểu diễn ẩn V và nếu biết chúng thì sẽ thu được V.

$V = B - A$. Giai đoạn này của công việc của chúng ta được trình bày trên hình 8.2a (là một phần của hình 7.2).



Hình 8.2a



Hình 8.2b

Có một người khác lại bắt đầu theo cách khác hẳn: bắt đầu từ các dữ kiện. Người ấy sẽ đặt câu hỏi dựa trên những cái cho trước. Bài toán cho trước những gì? Những gì là dữ kiện? Cho trước những cái đó để làm gì? Có thể dùng các dữ kiện loại này như thế nào? Liệu có thể rút ra được cái lợi từ những dữ kiện đó không? Và qua các câu hỏi này, người ấy sẽ nhận xét thấy rằng dùng các dữ kiện đó sẽ có thể tính được độ dài (chiều cao) x, tức là biểu diễn x theo a, h và b (bằng cách sử dụng tỉ lệ thức, như chúng ta cũng đã làm ở giai đoạn muộn hơn một chút, xem hình 7.1e). Giai đoạn này của công việc được trình bày trên hình 8.2b).

Ta lại trở về cách giải của chúng ta, trở về giai đoạn trình bày trên hình 8.2a. Sau khi biểu diễn ẩn V theo A và B, chúng ta gặp hai ẩn mới A và B, tức là nảy ra hai bài toán (phụ) mới:

Tính A, nếu biết a, h và b.

Tính B, nếu biết a, h và b.

Đó là hai bài toán toán học được phát biểu rõ ràng có cùng tính chất như bài toán đầu. Đi theo chiều ngược, ta lại tự hỏi: có thể tìm các ẩn này bằng cách nào? Để tìm ra các ẩn này thì cần những dữ kiện gì?

Và bây giờ, ta lại quay lại người giải kia; người ấy đã tới được giai đoạn biểu diễn trên hình 8.2b. Sau khi biểu diễn x theo các đại lượng đã biết a, h và b, người ấy có thể xem x như một dữ kiện phụ; như vậy là bây giờ người ấy đã có nhiều đại lượng đã biết hơn và nhờ đó có nhiều khả năng tìm ra được ẩn mong muốn hơn. Song, đi theo đường này, người ấy không đến được một bài toán phụ đặt ra rành mạch, mà sẽ phải tự nêu cho mình những câu hỏi kém xác định hơn: Có thể sử dụng x như thế nào đây? Những đối tượng như thế có thể dùng làm gì? Liệu có thể rút ra được cái lợi gì từ các dữ kiện đó?

Vậy sự khác nhau căn bản giữa chúng ta và người kia, giữa hai tình huống biểu diễn trên hình 8.2a và hình 8.2b là ở triển vọng sau này. Chúng ta sẽ được lợi gì nếu chúng ta giải được các bài toán phụ của chúng ta? Người kia sẽ được lợi gì nếu người kia trả lời được câu hỏi tự đặt ra?

Nếu chúng ta biểu diễn được các ẩn phụ (A và B) theo a, h và b thì chúng ta cũng sẽ có thể biểu diễn được ẩn ban đầu ($V = B - A$) theo các dữ kiện đó và thế là chúng ta giải được bài toán. Thế nhưng người kia, đi theo chiều xuôi tuy có thể biểu diễn được một đại lượng trung gian nào đó, chẳng hạn y, theo các đại lượng cho trước, nhưng người ấy vẫn sẽ đứng trước một câu hỏi: Phải làm gì với y đây? Thật ra, trừ có mỗi một trường hợp là: nếu người ấy gặp may mắn, chính "ẩn chính" V lại có thể giữ vai trò của y - khi đó, người ấy cũng giải xong bài toán.

3) Lập kế hoạch theo chiều xuôi hay theo chiều ngược cũng đều có thể đi đến thành công hay thất bại, chẳng cách nào hơn cách nào. Đi ngược từ điểm cuối đến điểm đầu, ta có thể đi tới một bài toán phụ mà ta giải được. Đi xuôi từ điểm đầu đến điểm cuối, ta có thể suy ra từ các đại lượng đã biết hết đại lượng mới này đến đại lượng mới khác; nhưng các đại lượng này có khi chẳng ích gì: có thể, ta không thể nào rút ra từ đó được ẩn mong muốn.

Lập kế hoạch theo hướng này hay theo hướng kia đều cần phải tổ hợp nhiều biện pháp khác nhau. Và nếu khi đi ngược từ điểm cuối đến điểm đầu có thể ta phải dành phần lớn thời gian để giải những bài toán phụ rõ nét thì khi đi xuôi từ điểm đầu đến điểm cuối, ta sẽ phải tốn nhiều thời gian vào việc cân nhắc, đắn đo giữa các bài toán lẽ ra có thể giải được hoặc vào việc giải những bài toán vô bổ.

Nói chung, lập kế hoạch theo chiều ngược, đi từ điểm cuối đến điểm đầu, con đường "phân tích" (theo thuật ngữ của các nhà hình học Hi Lạp), được ưa chuộng hơn. Ở đây, không có một quy tắc cứng nhắc và bất di bất dịch nào, nhưng thoạt tiên ta nên xem xét ẩn (kết luận, đối tượng, cần tìm), rồi xem xét đến các dữ kiện (điều kiện, giả thiết, các đối tượng ta có trong tay). Bạn hãy bắt tay vào công việc bằng cách đi từ điểm cuối đến điểm đầu, xuất phát từ ẩn, dĩ nhiên nếu không có nhận định gì đặc biệt để từ bỏ việc đó, chẳng hạn có một ý hay nảy ra buộc bạn phải bắt đầu từ các dữ kiện và cứ tiếp tục tiến theo hướng đó.

4) Chúng tôi nêu thêm một số chú ý ngắn gọn, tuy rằng ở đây còn nhiều điều đáng nói nữa(*).

Trong một số trường hợp, ta có một số căn cứ nhất định để lựa chọn. Chẳng hạn như trong nhiều bài toán thực hành đối tượng muốn tìm (muốn dựng, muốn đạt được...), ta có thể nắm được hoàn toàn, trong khi đó, các đối tượng mà ta có thể sử dụng để đạt mục đích thì ta lại ít biết và ta không thể bao quát hết vì chúng quá nhiều. Ta khó có thể có đủ luận cứ để bắt đầu công việc từ một đối tượng nhất định nào đó trong cả một tập hợp những đối tượng không thể bao quát hết, cho nên nhiều khi ta buộc phải lập kế hoạch theo chiều ngược lại.

Sau khi đã lập được kế hoạch theo chiều ngược, chúng ta bước vào thực hiện kế hoạch bằng cách đi theo chiều xuôi (nhớ lại §5); nhưng đó lại chính là thực hiện kế hoạch, chứ không phải là lập kế hoạch nữa, bởi vì tất cả các ý đã được chúng ta xây dựng từ trước và bây giờ chỉ việc thực hiện các ý đó thôi. Điều đó thậm chí có thể khiến ta ngờ rằng người giải, khi bắt đầu lập kế hoạch theo chiều xuôi, đã sử dụng những ý có sẵn - ở đây tôi muốn nói sử dụng cách kín đáo, thậm chí theo tiềm thức nữa.

Một cô sinh viên đã cắt nghĩa điều này như sau: Kinh nghiệm tự bản thân nó (thiếu sự phân tích trước) vẫn không tạo được điều gì thuận lợi, tựa như muốn nướng bánh ga-tô mà có đủ mọi vật liệu; nhưng lại thiếu bản hướng dẫn cách làm.

Và dĩ nhiên, khi giải một bài toán, ta không được quá cầu kì vụn vặt, nhưng cũng không được bừa bãi, bạ gì làm nấy. Nếu, sau khi đã bắt đầu đi từ ẩn, từ điểm cuối đến điểm đầu, mà ta lại phát hiện thấy rằng đi xuôi từ dữ kiện có thể đạt kết quả tốt hơn, thì ta phải chuyển hướng, nhất định phải chuyển hướng!

2. *Người khôn bắt đầu từ chỗ kết thúc*. Một ông bạn của tôi, là một nhà toán học giỏi đồng thời là một triết gia cừ, có lần đã kể cho tôi nghe rằng mỗi khi định chứng minh một định lí, ông thường hay bắt đầu từ chỗ viết theo trật tự ngược Q.E.D ("quod erat

---

(*) Xem Giải một bài toán như thế nào? - Suy luận giật lùi.

demonstradum", có nghĩa là "điều cần chứng minh") và nhờ viết ngược câu truyền thống kết thúc một chứng minh ấy, ông ta đã nghĩ ra được phương pháp hay.

Châm ngôn có câu: "người khôn bắt đầu từ chỗ kết thúc, người ngu kết thúc ở chỗ bắt đầu"(*).

3. Hãy thực hiện kế hoạch lập trong §4.

4. *Lựa chọn giữa ba kế hoạch.* Giả sử a là bán kính đáy, h là chiều cao của một hình trụ đứng. Qua đường kính của đáy dưới, dựng một mặt phẳng tiếp xúc với hình tròn đáy trên (tức là có một điểm chung duy nhất với hình tròn đó). Mặt phẳng này chia hình trụ thành hai phần không đều nhau. Tìm thể tích của phần nhỏ, bao gồm giữa đáy dưới và mặt phẳng cắt (thể tích hình "móng lừa").

Người nêu bài toán này là giải bài toán này trước tiên là Ac-si-mét.

Chúng ta hãy vận dụng hình học giải tích không gian. Lấy trục của hình trụ làm trục z và mặt phẳng đi qua đây hình trụ làm mặt phẳng xOy của hệ toạ độ vuông góc. Giả sử mặt phẳng chia thể tích hình trụ thành hai phần cắt mặt phẳng xOy theo trục y. Bấy giờ, phương trình của đường tròn đáy mới sẽ viết như sau: $x^2 + y^2 = a^2$ và phương trình của mặt phẳng cắt sẽ có dạng: $\frac{z}{h} = \frac{x}{a}$.

Để tính thể tích cần tìm, ta có thể dùng phép tính tích phân hay nguyên lí Ca-va-liê-ri. Trong cả hai trường hợp, ta đều phải xét một họ những thiết diện song song của hình "móng lừa". Ta có ba kế hoạch hiển nhiên: có thể vạch thiết diện.

1) Vuông góc với trục x;

2) Vuông góc với trục y;

3) Vuông góc với trục z;

Bạn thích theo kế hoạch nào? Hãy thực hiện kế hoạch ấy.

5. Lựa chọn giữa hai kế hoạch.

1) Chơi đố chữ bạn gặp một tình huống phải phân vân. Có hai từ: Một từ gồm bốn chữ, trong đó một chữ đã biết, ba chữ chưa biết; từ kia gồm tám chữ, trong đó ba chữ đã biết, năm chữ chưa biết. Vậy ta nên đoán từ nào trước? Liệu ta có thể nêu luận cứ chọn từ nào thì lợi hơn không, bằng cách sử dụng các dữ kiện bằng số hiện có?

Theo tôi nghĩ thì khó có thể làm được việc đó, nhưng ta cứ làm thử cũng bổ ích.

2) Câu hỏi vừa nêu có thể trình bày dưới dạng tổng quát hơn và (vì có thể làm được như thế) cũng chính xác hơn?

Giả sử có một từ nào đó gồm $k + 1$ chữ trong đó biết k chữ và chưa biết một chữ. Chúng ta bắt tay vào tìm kiếm từ này và dự định sẽ xác định hệ số khó của các cuộc tìm kiếm đó.

(*) Câu tiếng Anh là: A wise man begins in the end, a fool ends in the beginning.

Trước hết ta hãy giả định rằng k chữ ta đã biết một cách cặn kẽ, tức là ta biết cả bản thân các chữ, cả vị trí mà mỗi chữ đứng trong từ (chẳng hạn trong từ

IN - - R - - -

trong đó $k = 3$, $l = 5$). Trong trường hợp này, ta có thể lấy tổng N tất cả các từ trong tiếng Anh hiện đại chứa $k + 1$ chữ (mỗi từ, trong đó có k chữ trùng với các chữ cho trước và cũng ở vị trí tương ứng, làm hệ số khó đoán. (Dĩ nhiên, ta có thể dùng bất kì một hàm nào đồng biến đơn điệu của N, chẳng hạn là N làm hệ số khó đoán, cũng vẫn đạt hiệu quả như thế).

Về phương diện lí thuyết thì cách xác định như vậy tỏ ra hợp lí, bởi vì khi số từ có thể chấp nhận càng tăng thì lựa chọn một từ trong số đó càng khó. Nhưng về phương diện thực hành thì ở đây gặp một loạt điều bất tiện. Chẳng hạn, nếu từ này không nằm trong tiếng Anh "hiện đại" thì sao? Liệu ta có thể hài lòng với cách xác định này trên quan điểm thú vui chơi đố chữ hay không? Dù sao, việc tìm ra số N trên thực tế cũng cực kì vất vả và không hợp lí chút nào.

3) Thế là chúng ta đang đứng trước một mục đích có khác đi chút ít và phức tạp hơn; ta muốn xác định hệ số khó đoán sao cho nó chỉ phụ thuộc vào k và l, tức là xác định một hệ số khó đoán "khi các điều kiện khác đều như nhau", một hệ số khó đoán "trung bình" nào đó. Ta định xét gộp một lúc tất cả các trường hợp có k và l như nhau, bằng cách chỉ tính toán đến các trị số đó thôi. Ví thử ta đạt được mục đích phức tạp hơn này, thì hệ số khó đoán sẽ là một hàm $f(k, l)$ của hai biến k và l. Hiển nhiên là hàm này phải là một hàm nghịch biến theo k và đồng biến theo l. Song, hiện giờ ta chưa thể nói trong hai số $f(1, 3)$ và $f(3, 5)$, số nào lớn hơn.

4) Ví thử các chữ trong các từ của tiếng Anh sắp xếp độc lập với nhau thì tổng N tất cả các từ trong tiếng Anh chứa k chữ cho trước và l chữ tuỳ ý chọn, sẽ biểu thị giản đơn bằng công thức $N = 32l$.

(Số N này, ta dùng theo nghĩa thuyết minh trong 2). Như vậy: ta sẽ có thể xác định hệ số khó đoán như sau chẳng hạn: $f(k, l) = \dfrac{\log N}{\log 32} = l$.

Cách xác định hệ số khó đoán $f(k, l)$ như trên tỏ ra nhất quán, nhưng nó lẩn tránh một câu hỏi rất quan trọng: việc ấn định k chữ đã hạn chế tới chừng mực nào việc lựa chọn l chữ kia (những chữ này tưởng chừng như là được tuỳ ý lựa chọn, nhưng thực ra thì không hoàn toàn như vậy!).

Rất khó tin rằng có thể đưa ra một công thức hiện thực ở chừng mực nào đó cho hàm $f(k, l)$. Trong mọi trường hợp, cần chờ đợi rằng cũng thức này sẽ phải khác với công thức vừa nêu trên ít ra là vì hai phương diện: $f(k, l)$ phải là một hàm nghịch biến triệt để theo k và phải áp dụng được nếu không cho tất cả mọi thứ tiếng thì ít ra cũng là cho một số thứ tiếng.

5) Dưới đây, chúng tôi thử đề nghị một biểu thức chưa được hoàn thiện lắm và có tính chất thuần tuý suy lí

$$f(k, l) = \frac{log[32-\alpha k][32-\alpha(k+1)]\ldots[32-\alpha(k+1-1)]}{log32}.$$

Tham số dương α đưa vào công thức cốt để thích nghi công thức với mọi thứ tiếng mà vẫn chữ cái có 32 chữ. Công thức này chỉ áp dụng được cho những từ dài $k + 1 < \frac{31}{\alpha} + 1$ chữ thôi.

6) Các suy luận trên có thể rọi ít nhiều ánh sáng vào lĩnh vực thuật phát minh và nêu rõ độ chính xác có thể đạt được ở đây, đó chính là lí do vì sao chúng tôi đã dành cho các suy luận đó một chỗ trong cuốn sách này.

6. Một kế hoạch hiện thực. "Tôi định sẽ bắt tay ngay vào giải bài toán này, sẽ nghiên cứu hình vẽ và hi vọng sẽ nảy ra ý hay". Đó đúng là một kế hoạch thật sự. Nhưng, có thể là hơi ngây thơ một chút đấy. Có thể là quá lạc quan đấy: bạn có thể đánh giá hơi cao năng lực nghĩ ra những ý hay của mình đấy. Sự thật, không phải bao giờ một kế hoạch như thế cũng thực hiện được trôi chảy cả đâu.

7. Hãy nhớ lại các bài toán bạn đã giải trước đây và xét lại một lần nữa những bài toán mà bạn đã giải hoặc sẽ có thể giải bằng cách đi giật lùi từ điểm cuối đến điểm đầu.

8. Đừng tự ràng buộc mình. Tay hãy xét một ví dụ nửa cụ thể nửa trừu tượng. Giả sử ta phải chứng minh một định lí thuộc hình học sơ cấp mà kết luận phát biểu như sau: "... thì các góc *ADC* và *EFG* bằng nhau". Ta cần suy ra kết luận này từ một giả thiết nào đó, từ một điều kiện nào đó, mà các chi tiết không có liên quan gì đến vấn đề đang xét, cho nên ở đây ta không chú ý đến.

Ở một giai đoạn nào đó (có thể là giai đoạn đầu) của quá trình giải, ta bắt đầu chú ý đến kết luận: kết luận là gì?

Ta cần chứng minh: $\Delta ABC = \Delta EFG$.

Có thể chứng minh kết luận đó như thế nào? Có thể suy ra một kết luận tương tự như thế từ điều kiện nào?

Ta nhớ lại một số sự kiện na ná như thế trước đây đã từng nghiên cứu, ta nhớ lại một số cách chứng minh những kết luận tương tự như kết luận định chứng minh. Hai góc bằng nhau

1) nếu chúng là những góc tương ứng của hai tam giác bằng nhau hoặc

2) nếu chúng là những góc tương ứng của hai tam giác đồng dạng hoặc

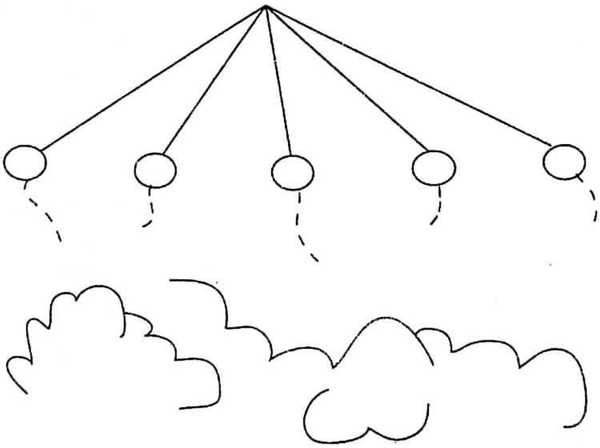
3) nếu chúng là những góc đồng vị tạo thành bởi hai đường song song và một cát tuyến hoặc

4) các góc bù của chúng bằng nhau hoặc

5) nếu chúng nội tiếp trong cùng một đường tròn và chắn những cung bằng nhau.

Ta đã liệt kê năm định lí khác nhau mà mỗi cái có thể đem vào trường hợp đang xét, ta đã liệt kê năm điều kiện mà từ đó có thể suy ra kết luận mong muốn. Ta có thể bắt đầu

từ bất kì điều kiện nào. Chẳng hạn, có thể thử với điều kiện 1: ta đưa ra hai tam giác thích hợp, chẳng hạn *ABC* và *EFG* rồi sau đó tìm cách chứng minh chúng bằng nhau. Nếu ta làm được việc này, thì sẽ suy ra ngay được kết luận mong muốn. Nhưng làm thế nào chứng minh $\Delta ABC = \Delta EFG$? Câu hỏi này sẽ chuyển hướng kế hoạch của ta. Nhưng ta cũng có thể bắt đầu lập kế hoạch theo chiều ngược lại, xuất phát từ bất cứ định lí nào trong năm định lí vừa nêu trên. Liệu có hi vọng rằng một trong các định lí đó sẽ giúp ta chứng minh được kết luận mong muốn không? Cái nào trong số định lí đó sẽ giúp ta chứng minh được kết luận mong muốn không? Cái nào trong số định lí đó có nhiều triển vọng nhất? Nếu ta không thể trả lời được các câu hỏi này hoặc tuy có trả lời nhưng trong thâm tâm ta vẫn cảm thấy chưa được hài lòng, thì tức là việc lựa chọn thực ra chưa đáng tin lắm, còn hồ nghi. Ta đang đứng trước một đường có nhiều ngả rẽ, cần phải chọn một ngả; đoạn đầu của mỗi ngả thì ta nhìn thấy, nhưng đoạn sau thì lờ mờ và đoạn cuối khuất hẳn trong sương mù. Tình huống này được minh hoạ trên hình 8.3.



Hình 8.3. Việc chọn lựa còn đáng hồ nghi

Qua ví dụ này, chúng tôi muốn thuyết minh để bạn đọc thấy rõ cái khó khăn của tình huống, tính chất thiếu xác định của việc lựa chọn một trong nhiều kế hoạch. Trong một tình huống phức tạp như vậy, tôi muốn có lời khuyên sau đây: bạn đừng tự gò bó mình quá sớm, đừng tự ràng buộc mình phải theo con đường đã chọn một cách cứng rắn quá mức cần thiết. Bạn hãy cứ làm theo một cách, nhưng đừng quên cách khác.

Một nhà toán học giỏi, cũng tựa như một vị tướng tài, phải biết tính toán, cân nhắc mọi bề: dự định một cuộc tấn công thì phải tính đến khả năng thất bại và không được xem thường không chú ý đến đường rút lui. Một kế hoạch tốt phải có tính mềm dẻo nhất định, tức là có thể thích nghi với những khó khăn không lường trước(*).

(*) Xem Toán học và những suy luận có lí.

CHƯƠNG 9. NHỮNG BÀI TOÁN NẰM TRONG MỘT BÀI TOÁN

Nếu trong lúc đang dựng hình hay chứng minh, ta giả định một điều gì đó trước đây chưa được chứng minh nhưng lại đòi hỏi phải có luận cứ, thì ta sẽ coi chính điều giả định đó là đáng hoài nghi, cần phải nghiên cứu và ta gọi nó là một bổ đề.

PRÔ-CLÚT

Bình luận về Ơ-clít

... Vì việc nhận thức một sự vật này phụ thuộc vào việc nhận thức một sự vật khác... nên ta có thể nhận biết ngay rằng liệu trước hết nghiên cứu một sự vật khác nào đó có lợi hay không, cụ thể là nghiên cứu sự vật gì theo trình tự nào...

ĐỀ-CÁC

Các quy tắc chỉ đạo của trí tuệ

Đối với bài toán này, xử lí như thế nào là tốt nhất? Bạn hãy gác bài toán ấy lại và nghĩ cho mình một bài toán khác nào đó.

Một giáo sư toán cổ truyền (*)

§1. NHỮNG BÀI TOÁN PHỤ

Vôngăng Cơle có làm một số quan sát trên loài vượn người, rất bổ ích đối với chúng ta. Dưới đây, chúng tôi mô tả sơ lược một trong các cuộc thực nghiệm của ông.

Trong chuồng, nhốt một chú hắc tinh tinh; chú này đang đói ngấu. Phía ngoài chuồng có một quả chuối ở dưới đất. Chú có thể thò tay qua chấn song chuồng, nhưng không với tới quả chuối. Chú "tận tình" lắm nhưng vẫn không tài nào lấy được quả chuối. Chú đành nuốt nước bọt, chầu hẫu ngồi nhìn. Phía ngoài chuồng, còn có một cái gậy nằm vừa tầm tay chú nhưng chắc hẳn chú chẳng hề chú ý đến. Đột nhiên, chú linh hoạt hẳn lên, chú thò tay lấy cái gậy rồi vụng về dùng cái gậy khều quả chuối cho kì đến lấy được mới thôi và chú vồ lấy ăn ngấu nghiến.

Chú hắc tinh tinh của chúng ta đã giải hai bài toán.

A - Tóm được quả chuối.

B - Tóm được cái gậy.

(*) Tác giả muốn ngụ ý một hình tượng giáo viên toán trong giai thoại (Xem Giải một bài toán như thế nào? Chú thích của người dịch bản tiếng Nga).

Bài toán A nảy ra sớm hơn bài toán B. Thoạt đầu, chú khỉ chẳng hề quan tâm gì đến cái gậy cả, vì vậy không phải là thứ ăn được; song chú khỉ đã giải bài toán B trước. Giải bài toán B mở đường cho việc giải bài toán A lúc đầu. Chú khỉ trực tiếp quan tâm đến việc giải bài toán A và chỉ gián tiếp quan tâm đến việc giải bài toán B; A là mục đích cuối cùng, B chỉ là phương tiện đạt mục đích; A là bài toán cơ bản, bài toán chính của chú khỉ, B chỉ là một bài toán phụ (bài toán bổ trợ, bài toán thứ yếu).

Chúng ta thử mô tả trên những nét chung ý nghĩa của thuật ngữ quan trọng này: Bài toán phụ là một bài toán mà ta buộc lòng phải lưu ý đến, hay ta bắt buộc phải xét đến không phải vì bản thân nó, mà vì nó có thể giúp ta giải một bài toán khác, bài toán cơ bản của ta. Bài toán phụ là một phương tiện để đạt mục đích, nó mở đường cho ta đi tới mục đích, bài toán ban đầu là mục đích, là điểm cuối của con đường(*).

Tìm ra con đường đi đến giải được một bài toán tưởng chừng không thể giải nổi bằng cách nghĩ ra một bài toán phụ riêng cho mục đích này và sau đó giải bài toán ấy, chính là một trong những biểu hiện đặc trưng nhất của hoạt động trí óc. Và chúng ta phải chật vật lắm mới có thể phủ nhận quan điểm giải thích rằng hành động của chú hắc tinh tinh là một hành vi có lí trí.

Để chuẩn bị đưa ra một cách phân loại các bài toán phụ, chúng ta hãy phân tích một số ví dụ về toán.

§2. NHỮNG BÀI TOÁN TƯƠNG ĐƯƠNG: PHÉP QUAY HAI CHIỀU

Chúng ta hãy bắt đầu từ ví dụ sau đây. Giả sử mục đích của ta là giải hệ ba phương trình với ba ẩn:

$$\begin{cases} x - y = -4, \\ x + y + z = 5, \\ x + y - z = 31. \end{cases} \qquad \text{(A)}$$

Ta hãy chuyển từ hệ (A) sang một hệ (B) khác mà

1. Phương trình thứ nhất của nó trùng với phương trình thứ nhất của hệ (A);

2. Phương trình thứ hai của nó là tổng của phương trình thứ hai và thứ ba của hệ (A);

3. Phương trình thứ ba của nó là hiệu của phương trình thứ hai và thứ ba của hệ (A).

Hệ ba phương trình mới sẽ có dạng:

$$\begin{cases} x - y = -4, \\ 2(x + y) = 36, \\ 2z = -13. \end{cases} \qquad \text{(B)}$$

(*) Giải một bài toán như thế nào?- Bài toán phụ.

Cách lập hệ (B) chứng tỏ rằng các số x, y, z thoả mãn hệ (A) nhất định cũng phải thoả mãn hệ (B). Nói ngược lại cũng đúng; các số (x, y, z) thoả mãn hệ (B) cũng phải thoả mãn hệ (A). Điều này xem ra khá là có lí, nhưng ngoài ra điều này có thể chứng minh bằng nhiều cách khác nhau; chẳng hạn như: chia hai phương trình cuối của hệ (B) cho 2, ta sẽ được hệ (C):

$$\begin{cases} x - y = -4, \\ x + y = 18, \\ z = -13. \end{cases} \qquad \text{(C)}$$

và từ (C) có thể trở về (A) bằng cách giữ nguyên phương trình thứ nhất của hệ (C), tiếp đó, trước hết cộng, rồi sau đó trừ, hai phương trình cuối. Tóm lại, nếu ba số x, y và z thoả mãn một trong hai hệ (A) và (B) thì chúng sẽ thoả mãn hệ kia.

Các hệ (A) và (B) không đồng nhất với nhau vì chúng không bao gồm những phương trình hệt như nhau. Bởi vậy, nói chặt chẽ thì không thể khẳng định rằng hai bài toán - một bài là giải hệ A, một bài là giải hệ (B) - là đồng nhất với nhau. Song có thể nói hai bài toán đó tương đương nhau. Định nghĩa tổng quát của thuật ngữ vừa nêu, dùng theo nghĩa của chúng ta, là như sau: Hai bài toán là tương đương nếu lời giải của bài này suy ra được từ lời giải bài kia.

Việc chuyển từ một bài toán sang một bài toán tương đương với nó gọi là phép quy hai chiều (hay phép quy thuận nghịch, hay phép quy tương đương). Chẳng hạn, chuyển từ bài toán ban đầu của ta - là bài toán giải hệ (A) sang bài toán giải hệ (B), là một phép quy hai chiều. Trong trường hợp của ta, phép quy này tỏ ra có ích: hệ (B) gần với lời giải cuối cùng hơn hệ (A). Thật vậy, (B) gần (C) hơn so với (A), mà (C) thì đã hầu như là điểm cuối của bài toán rồi: hệ (C) cho biết ngay giá trị z cần tìm và ta không cần mất nhiều công sức nữa sẽ tìm được các giá trị x và y.

§3. CHUỖI BÀI TOÁN TƯƠNG ĐƯƠNG

Ta hãy trở lại hệ (C) trong §2: cộng và trừ hai phương trình đầu của hệ này, ta được:

$$\begin{cases} 2x = 14, \\ 2y = 22, \\ z = -13, \end{cases} \qquad \text{(D)}$$

từ đó suy ra

$$\begin{cases} x = 7, \\ y = 11, \\ z = -13, \end{cases} \qquad \text{(E)}$$

ta có một dãy năm hệ (mỗi hệ chứa ba phương trình): (A), (B), (C), (D), (E).

Ứng với mỗi hệ là một bài toán tìm giá trị của các ẩn x, y, z thoả mãn hệ đó.

(Đối với hệ (E) là bản ghi cuối cùng lời giải "bài toán", bản thân thuật ngữ "bài toán" được sử dụng không phải theo nghĩa chính, nghĩa thông thường của nó, mà theo nghĩa khái quát).

Mỗi bài toán trong dãy bài toán trên thì tương đương với bài toán trước nó (và cả với bài toán sau nó), tựa như một mắt xích có liên quan với các mắt xích bên cạnh vậy, ở đây, ta có một chuỗi bài toán tương đương.

Trong chuỗi của ta, (A) là điểm đầu, còn (E) là điểm cuối; (A) là hệ phương trình ban đầu, còn (E) thì đã là lời giải rồi. Ở đây, trước mắt chúng ta là một con đường tuyệt đối không sai, dẫn đến lời giải. Bắt đầu từ bài toán nêu ban đầu, ta xây dựng một chuỗi bài toán, mà mỗi bài toán đều tương đương với lời giải và đứng gần với lời giải hơn so với bài toán trước, cứ chuyển dần như thế từ bài toán này qua bài toán khác, đến bước cuối cùng, ta sẽ tới được lời giải chính thức.

Song, ngay cả trong lĩnh vực toán học đi nữa, thì khi tìm ẩn hay khi tìm cách chứng minh, chúng ta vẫn thường nảy ra một tâm trạng có thể gọi là "chưa hoàn toàn hài lòng". Bởi thế, chúng ta hãy nhìn bao quát các kiểu bài toán phụ khác.

§4. NHỮNG BÀI TOÁN PHỤ NHIỀU HIỆU QUẢ HƠN VÀ ÍT HIỆU QUẢ HƠN: PHÉP QUAY MỘT CHIỀU

Ta hãy bắt đầu bằng việc xét một bài toán có tính chất lược đồ:

A- Tìm thể tích hình chóp, nếu biết...

Ta sẽ giả định rằng đề toán nêu đủ dữ kiện để tìm được thể tích, nhưng trong số các dữ kiện, không có diện tích đáy hình chóp và chiều cao của nó: cả hai đại lượng đó đều không cho trước. Đó là điều rất quan trọng đối với chúng ta, còn dữ kiện về các mặt khác là những gì thì ở đây chúng ta không chú ý tới, cho nên ta có thể bỏ qua không cần nói đến.

Chúng ta biết, có thể tính được thể tích hình chóp nếu cho trước đáy và chiều cao của nó, nhưng như đã nêu trên, cả hai đại lượng này đều không cho trước. Vì ta chưa biết các đại lượng này, nên ta tìm cách tính chúng, thành thử ta đứng trước một bài toán mới.

B- Tìm đáy và chiều cao hình chóp, nếu biết...

Trong bài toán A có một ẩn, trong bài toán B có hai ẩn, dữ kiện trong hai bài toán thì như nhau (ở đây không nêu rõ). Có thể nói, sự liên hệ giữa hai bài toán của ta có tính chất một chiều, bất đối xứng. Nếu ta biết cách giải bài toán B, thì ta sẽ biết đáy và chiều cao của hình chóp và tiếp đó, sẽ tính được thể tích hình chóp, tức là giải được bài toán A. Nhưng nếu ta biết cách giải bài toán A, thì điều đó tuyệt nhiên không có nghĩa là ta cũng sẽ giải được bài toán B: mặc dù từ kết quả của bài toán A sẽ suy được một hệ thức đơn giản giữa hai ẩn có mặt trong B, song việc tìm ra riêng từng ẩn đó có thể gặp những khó khăn lớn. Vậy, sau khi giải được A, ta thu được một kết quả nhỏ hơn sau khi giải được B. Giữa hai bài toán A và B, có thể gọi bài toán A là bài toán ít hiệu quả hơn và bài toán B là bài toán nhiều hiệu quả hơn.

Ta hãy phát biểu điều vừa nói trên dưới dạng tổng quát. Có hai bài toán chưa giải *A* và *B* mà đối với chúng ta chỉ có thể khẳng định điều sau đây: ta biết cách suy từ lời giải bài toán *B* ra lời giải bài toán *A* nhưng ta không biết cách suy từ lời giải bài toán *A* ra lời giải bài toán *B* như thế nào. Trong trường hợp đó, ta nói, bài toán *A* ít hiệu quả hơn bài toán *B*, hay (cũng thế) bài toán *B* nhiều hiệu quả hơn bài toán *A*.

Chuyển một bài toán ban đầu sang một bài toán phụ nhiều hiệu quả hơn hay ít hiệu quả hơn bài toán ban đầu (trong mọi trường hợp, đều không tương đương với bài toán ban đầu) thì gọi là phép quy một chiều hay không thuận nghịch. Trong ví dụ của ta, bài toán ban đầu *A* ít hiệu quả hơn bài toán *B*, do đó phép quy từ *A* về *B* là phép quy một chiều. Bạn đọc hiểu biết rộng chắc hẳn có thể nhớ lại không ít những ví dụ tương tự như ví dụ trên, trong đó phép quy một chiều tỏ ra có ích.

Nhiều khi phép quy một chiều theo chiều ngược lại, tức là bài toán phụ ít hiệu quả hơn bài toán ban đầu, cũng có ích. Dưới đây là một ví dụ có tính chất lược đồ;

A- Tính các ẩn $x_1, x_2, \ldots, x_N$ *nếu biết...*

B - Tính ẩn x_1 *nếu biết...*

Ta giả định rằng điều kiện và dữ kiện đủ để tìm ra các ẩn và đều như nhau trong hai bài toán, nhưng ở đây chúng không có ý nghĩa gì đối với ta, nên ta bỏ qua không cần nêu. Ở đây, giải bài toán *A* có nghĩa là đồng thời giải bài toán *B*, đó là một điều tầm thường; nhưng, nói chung không thể khẳng định được rằng sau khi giải được *B* thì từ đó cũng giải được *A*: theo định nghĩa của chúng ta thì *A* nhiều hiệu quả hơn *B*. Tuy vậy, rất nhiều khi giải bài toán *A* có thể dùng *B* làm bài toán phụ, chúng ta đã từng xử sự như thế nhiều lần trong chương 3 khi giải bài toán *A* bằng phương pháp đệ quy, chúng ta đã chọn x_1 làm ẩn cần tìm trước các ẩn khác và đã bắt đầu công việc từ bài toán phụ *B*, xem nó như chiếc chìa khoá để giải bài toán *A*.

§5. NHỮNG BÀI TOÁN PHỤ GIÁN TIẾP

Ta hãy bắt đầu bằng một ví dụ. Ta xét bài toán sau đây:

A- Tìm bán kính hình cầu ngoại tiếp một tứ diện đều, biết cạnh của tứ diện này.

Nếu ta không thể tìm được một cách xử lí nào khác đối với bài toán *A*, thì ta thử bắt đầu từ việc giải bài toán phụ sau đây:

B- Tìm bán kính đường tròn ngoại tiếp một tam giác đều, biết cạnh của tam giác này.

Việc chuyển từ *A* sang *B* sẽ không phải là một phép quy một chiều cũng không phải là một phép quy hai chiều theo nghĩa của định nghĩa trong §2 và §4. Thật vậy, ta khó có thể nhìn thấy một cách tiên nghiệm rằng có thể suy từ lời giải bài toán *B* ra lời giải bài toán *A*, hay ngược lại, từ lời giải bài toán *A*, ra lời giải bài toán *B* như thế nào; hai bài toán *A* và *B* không có vẻ là tương đương nhau và không bài nào, theo định nghĩa của chúng ta, tỏ ra nhiều hiệu quả hơn bài kia.

Thế nhưng, hai bài toán *A* và *B* vẫn có "quan hệ bà con" với nhau. Bài toán *B* "tương tự" như bài toán *A*; ở đây, ta gặp một trong những ví dụ chừng mực có sự tương tự sâu sắc giữa hình học phẳng và hình học không gian. Và dĩ nhiên, đối với phần lớn chúng ta, bài toán *B* tỏ ra dễ hơn bài toán *A*; thậm chí có thể ta đã gặp bài toán *B* và ta có thể nhớ lại cách giải không khó khăn lắm. Trong tình huống như vậy, tự nhiên sẽ nảy ra câu hỏi: liệu xét bài toán *B* có ích gì chăng? Liệu có hi vọng rằng nghiên cứu xem bài toán *B* sẽ giúp giải được bài toán *A* dễ dàng hơn không?

Có thể việc nghiên cứu bài toán *B* sẽ chẳng có lợi gì cho việc giải bài toán *A* hết - ta có thể gặp tình huống này thậm chí cả trong trường hợp sự tương tự giữa *A* và *B* thấy rõ rành rành và cách giải bài toán *B* thì ta đã biết thật đầy đủ. Nhưng cũng có khi thoạt nhìn thì thấy bài toán *B* vô bổ đối với ta, nhưng giải bài toán *B* lại rất có ích. Việc so sánh bài toán *A* với bài toán *B* tương tự với nó có thể làm cho bài toán *A* trở nên lí thú hơn và trong trường hợp đó thì bài toán *B* cũng là có ích. Phần "đóng góp" của việc giải bài toán *B* vào việc giải bài toán *A* nhiều khi không được trực tiếp đến thế: chẳng hạn, sự tương tự giữa *A* và *B* có thể làm ta nảy ra một ý hay, thế cũng là có phần đóng góp của *B* rồi. Chẳng hạn như, trong trường hợp bài toán "phẳng" *B*, bán kính bằng một phân số hữu tỉ tương đối đơn giản của chiều cao tam giác đều (2/3 chiều cao). Điều đó có thể làm nảy ra câu hỏi: vậy thì trong trường hợp bài toán "không gian" *A*, tình hình sẽ ra sao? Liệu bán kính cần tìm có biểu thị dưới dạng một phân số hữu tỉ không phức tạp của chiều cao tứ diện đều hay không? Câu hỏi đó, hay một câu hỏi tương tự; cũng đủ bổ ích rồi và nó mở đường cho ta đi tới giải bài toán *A*. Cũng có thể rằng, khi giải bài toán *A*, ta thấy cần biết bán kính đường tròn ngoại tiếp một trong các mặt của tứ diện (chẳng hạn, để xác định chiều cao của tứ diện mà bình thường chiều cao này rõ ràng là bằng hiệu các bình phương của cạnh tứ diện và của bán kính đường tròn ngoại tiếp với đáy tứ diện), trong trường hợp này, biết cách giải bài toán *B* có thể trở thành một mắt xích trong chuỗi xích mà ta phải lắp để giải bài toán *A*.

Nói chung, có thể chờ đợi rằng việc nghiên cứu bài toán *B* sẽ ít nhiều góp phần vào việc giải bài toán ban đầu *A*, ngay cả trong trường hợp *B* không tương đương với *A*, cũng không nhiều hiệu quả hơn hay ít hiệu quả hơn *A*. Một bài toán như vậy gọi là bài toán phụ gián tiếp đối với bài toán *A*.

§6. GIÚP ĐỠ MỘT PHẦN, GIÚP ĐỠ VỀ PHƯƠNG PHÁP, THÚC ĐẨY, HƯỚNG DẪN, THỰC HÀNH

Bài toán phụ có thể giúp giải bài toán ban đầu theo nhiều cách.

Một bài toán phụ, tương đương với bài toán ban đầu, nếu giải được sẽ bảo đảm giải hoàn toàn được bài toán ban đầu; điều này cũng đúng đối với một bài toán phụ nhiều hiệu quả hơn bài toán ban đầu. (Sự khác nhau giữa hai dạng bài toán phụ này thể hiện rõ rằng ngay cả trong trường hợp chúng ta không giải nổi bài toán phụ. Nếu một bài toán tương đương mà không giải nổi, thì bài toán ban đầu cũng không giải nổi; nhưng không giải nổi

một bài toán nhiều hiệu quả hơn, thì triển vọng giải được bài toán ban đầu cũng chưa đến nỗi mờ mịt lắm).

Một số dạng bài toán phụ, ngay dù có giải được rồi, vẫn không bảo đảm giải hoàn toàn được bài toán ban đầu; song chúng có thể giúp đỡ một phần trong việc giải bài toán ban đầu. Một phần trong lời giải bài toán phụ (hay thậm chí toàn bộ lời giải bài toán phụ) có thể trở thành một phần lời giải bài toán ban đầu, vì nó đã cung cấp cho lời giải bài toán ban đầu một kết luận nào đó, một phần dựng hình nào đó (hay chỉ giản đơn một sự kiện riêng biệt nào đó dùng làm cơ sở cho kết luận, cho phần dựng hình nói trên,...).

Cho dù không "đào đâu ra" một sự giúp đỡ một phần như thế thì bài toán phụ cũng có thể đem lại một sự giúp đỡ về phương pháp: nó có thể gợi cho ta phương pháp giải, vạch ra đường nét chung của lời giải hay vạch ra phương hướng nên bắt đầu tiến hành công việc như thế nào,... Một bài toán phụ tương đương với bài toán ban đầu, nhưng dễ hơn (so sánh với ví dụ phân tích trong §5) rất thích hợp với mục đích giúp đỡ về mặt phương pháp.

Có thể có trường hợp, ta không thể tách biệt được trong lời giải cuối cùng của bài toán ban đầu cái phần nào hay cái ý nào đã lấy ở một bài toán phụ nào đó hoặc do bài toán phụ khơi gợi cho ta. Thế nhưng, ta vẫn dám chắc rằng tác dụng thúc đẩy của bài toán phụ đó đã góp phần xứng đáng vào việc tìm tòi lời giải bài toán ban đầu. Có thể, nhờ sự tương tự hay tương phản mà bài toán phụ này đã khiến cho bài toán ban đầu trở nên dễ hiểu hơn hoặc dễ giải hơn; hoặc giả, nó có tác dụng thức tỉnh trí nhớ của ta, lay động một chuỗi ý nghĩ của ta, mà từ đó đã nảy ra những sự kiện quan trọng nào đó có liên quan với việc giải bài toán ban đầu.

Có bài toán phụ còn có thể giúp đỡ ta một cách khá tinh vi nữa. Khi giải một bài toán, ta phải chấp nhận những cách giải nhất định. Giả sử, công việc có thể tiếp tục theo hai hướng, tức là ta khám phá được hai con đường: một đường đi sang phải, một đường đi sang trái. Vậy, chọn đường nào? Đường nào có nhiều hi vọng dẫn đến lời giải hơn? Cần phải biết cách đánh giá khả năng một cách chín chắn: về mặt này, các bài toán phụ có thể chỉ dẫn phương hướng tốt cho ta. Có rất nhiều phần chắc là sự chú ý và công sức bỏ vào việc giải bài toán phụ và kinh nghiệm thu hoạch được sẽ đem lại lợi ích cho việc giải bài toán ban đầu.

Đôi khi, ta có thể nghiên cứu các bài toán phụ chỉ cốt để thực hành. Có trường hợp, bài toán ban đầu chứa đựng những ý mà ta chưa quen vận dụng. Trong tình huống ấy, nên thử giải một bài toán dễ hơn, cũng chứa đựng những ý giống như thế; do đó, bài toán này là một bài toán phụ gián tiếp (khá xa xôi) đối với bài toán ban đầu của chúng ta.

Mặc dù có nhiều khả năng thuận lợi như thế, song nhiều khi cái lợi chẳng đáng bao nhiêu, mà thời gian và công sức bỏ vào việc giải bài toán phụ lại mất nhiều. Cho nên, ta khoan hãy nhúng quá sâu vào giải bài toán phụ, mà nên cân nhắc mọi khả năng, đánh giá mọi triển vọng cho thật kĩ đã.

BÀI TẬP VÀ CHÚ THÍCH BỔ SUNG CHO CHƯƠNG 9

1. Những nguồn bài toán phụ đáng "tin cậy"? Một bài toán phụ có thể "tự phát nảy sinh" từ trong bài toán ban đầu. Nhưng cũng có trường hợp, ta cứ bị lôi cuốn vào ý nghĩ muốn chuyển qua một bài toán phụ (khá là có triển vọng), nhưng lại chẳng nảy ra sáng kiến nào hết. Trong tình huống đó, ta nên có một bản liệt kê nguồn những bài toán phụ bổ ích có thể khai thác được. Trong thực hành, người ta đã xây dựng sẵn nhiều cách đặt bài toán phụ dưới đây, chúng ta sẽ xét một số cách hiển nhiên nhất; trong phần lớn trường hợp, các cách đó sẽ dẫn đến những bài toán phụ nhất định, nhưng không có gì bảo đảm rằng các bài toán này nhất định là có ích.

Một bài toán phụ có thể nảy ra ở bất kì giai đoạn nào trong quá trình giải. Song, chúng ta giả định rằng ta đi chưa quá xa khỏi giai đoạn đầu tiên. Ta đã xét và nghiên cứu kĩ các yếu tố chính của bài toán - ẩn, dữ kiện và điều kiện, hay giả thiết, kết luận và cả những phần chia nhỏ (các "khoản" trong điều kiện,...) hiển nhiên nhất. Nhưng hiện tại ta chưa thấy được một kế hoạch nào có triển vọng cả, và vì thế ta muốn đề ra cho mình một mục đích dễ đạt hơn và hấp dẫn hơn. Trong hoàn cảnh đó, ta nên vững tin rằng, qua nghiên cứu kĩ các yếu tố chính của bài toán, ta sẽ tìm ra được một mục đích và mục đích này nảy ra cùng với một bài toán phụ thích hợp. Bây giờ, chúng ta sẽ tìm hiểu những trường hợp đáng chú ý nhất.

2. *Respice finem.* Có thể coi khát vọng muốn đạt mục đích là một nhân tố kích thích; nó gợi cho chúng ta những hành động có thể dẫn đến mục đích. Kết quả mong muốn sẽ gợi ra những phương tiện. Cho nên, bạn hãy nhằm vào kết quả, đừng lúc nào lơi khỏi mục đích của bạn; mục đích sẽ chỉ hướng cho sự suy nghĩ của bạn. Respice finem có nghĩa là "Hãy nhằm kết quả"; câu nói ấy đã trở thành câu nói quen thuộc một thời, hồi mà tiếng La-Tinh được dùng rộng rãi(*). Hốpxơ đã giải thích cái ý này như sau: "... thường trong mọi hành động bạn phải có trước mắt cái mà bạn muốn đạt, nó tựa như một vật hướng toàn bộ sự suy nghĩ của bạn trên con đường đạt tới nó".

Trong khi ngẫm nghĩ về điểm cuối cùng (kết quả) của một bài toán, chúng ta hi vọng sẽ nảy ra ý về những phương tiện thích hợp để giải bài toán đó. Muốn rút ngắn thời gian cần thiết để nảy ra cái ý đó, ta phải gắng hình dung được điểm cuối cùng một cách rõ nét nhất: Bài toán đòi hỏi cái gì? Đối tượng ta muốn tìm thuộc loại gì? Ẩn là gì? Kết luận là gì? Ta phải vận dụng những cố gắng bền bỉ nhất để gợi ra trong trí tưởng tượng của mình những phương tiện thích hợp. Có thể thu được một đối tượng như thế bằng cách nào? Có thể tìm kiếm một đối tượng thuộc loại đó ở đâu? Có thể mua cái đồ vật này ở cửa hiệu nào? Có thể tìm được ẩn thuộc loại đó bằng cách nào? Có thể rút ra kết luận này bằng cách nào?

(*) Rút từ một câu thời Trung cổ: Quydquy agis Prudenter agas et respie finem (Đã làm việc gì thì phải làm cho thận trọng và phải nhằm kết quả).

Hai câu hỏi cuối cùng thuộc riêng lĩnh vực các bài toán học: Một câu ứng với các bài toán tìm tòi, câu kia ứng với các bài toán chứng minh. Chúng ta hãy xét hai trường hợp này, riêng từng cái một.

1) Các bài toán tìm tòi. Giống như ta đã từng làm trong §4 ta hãy xét một bài toán có tính chất lược đồ: "tìm thể tích hình chóp, nếu biết..." ẩn trong bài toán này được nêu cụ thể, trong khi điều kiện và dữ kiện thì không nêu rõ. Có thể tìm được một ẩn như thế bằng cách nào? Có thể tính được thể tích hình chóp bằng cách nào? Muốn tìm được một ẩn thuộc loại này thì cần những dữ kiện gì? Trong đề bài toán, các dữ kiện dĩ nhiên là có đủ, nhưng khốn nỗi, ít ra cũng là vào lúc này, ta chưa thể tìm ra ẩn từ các dữ kiện đó được. Thực ra, ta cũng muốn có những dữ kiện thích hợp hơn; ta cũng muốn gặp một bài toán cũng chứa ẩn đó mà lại dễ giải hơn.

Nếu ta tìm được một bài toán như thế, thì có thể xảy ra mấy tình huống khác nhau.

2) Những bài toán cũng chứa ẩn đó mà trước đây ta đã từng giải.

Nếu may mắn biết bao, ta nhớ lại được một bài toán như thế thì ta sẽ coi các dữ kiện của bài toán này là ẩn trong một bài toán phụ - và do đó, ta tiến được một bước trong quá trình giải bài toán chính của ta. Quy trình này rất nhiều khi có ích. Ta hãy minh hoạ điều này qua ví dụ của ta (ví dụ có tính chất lược đồ vừa nêu trên).

Trong bài toán này, ẩn V là thể tích hình chóp. Trong bài toán phổ biến nhất cũng chứa ẩn này, thì người ta cho trước điện tích đáy S và chiều cao h. Ta đã biết lời giải bài toán này ($V = \frac{sh}{3}$) và ta nhớ lại được. Vậy ta sẽ sử dụng lời giải này như thế nào đây? Một cách tự nhiên nhất là ta hãy thử tính S và h bằng cách dữ kiện của bài toán ban đầu (hiện chưa giải). Trong khi thử làm việc này; ta lấy S và h làm những ẩn mới; thế là ta đưa ra hai bài toán phụ; một bài có ẩn là S, bài kia có ẩn là h, các dữ kiện của hai bài toán phụ này trùng với các dữ kiện của bài toán chính (trường hợp này được xét cụ thể trong bài tập 18 và 19 chương 4).

3) Quy trình vừa nêu thường được sử dụng luôn và trong nhiều trường hợp được lặp đi lặp lại nhiều lần.

Giả sử x là kí hiệu của ẩn ban đầu trong bài toán ban đầu của ta. Ta cố tìm hiểu những dữ kiện thích hợp và nhận thấy rằng sẽ có thể tìm được x nếu biết y', y'', y'''... (vận dụng lời giải một bài toán đã giải trước đây). Ta xem y', y'', y''' như những mục đích mới, như những ẩn thứ cấp. Tiếp đó, ta sẽ tìm được y', y'', y'''... nếu biết z', z'', z'''... (vận dụng lời giải một số bài toán đã giải trước đây) và ta lại xem z', z'', z''' như những mục đích mới; như những ẩn cấp ba,... ta tiến dần từ điểm cuối đến điểm đầu xem §2, chương 8).

Để chuẩn bị tốt cho mình khả năng tiến hành công việc này, ta cần có một số vốn bài toán (những bài toán thường áp dụng luôn; những bài toán cơ bản) và phải biết khéo lựa chọn và hệ thống hoá số vốn đó (xem bài tập 4, chương 12).

4) Một bài toán cũng chứa ẩn đó, mà trước đây chưa giải. Có thể xem bài toán này như chiếc chìa khoá để giải bài toán ban đầu. Ta hãy bắt tay vào giải bài toán này như một

bài toán phụ và gắng giải cho được: quy trình này có thể giúp ích ta. Song, với những điều kiện khác như nhau, thì ở đây triển vọng không tốt đẹp bằng trường hợp 2. Thật vậy, muốn rút ra được lợi ích từ bài toán phụ này bằng con đường tự nhiên nhất, trước hết phải giải được nó đã, rồi lại còn phải biết cách vận dụng nó như trong mục nhỏ 2.

5) Nếu nói chung, ta chưa rõ có thể sử dụng ẩn nêu trong bài toán đang xét như thế nào, ta không thể nhớ lại được một bài toán đã giải trước đây cũng chứa ẩn đó hoặc ta không thể nghĩ ra một bài toán mới mà ta có khả năng giải được, thì ta có thể thử tìm một bài toán có ẩn na ná giống như thế. Chẳng hạn, nếu cần tính thể tích hình chóp mà chưa nhìn thấy một con đường nào khác thì có thể thử nhớ lại xem trước đây ta đã tìm diện tích tam giác như thế nào, đồng thời vận dụng những cách nhìn nhận khác nhau và gắng rút ra từ sự tương tự giữa tam giác và hình chóp tam giác (tứ diện) được những suy luận có tính chất gợi ý nào đó.

6) Các bài toán chứng minh. Ở đây, lẽ ra chúng ta có thể lặp lại tất cả những điều đã nói về các bài toán tìm tòi, có cải biên đi chút ít, nhưng chỉ cần điểm qua vắn tắt cũng đủ.

Trong trường hợp này, bắt đầu bằng một ví dụ có tính chất lược đồ cũng vẫn tiện. Giả sử cần chứng minh một định lí có dạng: "Nếu... thì góc là vuông". Kết luận của định lí này được phát biểu cụ thể: "góc là vuông", nhưng điều kiện thì không xác định. Có thể chứng minh kết luận này thế nào đây? Có thể suy ra được kết luận tương tự từ điều kiện nào? Các câu hỏi này thúc đẩy ta tìm kiếm một định lí cũng có kết luận giống như thế, mà điều khẳng định: "góc là vuông" có thể suy ra được từ một điều kiện khác nào đó dễ dàng hơn.

Nếu may mắn, ta nhớ được một định lí cũng có kết luận như thế đã chứng minh trước đây, thì ta có thể lấy điều kiện của nó làm mục đích trung gian, tức là ta sẽ tìm cách chứng minh điều kiện của định lí mà ta vừa sực nhớ ra, xuất phát từ điều kiện của định lí mà ta cần chứng minh.

Quy trình này trong khá nhiều trường hợp đem lại kết quả tốt. Nhiều khi có thể vận dụng quy trình này lặp đi lặp lại và bằng cách đi ngược từ điểm cuối đến điểm đầu, ta sẽ tìm được cách chứng minh kết luận mong muốn.

Nếu ta nhớ lại được một định lí cũng có kết luận giống như thế nhưng trước đây chưa được chứng minh thì ta có thể thử chứng minh định lí ấy trước đã. Thử chứng minh như vậy cũng có thể có ích, nhưng cần cân nhắc kĩ lưỡng mọi triển vọng.

Còn nếu ta không nhớ lại được một định lí nào cũng có kết luận như thế mà trước đây đã chứng minh được hoặc không thể nghĩ ra một định lí mới nào mà ta có thể chứng minh dễ dàng hơn, thì ta có thể thử tìm một định lí có kết luận tương tự.

7) Dù bài toán của ta như thế nào mặc lòng, ta cũng có thể tin tưởng từ trước rằng muốn giải được bài toán đó thì phải vận dụng những tri thức đã học. Nhưng ta không thể dự đoán với mức độ tin tưởng như thế rằng các tri thức cần thiết ấy thuộc những chương mục nào, nhất là nếu đó lại là một bài toán khó. Nói chung bất kì bài toán nào đã giải được trước đây hay một định lí nào đã chứng minh trước đây đều có thể có ích cả, nhất là nếu nó lại có những chỗ tiếp cận với bài toán đang xét, nhưng ta không có thời gian để nghiên cứu tất cả các bài toán và định lí đó. Các suy luận vừa có nhiều triển vọng nhất.

Trong trường hợp bài toán tìm tòi thì bài toán có ẩn cùng loại đã giải trước đây có nhiều triển vọng giúp ích nhất, còn trong trường hợp bài toán, chứng minh thì định lí có kết luận giống như thế, đã chứng minh trước đây có nhiều triển vọng giúp ích nhất. Bởi vậy, ta nên dành ưu tiên vô điều kiện cho các câu hỏi: có thể tìm được ẩn tương tự như thế bằng cách nào? Có thể chứng minh kết luận này như thế nào?

3. Bỏ bớt hay thêm một khoản vào điều kiện. Khi công việc của ta tiến chậm hay hoàn toàn không tiến lên chút nào, ta bắt đầu nản và muốn chuyển qua một bài toán khác. Lúc ấy, biết cách biến đổi bài toán ban đầu để đi đến những bài toán na ná giống bài toán đó mà việc nghiên cứu có thể giúp ích cho việc giải bài toán ban đầu, là một điều rất tốt. Dưới đây, chúng tôi nêu một số cách biến đổi hiển nhiên nhất thuộc loại này.

Các bài toán tìm tòi:

1) Bỏ bớt một khoản nhất định trong điều kiện bài toán.

2) Thêm một khoản vào điều kiện bài toán.

Biến đổi theo cách 1, sẽ mở rộng điều kiện, biến đổi theo cách 2, sẽ thu hẹp điều kiện.

Các bài toán chứng minh:

1) Bỏ bớt một giả thiết nào đó trong điều kiện.

2) Thêm một giả thiết nào đó vào điều kiện.

3) Bỏ bớt một khẳng định nào đó trong kết luận.

4) Thêm một khẳng định nào đó vào kết luận.

Biến đổi theo cách 1 và 4 sẽ làm định lí mạnh thêm, biến đổi theo cách 2 và 3 sẽ làm định lí yếu đi.

Ảnh hưởng của các biến đổi này được xét trong các chú thích bổ sung 4 và 5.

4. *Mở rộng hay thu hẹp điều kiện.* Ta hãy xét hai điều kiện $A(x)$ và $B(x)$ chứa các đối tượng x thuộc cùng một loại. Ta nói $A(x)$ hẹp hơn $B(x)$, hay (cũng thế) $B(x)$ rộng hơn $A(x)$, nếu bất kì đối tượng nào thoả mãn $A(x)$ cũng thoả mãn $B(x)$. (Như vậy là ta dùng các thuật ngữ này theo nghĩa "không chặt chẽ"; trong trường hợp các điều kiện $A(x)$ và $B(x)$ có hiệu lực ngang nhau, ta có thể nói $A(x)$ hẹp hơn $B(x)$ và $B(x)$ hẹp hơn $A(x)$.

1) Mở rộng điều kiện có nghĩa là chuyển từ bài toán ban đầu sang một bài toán khác có điều kiện rộng hơn. Bạn đọc chắc cũng biết trong các chương trước, chúng ta thường hay thực hiện cách biến đổi này (tuy không mô tả nó theo cách phát biểu ở đây). Chẳng hạn, trong điều kiện của một bài toán dựng hình (phát biểu một cách thích hợp) thường nói đến một điểm. Nhưng ta sẽ thu được quỹ tích của điểm đó sau khi chỉ giữ lại một phần điều kiện và bỏ bớt phần còn lại, tức là sau khi mở rộng điều kiện. Dưới đây là một ví dụ nữa: nếu thoạt tiên ta chỉ lập một phương trình trong hệ phương trình cần thiết để tìm ra một số ẩn, thì tức là ta chỉ chú ý đến một phần (một yêu cầu, một khoản, một chú thích...) trong toàn bộ điều kiện và như vậy là, về thực chất mà nói ta đã mở rộng điều kiện.

Mở rộng điều kiện tỏ ra đặc biệt có ích, nếu thực hiện được hai yêu cầu sau đây:

a) Tìm được (mô tả được, nêu được...) tập hợp tất cả các đối tượng thoả mãn điều kiện mở rộng.

b) Loại trừ ra khỏi tập hợp này những đối tượng nào không thoả mãn điều kiện ban đầu.

Tôi nghĩ rằng bạn đọc cũng đã biết có thể đạt được cả hai mục đích này bằng phương pháp hai quỹ tích như thế nào rồi; ở đây bạn đọc nên xem lại một lần nữa mục nhỏ 3, §3, chương 6 và một số bài tập và chú thích thuộc về các câu đố (cũng nên xem cả bài tập 23, chương 6).

Điều kiện mở rộng còn có thể sử dụng theo một cách khác, bạn đọc nào đã tìm hiểu chương trình Đề-các thì có thể nắm được vấn đề này.

2) Thu hẹp điều kiện có nghĩa là chuyển từ bài toán ban đầu sang một bài toán có điều kiện hẹp hơn. Đề tài mà từ trước đến giờ chúng ta tập trung nghiên cứu không cho ta có nhiều dịp áp dụng quy trình này. Tuy vậy, cũng có thể đưa ra ví dụ sau đây thuộc loại đó.

Giả sử, ta cần giải phương trình bậc n

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

có các hệ số nguyên $a_1, a_2, \ldots, a_n$ trước hết, ta nên xét xem liệu phương trình này có nghiệm nguyên không. Về thực chất mà nói khi đặt ra một yêu cầu phụ rằng x phải là số nguyên, ta đã thu hẹp điều kiện lại. Nhưng đi tìm những nghiệm nguyên là một việc không khó khăn lắm (các nghiệm này phải là ước của số hạng tự do a_n) và nếu ta tìm được một nghiệm như thế thì ta có thể hạ thấp bậc của phương trình ban đầu, nhờ đó việc tìm các nghiệm còn lại được dễ dàng hơn (trong bài tập 32, chương 2, có đưa ra một ví dụ cụ thể).

Thu hẹp điều kiện nhiều khi có thể giúp ích cả trong những vấn đề sâu xa hơn (xem bài tập 11).

5. Nghiên cứu một định lí mạnh hơn hay yếu hơn.

Ta hãy xét hai mệnh đề A và B. Nếu biết rằng A suy được từ B (tức là nếu có thể suy ra A bằng cách giả định rằng B là đúng), thì ta nói A yếu hơn B hay (cũng thế) B mạnh hơn A. Quan hệ này giữa A và B trở nên đặc biệt bổ ích khi ta không thể nào chứng minh, cũng như bác bỏ một mệnh đề nào trong hai mệnh đề trên.

1) Nghiên cứu cơ sở khả dĩ của chứng minh

Giả sử ta muốn chứng minh rằng hai đại lượng nào đó không bằng nhau, chẳng hạn, ta muốn chứng minh định lí A, trong đó khẳng định rằng: $e < \pi$.

Ta có thể nhận xét không khó khăn lắm rằng có một đại lượng thứ ba có thể dùng rất tiện để so sánh với hai đại lượng đã cho. Trong ví dụ này, cả e lẫn π đều có thể dễ dàng so sánh với số 3. Cho nên, để chứng minh định lí A, ta hãy xét định lí B, trong đó khẳng định rằng $e < 3$ và $3 < \pi$.

Rõ ràng là từ B sẽ suy được A ngay. Mệnh đề mới của chúng ta, mệnh đề B, khẳng định một điều lớn hơn so với mệnh đề A, vì thế nó mạnh hơn mệnh đề A mà ta định chứng minh lúc đầu.

Có thể nhận xét một cách tổng quát rằng, khi chứng minh những bất đẳng thức giữa các số vô tỉ, hầu như bao giờ chúng ta cũng buộc phải hành động như trong ví dụ vừa nêu, tức là bao giờ chúng ta cũng phải tìm kiếm một số hữu tỉ nào đó ngăn cách hai số vô tỉ đã cho. Làm như vậy, chúng ta sẽ quy mệnh đề ban đầu về một mệnh đề mạnh hơn, giống như trong ví dụ trên: dùng một số ngăn cách sẽ dẫn đến một mệnh đề mạnh hơn.

Trong những công trình nghiên cứu lớn hơn, tình huống tương tự như vậy gặp khá nhiều và để chứng minh một định lí ban đầu *A*, nhiều khi chúng ta buộc phải nghĩ ra một định lí *B* mạnh hơn, mà từ đó suy ra được *A* và do những hoàn cảnh nhất định nào đó, lại dễ chứng minh hơn *A*. Trong khi chứng minh *B*, chúng ta tựa hồ như phát hiện được sự kiện làm "cơ sở" cho *A*. Dĩ nhiên, khi ta nghĩ ra định lí *B* mà từ đó nhất định suy được *A*, ta chưa biết liệu rồi ta có chứng minh được *B* hay không; hơn nữa, thậm chí ta còn chưa biết định lí *B* có đúng hay không. Thành thử vào lúc này, định lí *B* vẫn chưa hẳn là "cơ sở" cho định lí ban đầu *A*, mà chỉ là một "cơ sở khả dĩ" mà thôi. Nhưng dù sao, ta vẫn nên nghiên cứu *B* như một cơ sở mà ta đặt nhiều hi vọng có thể dựa vào để chứng minh *A*.

2) Nghiên cứu hệ quả. Giả sử cần chứng minh hai đại lượng bằng nhau. Ta kí hiệu diện tích mặt cầu bán kính r là S và giả định chẳng hạn rằng ta định chứng minh định lí trong đó khẳng định rằng $S = 4\pi r^2$.

Có lẽ, trước hết ta nên thử chứng minh một điều thấp hơn cụ thể là chứng minh định lí *B* trong đó khẳng định rằng: $S \leq 4\pi r^2$.

(chắc hẳn ta sẽ chứng minh được *B* bằng cách coi hình cầu xấp xỉ bằng những đa diện nội tiếp). Dù sao mặc lòng, hiển nhiên là *B* cũng suy ra từ *A*, định lí *B* cũng là hệ quả của định lí *A*, tức là *B* yếu hơn *A*.

Song, chứng minh định lí yếu hơn *B* rốt cuộc có thể dẫn ta đến chứng minh định lí ban đầu *A*. Thật vậy, những lập luận vận dụng khi chứng minh *B*, có thể gợi ý cho ta cách chứng minh một định lí yếu hơn khác, biểu thị bởi một bất đẳng thức có ý đối lập (có lẽ, ở đây chuyển từ các đa diện nội tiếp qua các đa diện ngoại tiếp thì sẽ có ích). Thế mà, phối hợp hai định lí yếu hơn vừa nêu, ta sẽ có được định lí ban đầu *A*. Những tình huống tương tự như vậy gặp khá nhiều trong các công trình nghiên cứu toán học.

Tuy chưa đủ chứng minh định lí ban đầu *A*, nhưng ta nghĩ ra một định lí *B* yếu hơn làm "cầu nhún" và dùng sức bật thu được trong quá trình chứng minh định lí *B* để nhảy tới *A*. Tình hình này ta có thể gặp ngay cả khi chứng minh những định lí hết sức đơn giản. Chẳng hạn, có thể chứng minh một định lí *A* thuộc trường hợp tổng quát bằng cách trước hết chứng minh một định lí *B* yếu hơn liên quan với một trường hợp riêng, rồi dùng *B* làm cầu nhún.

Bạn có thể nêu một ví dụ nào đó về trường hợp này không?

6. Cho m và n là những số dương và $m > n$. Hãy so sánh các bài toán sau đây:

A- Tìm ước chung của hai số m và n.

B- Tìm ước chung của hai số m và $m - n$.

Giữa *A* và *B* có liên hệ lôgic gì?

Nếu cần giải bài toán *A*, thì bạn có thấy trong việc chuyển từ *A* qua *B*, có ưu điểm gì không?

Hãy dùng các ý này để tìm các ước chung của 437 và 323.

7. So sánh các bài toán sau đây:

A- Tìm cực đại của hàm $f(x)$.

B- Tìm các giá trị của x tại đó đạo hàm $f'(x)$ của hàm đã cho $f(x)$ triệt tiêu.

Giữa *A* và *B* có liên hệ lôgic gì?

Bạn có thấy trong việc chuyển từ *A* qua *B* có ưu điểm gì không?

8. Ta hãy lấy một tam giác bất kì và kí hiệu.

O là tâm đường tròn ngoại tiếp;

G là giao điểm các trung tuyến (trọng tâm);

E là điểm nằm trên đường thẳng qua *O* và *G* sao cho $2OG = GE$ (giả định rằng điểm *G* nằm giữa *O* và *E*).

Ta hãy xét hai định lí sau đây:

A - Ba đường cao của tam giác cắt nhau tại một điểm.

B - Ba đường cao của tam giác đi qua điểm *E*.

Giữa *A* và *B* có liên hệ lôgic gì?

Bạn có thấy trong việc chuyển từ *A* qua *B* có ưu điểm gì không? Hãy giải bài toán *B*.

9. So sánh hai bài toán sau đây (luôn luôn lấy giá trị số học của các căn).

A- Chứng minh $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 0$.

B- Với một số dương cho trước ε, tìm các giá trị dương của x sao cho $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \varepsilon$.

Giữa *A* và *B* có liên hệ lôgic gì?

Bạn có thấy trong việc chuyển từ *A* và *B* có ưu điểm gì không? Hãy giải bài toán *B*.

10. So sánh hai bài toán sau đây (trong đó *n* biểu diễn một số nguyên dương):

A- Chứng minh (hay bác bỏ) mệnh đề:

Nếu $2^n - 1$ là một số nguyên tố thì số *n* cũng phải là số nguyên tố.

B- Chứng minh (hay bác bỏ) mệnh đề:

Nếu *n* là một hợp số thì $2^n - 1$ cũng phải là một hợp số. Giữa *A* và *B* có liên hệ lôgic gì?

Bạn có thấy trong sự chuyển từ *A* qua *B* có ưu điểm gì không? Hãy chứng minh *B*.

11. *Tìm một phản ví dụ*. Phản ví dụ huỷ bỏ một điều khẳng định mà theo nội dung thì hình như phải thích hợp với tất cả mọi đối tượng thuộc một phạm trù nào đó. Phản ví dụ sẽ chỉ ra một đối tượng cũng thuộc phạm trù đó, nhưng điều khẳng định trên, tưởng chừng là tổng quát, lại không áp dụng vào đối tượng ấy được. Việc tìm kiếm phản ví dụ có một số

đặc điểm lí thú, cũng nên đưa ra bàn luận, tuy rằng nếu muốn minh hoạ khá chu đáo thì phải đi xa hơn, vượt quá trình độ cuốn sách này một chút.

1) Bài toán chứng minh. Chứng minh hay bác bỏ điều khẳng định.

Nếu chuỗi vô tận $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ với các số hạng thực mà hội tụ thì chuỗi vô tận $a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \ldots.$ cũng hội tụ.

Sau một hồi suy nghĩ lâu hay chóng, ta có thể ngờ rằng điều khẳng định này là sai và khi đó ta sẽ tìm cách bác bỏ điều không định này bằng một phản ví dụ.

2) Vấn đề tìm một bài toán phụ cho bài toán chứng minh. Ta sẽ tìm phản ví dụ, nói cách khác, ta sẽ tìm một chuỗi vô tận thoả mãn điều kiện, nhưng không thoả mãn kết luận trong điều khẳng định ở mục nhỏ 1^0. Như vậy, về thực chất mà nói, ta đứng trước một bài toán tìm tòi. Ta hãy xét các yếu tố chính của bài toán này.

Ẩn là gì? - Là dãy vô tận các số thực $a_1, a_2, a_3 \ldots$

Điều kiện gồm những gì? Điều kiện gồm hai khoản.

I- Chuỗi $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ hội tụ.

II - Chuỗi $a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \ldots.$ phân kì.

Ta nhận xét rằng bài toán tìm tòi này nảy ra như một bài toán phụ đối với bài toán chứng minh.

3) Chỉ cần tìm mỗi đối tượng (bất kì) thoả mãn điều kiện, trong các bài toán tìm tòi quen thuộc với chúng ta, thường là phải tìm tất cả các lời giải, tất cả các đối tượng thoả mãn điều kiện bài toán. Nhưng trong trường hợp của ta, chỉ cần tìm một lời giải, một đối tượng như thế: chỉ cần một ví dụ chống đối cũng đủ bác bỏ toàn bộ điều khẳng định tưởng chừng là tổng quát.

Tình huống này, không giống với tình huống bình thường, nên có thể đòi hỏi một chiến lược khác. Về vấn đề này, Lép-nít khuyên ta: "Có khi cần tất cả các lời giải, nhưng có khi chỉ cần một số lời giải thôi. Trong trường hợp chỉ cần tìm một lời giải, thì nên nghĩ ra những điều kiện phụ kết hợp với các điều kiện ban đầu, việc này thường đòi hỏi phải có một nghệ thuật cao".

4) Thu hẹp điều kiện. Ta hãy bắt tay vào nghiên cứu những chuỗi hội tụ thoả mãn phần đầu của điều kiện, với hi vọng rằng có thể phát hiện được trong số đó một chuỗi thoả mãn cả phần thứ hai của điều kiện. Đương nhiên, việc tìm kiếm nên bắt đầu từ những trường hợp đơn giản nhất và quen thuộc hơn.

Trước hết, ta có thể nghĩ đến những chuỗi hội tụ có số hạng dương a_n. Nhưng trong các chuỗi này $a_n < 1$ với những n lớn và do đó $a_n^3 < a_n$, thành thử chuỗi có số hạng tổng quát a_n^3 cũng hội tụ. Vậy, điều kiện thứ hai không được thực hiện và ta buộc phải chuyển sang nghiên cứu các chuỗi không những có số hạng dương mà có cả số hạng âm nữa.

Ở đây, quen thuộc hơn cả là những chuỗi đổi dấu thay phiên, trong đó dấu của các số hạng tạo thành một chuỗi có dạng

$$+ - + - + - + - + - + - \ldots$$

Nếu các số hạng a_n của chuỗi này lấy theo giá trị tuyệt đối mà giảm đơn điệu, dẫn đến số không, thì chuỗi hội tụ, nhưng khi đó, các số a_n^3 cũng diễn biến hệt như thế và do đó chuỗi do chúng hợp thành cũng hội tụ. Vậy điều kiện thứ hai cũng lại không được thực hiện và ta buộc phải vận dụng đến những lĩnh vực ít thông thuộc hơn.

Vì không nên mạo hiểm đi quá xa khỏi các trường hợp thông thường vẫn xét, nên ta có thể nghĩ đến chuyện hạn chế lại như sau:

III- Dấu của các số hạn a_n tạo thành một chuỗi có dạng

$$+ - - + - - + - - \ldots$$

Cho dù có thêm điều kiện III vào các điều kiện I và II chăng nữa, thì vẫn còn một miền khá rộng để tuỳ ý lựa chọn. Thế là ta lại có thể nảy ra ý nghĩ đưa ra thêm một miền hạn chế nữa (thật ra thì điểm hạn chế này phát biểu không được hoàn toàn chính xác):

IV. - Chuỗi $a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \ldots$, về phương diện tính hội tụ, phải gợi nhớ chuỗi điều hoà $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$

Các yêu cầu III và IV này, đưa vào theo sáng kiến cá nhân, sẽ thu hẹp rõ rệt điều kiện bài toán (xem chú thích bổ sung 4). Chúng có thể định hướng tốt cho ta trong việc tìm kiếm một phản ví dụ, nhưng cũng có thể kìm hãm công việc. Nhưng dẫn sao tôi vẫn nghĩ rằng, cái lợi chúng đem lại sẽ nhiều hơn cái phiền; tuy nhiên, bạn đọc phải tự mình thử tìm cho ra một phản ví dụ và có ý kiến riêng của mình về vấn đề này.

5) Quy trình thay đổi luân phiên các chứng minh. Ở đây, có lẽ chúng ta có được một dịp thuận tiện để nhắc đến một quy trình mà mỗi ai muốn luyện kĩ xảo giải các bài toán chứng minh đều cần phải am hiểu (ở trình độ trung học, thường không gặp nhiều lắm những dịp để luyện tập và vận dụng các kĩ xảo loại này).

Giả sử, ta đứng trước một bài toán chứng minh, trong đó phát biểu rõ ràng một điều khẳng định, mà ta chưa biết là đúng hay sai: ta lâm vào tình trạng bất định và hoài nghi. Khi giải bài toán, ta tự đặt cho mình mục đích là phải loại trừ được mối hoài nghi đó, tức là phải chứng minh hay bác bỏ *A*.

Đôi khi, ta cũng tìm được một cách xử lí thích hợp cho cả hai trường hợp, tức là một cách xử lí dẫn dắt ta đến chứng minh điều khẳng định *A* hoặc bác bỏ điều khẳng định đó bất kể thực tế xảy ra trường hợp nào, nói cách khác, một cách xử lí dẫn dắt ta đến chỗ giải bài toán trong mọi trường hợp. Song ít khi đạt được kết quả như thế lắm. Và nếu ta không may mắn tìm được một cách xử lí tốt, thì ta sẽ phải có một quyết định, chứng minh điều khẳng định *A* hoặc bác bỏ điều khẳng định ấy. Ta đứng trước việc lựa chọn một trong hai hướng khác nhau. Để chứng minh điều khẳng định *A*, thì cần hoặc là tìm kiếm trực tiếp những mệnh đề nào mà từ đó suy ra *A* hoặc là xây dựng một chiến lược riêng cho việc này. Để bác bỏ *A*, cần tìm một phản ví dụ.

Trong trường hợp này, luân phiên suy nghĩ theo hai hướng sẽ là một lược đồ tốt. Khi nào không còn hi vọng đạt được kết quả theo một hướng này hoặc nghiên cứu theo một hướng này ta bắt đầu thấy mệt, ta sẽ chuyển sang hướng kia, đồng thời vẫn sẵn sàng khi

cần thiết sẽ lại quay lại hướng ban đầu. Bằng cách đó, trong quá trình nghiên cứu tích luỹ dần tài liệu theo hai hướng, cuối cùng ta sẽ đạt tới kết quả.

6) Có một cách biến đổi phức tạp hơn đối với quy trình luân phiên các chứng minh vừa nêu trên, vận dụng được trong những trường hợp phức tạp hơn và giúp ta đạt được những mục đích quan trọng hơn.

Nếu ta không có khả năng chứng minh điều khẳng định A ban đầu, thì ta sẽ tìm cách chứng minh một điều khẳng định yếu hơn thay cho A (mà điều khẳng định mới này có nhiều hi vọng chứng minh được hơn). Còn nếu ta không thể bác bỏ điều khẳng định ban đầu, thì ta sẽ tìm cách bác bỏ một điều khẳng định mạnh hơn thay cho điều khẳng định ba đầu (mà điều khẳng định mới này dễ phát hiện là sai hơn). Nếu ta chứng minh được mệnh đề H, thì tiếp theo đó ta sẽ tìm cách bác bỏ một mệnh đề (được xây dựng một cách thích hợp) mạnh hơn H. Còn nếu ta bác bỏ được mệnh đề H thì tiếp theo đó, ta sẽ tìm cách chứng minh một mệnh đề (được lựa chọn thích hợp) yếu hơn H. Tiến dần đến chứng minh mệnh đề A theo hai hướng, cuối cùng ta sẽ chứng minh được mệnh đề này. Hay ta có thể làm được nhiều hơn so với nội dung điều khẳng định A, tức là hoặc ta chứng minh một mệnh đề mạnh hơn A hoặc ta bác bỏ A, đồng thời xác định được rằng một phần nào đó của mệnh đề A là đúng sau khi chứng minh một mệnh đề yếu hơn A.

Cứ tiến dần lên bằng con đường luân phiên các chứng minh và xây dựng những phản ví dụ, ta có thể đạt được một hiểu biết đầy đủ hơn. Chẳng hạn, ta có thể xác định được rằng một định lí nào đó chẳng những là đúng (vì ta đã chứng minh được nó rồi) mà còn không dễ gì làm cho mạnh lên (vì ta đã bác bỏ được một định lí mạnh hơn nó). Ở đây, nói chung, ta đụng chạm đến vai trò của chứng minh trong sự phát triển khoa học (so sánh với điều trình bày ở quá phía dưới; xem thêm trong cuốn: Toán học và những suy luận có lí).

12. Bất kì lời giải nào tìm ra đều dùng được cả. Chứng minh rằng có một cặp chuỗi phân kì.

$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$; $\qquad b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$

có số hạng dương giảm dần

$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$; $\qquad b_1 > b_2 > b_3 > \ldots$

sao cho chuỗi: $\min(a_1, b_1) + \min(a_2, b_2) + \ldots + \min(a_n, b_n) + \ldots$ hội tụ (cũng như mọi khi, $\min(a, b)$ kí hiệu số nhỏ hơn (không lớn hơn) trong hai số a và b).

(Ở đây, cần tìm không phải là tất cả các cặp chuỗi thoả mãn điều kiện trên, mà là chỉ một cặp (nào đó) thôi. Thành thử, ta có thể vận dụng lời khuyên của Lép-nít, dẫn trong bài tập 11: Hãy thu hẹp miền tìm kiếm lời giải (nhưng phải cố đừng tạo ra cho mình những khó khăn mới)).

13. Cá biệt hoá và khái quát hoá là nguồn phong phú về những bài toán phụ bổ ích.

Giả sử, cần nghiên cứu về số các ước của một số nguyên dương r, mà ta kí hiệu là $\tau(n)$. Chẳng hạn (ta xét một trường hợp riêng, tức là ta vận dụng phương pháp cá biệt hoá), số 12 có sáu ước số: 1, 2, 3, 4, 6 và 12, do đó $\tau(12) = 6$; trong bản liệt kê các ước của 12 ở

đây, có kể cả 1 và 12 - là những "ước tầm thường" - và sau này, với tất cả mọi n khác, ta cũng sẽ làm như vậy.

Một trong các cách cá biệt hoá là xét cụ thể từng số riêng biệt: chẳng hạn, có thể nhận xét rằng $\tau(30) = 8$. Hoặc giả, có thể kể một cách có hệ thống các giá trị của $\tau(n)$ đối với $n = 1, 2, 3,\ldots$; bằng cách lập một bảng mà đoạn đầu như sau:

$\tau(1) = 1$	$\tau(6) = 4$
$\tau(2) = 2$	$\tau(7) = 2$
$\tau(3) = 3$	$\tau(8) = 4$
$\tau(4) = 3$	$\tau(9) = 3$
$\tau(5) = 2$	$\tau(10) = 4$

Một cách cá biệt hoá khác là xét một loại số. Nếu p là một số nguyên tố thì

$\tau(p) = 2, \tau(p^2) = 3, \tau(p^3) = 4.$

Từ đó, khái quát hoá lại, ta sẽ kết luận rằng đối với mọi luỹ thừa nguyên dương của một số nguyên tố p.

$\tau(p^n) = n + 1.$

Nếu p và q là hai số nguyên tố khác nhau thì pq có đúng bốn ước số số 1, p, q và pq, do đó $\tau(pq) = 4$.

Ta có thể xét tiếp đến tích của ba số nguyên tố… khái quát hoá lại, ta có thể tìm được $\tau(n)$ trong đó $n = p_1 p_2\ldots p_l$ là tích của l số nguyên tố khác nhau. Tiến lên dần theo con đường này, thỉnh thoảng xét những trường hợp riêng, rồi lại khái quát hoá, ta có thể tìm được một biểu thức tổng quát cho $\tau(n)$. Hãy tìm biểu thức ấy!.

Đó là những con đường có thể đi theo để phát minh ra những sự kiện mới, chẳng những trong lí thuyết số, mà cả trong các lĩnh vực khác của toán học và nói chung trong khoa học. Khi vận dụng phương pháp cá biệt hoá, ta gắng tách ra một phần dễ nắm hơn, dễ giải quyết hơn trong bài toán; khi vận dụng phương pháp khái quát hoá, ta tìm cách tăng sức mạnh các kết quả mà ta đạt được nhờ quan sát trong một lĩnh vực hạn chế (*).

14. Phép tương tự cũng là một nguồi dồi dào những sự kiện mới. Trong những trường hợp đơn giản nhất, có thể sao chép hầu như nguyên văn lời giải một bài toán na ná giống, thuộc cùng một loại. Trong những trường hợp khó hơn, một sự tương tự "yếu ớt" có thể không giúp ích thực tế ngay tức khắc, song nó có thể chỉ ra phương hướng nên tiếp tục công việc như thế nào.

Những trường hợp có thể vận dụng phép tương tự thật là muôn hình muôn vẻ, không sao kể xiết: điều này được minh hoạ bởi nhiều ví dụ trong các chương trước (và các chương tiếp sau). Tôi chỉ đưa ra đây một ví dụ (mục nhỏ 3, cho 1). Cần dựng góc của một

(*) Xem Giải một bài toán như thế nào? - Tổng quát hoá, cá biệt hoá, xem thêm Toán học và những suy luận có lí, chương 2 và các chỗ khác.

tam giác cầu, biến ba cạnh của nó. Để thực hiện phép dựng này, có thể sử dụng một bài toán tương tự trong hình học phẳng: dựng góc của một tam giác, biết ba cạnh của nó.

Bạn thử nhớ lại một vài cặp bài toán tương tự nữa.

Như chúng tôi đã nêu, có nhiều con đường khác để vận dụng phép tương tự.

15. Nếu thất bại thì sao? Niềm hi vọng lúc ta bắt tay vào nghiên cứu một bài toán phụ có thể bị tiêu tan, dự định của ta có thể không đạt. Thế nhưng, không thể coi thời gian và công sức bỏ vào bài toán phụ là uổng phí, ngay cả khi thất bại, ta cũng có thể rút ra được những bài học quý báu.

Ta muốn chứng minh một định lí *A*. Ta nhận thấy có một định lí *B* mạnh hơn, mà từ đó suy ra được định lí *A*. Ta bắt tay vào chứng minh định lí *B*; nếu thành công, thì tức là ta cũng sẽ chứng minh được định lí *A*. Song, cuối cùng ta mới biết *B* là sai. Kể cũng đáng buồn, nhưng kinh nghiệm mà ta thu được trong quá trình chứng minh định lí *B* có thể giúp ta đánh giá đúng hơn khả năng chứng minh định lí *A*.

Ta muốn chứng minh một định lí *A*. Ta nhận thấy có định lí *B* là hệ quả của định lí *A* và dễ chứng minh hơn định lí *A*. Ta bắt tay vào chứng minh định lí *B*, nếu thành công thì sẽ có thể dùng *B* làm chìa khoá để chứng minh định lí *A*. Giả sử ta chứng minh được định lí *B* thật, nhưng lại không tài nào sử dụng *B* làm chìa khoá chứng minh *A*. Kể cũng đáng buồn, nhưng kinh nghiệm thu được trong quá trình chứng minh *B* có thể giúp ta đánh giá đúng hơn khả năng chứng minh định lí *A*.

16. Các bài toán khác khi đã nhận thấy rằng các bài toán phụ tỏ ra có ích trong quá trình giải một bài toán, bạn thử phân tích xem vì sao có chuyện đó và các bài toán này đã nảy ra do đâu.

Vì sao? Hãy giải thích mối liên hệ giữa bài toán ban đầu và bài toán phụ. Xem các bài tập 6 - 10.

Do đâu? Bài toán phụ nảy ra (hay có khả năng nảy ra) nhờ ta đi giật lùi (đi từ điểm cuối đến điểm đầu) nhờ khái quát hoá, cá biệt hoá hay lấy tương tự? Hay phải cần đến những nguồn khác (tương đối ít gặp)?

CHƯƠNG 10. NẢY RA Ý

Và bỗng loé lên trong trí tôi một tia sáng từ nơi cao thẳm, giúp tôi giải quyết hết mọi điều gắng công suy nghĩ bấy lâu.

ĐĂNG-TƠ -Thiên đường

§1. BÙNG LÊN ÁNH SÁNG

Cách giải bài toán đôi khi nảy sinh ra trong đầu chúng ta hoàn toàn bất ngờ. Chúng ta đã mày mò rất lâu rồi, mà không tiến lên chút nào hết, nhưng đột nhiên trong trí ta loé lên một ý hay, nhen lên một niềm cổ vũ, ta bỗng như thấy ánh sáng bừng lên trong đêm tối mịt mùng! Tình hình đó cũng giống như trường hợp nửa đêm ta bước vào một phòng trọ lạ tối như bưng, mà ngay cả chỗ bật điện ta cũng chưa biết ở đâu nữa. Ta lần mò tìm công tắc bật, ta đụng phải một đồ vật gì đó, ta sờ thấy những góc cạnh gì đó, những khối tối, đen đen, chẳng ra hình thù gì cả. Bỗng ta sờ thấy công tắc, ta bật điện lên và mọi thứ lập tức trở nên rõ ràng. Những khối không hình thù rời nhau ra, mang đường nét của những đồ vật quen thuộc, thì ra các đồ vật ấy vẫn xếp đặt ở đúng chỗ của chúng, rất thích ứng với tác dụng của từng thứ.

Khi giải bài toán đôi khi người ta cũng có những rung động hệt như thế: nảy ra một ý hay chính là ánh sáng bừng lên bất thình lình, chiếu rọi vào những chi tiết trước đó tưởng chừng như mơ hồ, tản mác, lộn xộn, không tài nào nắm được, khiến chúng trở nên sáng tỏ, có trật tự, có mạch lạc và hợp lí.

Tuy nhiên, trong các vấn đề thuộc loại này, một tí chút kinh nghiệm cá nhân còn có giá trị hơn cả một lô những điều mô tả sách vở. Muốn biết rõ hơn những kinh nghiệm cá nhân đó là gì, ta cần có một ví dụ cụ thể. Có lẽ, tốt nhất là nên dùng những ví dụ toán học thật đơn giản; các ví dụ này có thể cung cấp cho ta tài liệu để nghiên cứu, có thể giúp ta có dịp rung cảm nỗi lo âu hay niềm vui sướng trong phát minh và "tập cho ta quen nhìn chân lí một cách rõ ràng và rành mạch". (Câu cuối cùng này lấy của Đề-các).

§2. MỘT VÍ DỤ

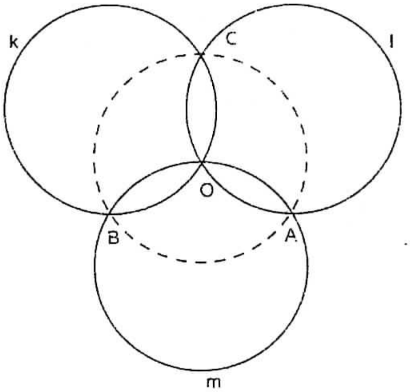
Kể ra cũng hơi tự tiện đấy, tôi muốn mạo muội một thực nghiệm trên bạn đọc. Tôi sẽ ra một bài toán hình học thật đơn giản, nhưng không quá tầm thường, rồi tôi thử tái hiện lại chuỗi ý nghĩ dẫn dắt đến chứng minh bài toán này. Tôi chủ tâm tiến từng bước rất chậm và trong quá trình đó lần lượt hé ra hết bí mật này đến bí mật khác, mỗi bí mật cũng không tiết lộ ngay một lúc, mà hé ra dần dần. Tôi hi vọng rằng trước khi câu chuyện này kể đến chót, bạn đọc đã tóm tắt được cái ý chính rồi (dĩ nhiên nếu không có điều gì trở ngại), vì cái ý này có phần nào bất ngờ, nên bạn đọc sẽ cảm thấy hài lòng về cuộc phát minh nho nhỏ của mình.

A- Nếu ba đường tròn có bán kính bằng nhau đi qua một điểm thì đường tròn đi qua ba giao điểm kia của chúng cũng có bán kính như thế.

Đó chính là định lí cần chứng minh. Điều khẳng định của định lí này ngắn gọn và rõ ràng, nhưng hình như còn thiếu chi tiết. Sau khi vẽ hình (hình 10.1a) và đưa ra những kí hiệu thích hợp, ta đi tới một đề toán tỉ mỉ hơn như sau:

B- Ba đường tròn k, l, m cùng có bán kính r, đi qua điểm O. Hai đường tròn l và m cắt nhau tại điểm A, m và k cắt nhau tại điểm B, k và l cắt nhau tại điểm C. Cần chứng minh bán kính của đường tròn e đi qua các điểm A, B và C cũng bằng r.

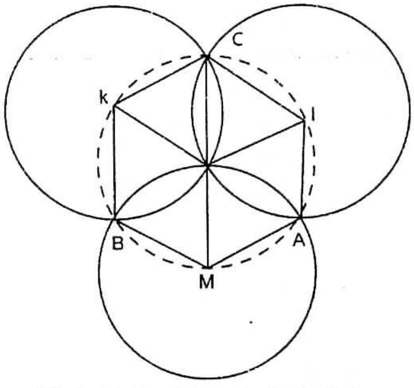
Trên hình 10.1a vẽ bốn đường tròn k, l, m, e và bốn giao điểm của chúng. Song hình này có thể chưa làm ta hài lòng, vì không được đơn giản lắm, đồng thời lại có vẻ chưa đầy đủ, ta có cảm tưởng như trên hình vẽ còn thiếu một cái gì; hình như đang có một điều gì quan trọng chưa được để ý tới thì phải.



Hình 10.1a. Ba đường tròn cùng đi qua một điểm

Hiện giờ, ta xét đến các đường tròn. Vậy đường tròn là gì? Mỗi đường tròn đều được xác định bằng vị trí của tâm và độ dài của bán kính: tất cả các điểm của đường tròn đều cách tâm một khoảng như nhau (bằng bán kính).

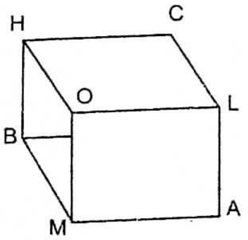
Nhưng ta đã quên chưa xét đến cái bán kính r chung cho cả bốn đường tròn đó; như vậy ta chưa chú ý đến một bộ phận quan trọng của điều kiện. Cho nên, trước hết, ta hãy kí hiệu tâm của các đường tròn: K cho vòng tròn k, L cho vòng l và M cho vòng tròn m. Bây giờ nên vạch bán kính r ở chỗ nào thì hay nhất? Chắc hẳn, dành ưu tiên cho một đường tròn nào trong ba đường tòn đã cho k, l, m hoặc cho một điểm nào trong ba giao điểm của chúng A, B, C là một điều vô nghĩa. Bởi vậy, ta hãy nối mỗi tâm với cả ba giao điểm thuộc đường tròn tương ứng: nối K với B, C và O,...



Hình 10.1b. Có quá nhiều đường

Hình vẽ vừa thu được (hình 10.1b) rắc rối đến mức khiến ta đâm nản. Trên hình có nhiều đường - đường thẳng, đường cong - quá đến nỗi ta không tài nào nhìn bao quát "đến nơi đến chốn", hình này cứ như muốn "cựa quậy". Nó gợi ta nhớ đến một vài hình vẽ quen thuộc trên các báo chí cũ, những hình người ta chủ tâm vẽ không rõ ràng: nếu xem bình thường thì thấy một hình, nhưng nếu xoay tờ báo đến một vị trí đặc thì xem nó dưới một góc độ nhất định ta đột nhiên thấy xuất hiện một hình khác, khiến ta phải sửng sốt vì đó là bình luận khá hóm hỉnh đối với hình lúc trước.

Vậy thì, trên hình vẽ rắc rối của ta, chằng chịt những đường thẳng và đường tròn, liệu bạn có thể nhận ra được một hình nào khác khả dĩ giúp ích cho mục đích của ta hay không? Cái hình mong muốn ấy, hiện đang ẩn giấu phía sau những đường chằng chịt trên hình vẽ rắc rối của ta, ta có thể tóm tắt ngay lập tức hoặc nhận ra dần dần.



Hình 10.1c. Hình này giống cái gì?

Ta sẽ phát hiện ra hình đó nhờ những cố gắng trong quá trình giải bài toán đặt ra hoặc nhờ một hoàn cảnh thứ yếu, không quan trọng, nào đó. Chẳng hạn, khi ta đang chăm chú vẽ lại cái hình "chưa ổn" của ta, ta có thể nhận xét thấy rằng toàn bộ hình vẽ được quyết định bởi bộ phận "thẳng" (gồm những đoạn thẳng) của nó (hình 10.1c).

Tình hình này xem chừng có ý nghĩa quan trọng đối với ta đấy. Nó sẽ làm cho hình vẽ đơn giản đi rất nhiều và có thể sẽ rọi sáng mặt lôgic của vấn đề. Và nó dẫn ta đến một phát biểu cải biên cho định lí của ta như sau:

C- Nếu mỗi đoạn trong chín đoạn thẳng

$$KO, \quad KC, \quad KB,$$
$$LC, \quad LO, \quad LA,$$
$$MB, \quad MA, \quad MO$$

đều bằng r, thì sẽ có một điểm E sao cho mỗi đoạn trong các đoạn thẳng

$$EA, \quad EB, \quad EC$$

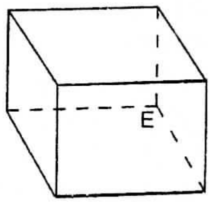
cũng bằng r.

Điều khẳng định này thu hút sự chú ý của ta vào hình vẽ 10.1c. Hình vẽ này có một cái gì đó khiến ta phải chú ý: nó gợi ta nhớ lại một cái gì quen quen (vậy, cụ thể là cái gì?).

Dĩ nhiên bất kì tứ giác nào trong số các tứ giác vẽ trên hình 10.1c, chẳng hạn tứ giác $OLAM$, cũng đều có bốn cạnh bằng nhau (theo điều kiện); tức là tất cả các tứ giác đó đều là những hình thoi. Hình thoi là một hình rất quen thuộc đối với ta; sau khi tách nó ra bằng tưởng tượng - trên hình vẽ, ta có thể "nhìn" toàn bộ hình rõ hơn (hình này, nhìn toàn bộ, gợi ta nhớ đến cái gì?).

Các cạnh đối diện của hình thoi thì song song với nhau. Dựa trên tình hình này, ta có thể phân 9 đoạn thẳng hợp thành hình vẽ trên hình 10.1c, làm ba nhóm đoạn thẳng AL, MO và BK (bây giờ, hình này gợi ta nhớ đến cái gì?).

Ta không được quên mục đích mà ta muốn nhắm tới. Ta hãy giả định kết luận của định lí đang xét là đúng. Nếu ta ghi lên hình vẽ tâm E của vòng tròn e và ba bán kính của nó tận cùng ở các điểm A, B, C (hình 10.1d) thì ta sẽ được (một cách giả định) những hình thoi mới, những đoạn thẳng song song mới. (Bây giờ, toàn bộ hình vẽ gợi ta nhớ đến cái gì?).



Hình 10.1d. Cuối cùng thì đã rõ ràng!

....

Dĩ nhiên, hình 10.1d là hình chiếu của 12 cạnh một cái hộp đặt sao cho tất cả các hình chiếu đó có độ dài bằng nhau.

Hình 10.1c là hình chiếu của một "hình hộp không trong suốt, ta chỉ nhìn thấy 3 mặt, 7 đỉnh và 9 cạnh của nó thôi, còn 3 mặt, 1 đỉnh và 3 cạnh nữa thì bị khuất. Hình này là một phần của hình 10.1d, nhưng là phần có tác dụng quyết định toàn bộ cái hình mà ta

đang quan tâm. Nếu hình hộp và phương chiếu được chọn sao cho các hình chiếu của chín cạnh vẽ trên hình 10.1c đều bằng *r*, (tức là đúng như phải thế, theo điều kiện bài toán) thì các hình chiếu của ba cạnh còn lại cũng phải bằng *r*. Từ hình chiếu *E* của đỉnh thứ tám, khuất, toả ra ba đoạn thẳng có độ dài là *r*, còn chính hình chiếu này là tâm đường tròn đi qua các điểm *A*, *B*, *C* có bán kính bằng *r*.

(Trong cách chứng minh này, ta đã dùng đến các khái niệm hình học không gian. Nhưng tôi thiết nghĩ ở đây cũng không đáng ngại lắm, vả lại nhược điểm này cũng có thể bổ khuyết được. Thật vậy, vì bây giờ ta biết rằng vị trí của tâm *E* có thể xác định rất đơn giản, nên ta có thể xét độ dài của các đoạn thẳng *EA*, *EB* và *EC* mà không cần phải vận dụng đến hình học không gian. Song, ở đây, chúng tôi không chủ trương quan điểm này).

§3. NHỮNG NÉT ĐẶC TRƯNG CỦA MỘT Ý HAY

Trong mục trước, chúng tôi đã dùng một ví dụ thích hợp để minh hoạ những nét đặc trưng cho một ý hay. Chúng tôi đã trình bày quá trình này sinh cái ý đó một cách hết sức chậm. Thành thử đáng lẽ ý đó phải lớn tiếng "tuyên ngôn" một cách đắc thắng, thì nó lại phát biểu ấp a ấp úng. (Thật ra, chúng tôi chủ tâm làm như thế, cốt để bạn đọc có điều kiện tham gia vào cuộc phát minh một sự kiện toán học). Cái ví dụ đưa ra ở trên có thể còn tỏ ra ít nhiều phiến diện ở một số mặt khác nữa. Đó là điều không tránh được bởi vì bản thân các ý nghĩ thì cực kì đa dạng muôn hình muôn vẻ. Song, nếu bạn đọc nghiên cứu ví dụ này với một sự hiểu biết đúng đắn, dưới một ánh sáng thích hợp, trong những khuôn khổ thích đáng, trên nền kinh nghiệm bản thân mình, thì ví dụ này sẽ có thể là một minh hoạ rất bổ ích về những nét điển hình của những ý hay mà ta thường gặp.

Một ý hay thường nảy ra bất thình lình. Nó đem lại một yếu tố quan trọng, mới mẻ hẳn và làm thay đổi quan điểm của chúng ta. Sau khi nảy ra ý đó, ta cảm thấy vững tin là sẽ đạt được mục đích.

Tính đột ngột là một nét đặc trưng của một ý hay, nhưng mô tả nó cho rõ ràng thì khó. Nếu sau khi nghiên cứu hình 10.1b, bất thình lình bạn thấy nổi bật lên hình ảnh của một hình hộp giữa đám rối ren những đường và chữ, thì chắc bạn sẽ nắm được sâu sắc hơn nội dung những điều muốn nói ở đây. Và có thể rằng khi đó bạn sẽ hiểu rõ ở chừng mực nào đó, thế nào là niềm cổ vũ và vì sao đôi khi người ta lại mô tả sự xuất hiện đột ngột một ý nào đấy như một điều do cảm giác bên trong của ta thầm nhắc ta, như một dấu hiệu do một đấng siêu nhiên ban cho ta.

Có thể nhận xét rằng yếu tố quan trọng nhất nảy ra trong quá trình chứng minh định lí của ta là cái ý về hình hộp. Một hình không gian lại là chiếc chìa khoá để giải một bài toán hình học phẳng, đó là một trường hợp khá hiếm gặp. Nhưng bình thường hơn nhiều là trường hợp yếu tố "chìa khoá" ẩn giấu ngay trong lĩnh vực trong đó có bài toán. Nếu đó là một bài toán hình học phẳng thì có thể chờ đợi yếu tố "chìa khoá" sẽ là một đường mới vẽ thêm vào hình hay một định lí sực nhớ lại, hay một cái gì đó đại loại như thế.

Trong trường hợp của ta, *sự thay đổi cách nhìn quen thuộc* đối với sự vật tỏ ra có hiệu quả. Các đường tròn lùi về hàng sau, rồi biến đi hoàn toàn; còn các đoạn thẳng lại nổi lên hàng đầu và ta thôi không xem chúng như những bán kính nữa, mà lại liên hệ chúng với một hình hộp nào đó (hình hộp lấy ở đâu ra?). Các bán kính lúc đầu, các đầu mút của chúng, các

tứ giác tạo thành bởi các bán kính đó, bây giờ mang một ý nghĩa mới: chúng trở thành những cạnh, những đỉnh và những mặt của một cố thể không gian. Sự thay đổi cách nhìn các yếu tố trong bài toán chẳng những là có ý nghĩa, mà còn là điển hình nữa. Bất kì một ý có tính chất quyết định nào cũng đều kéo theo một sự thay đổi có tính chất cách mạng trong cách nhìn chung đối với các sự vật và tình hình này đúng với hầu hết các bài toán. Đồng thời với sự xuất hiện ý hay, các yếu tố của bài toán bắt đầu giữ một vai trò mới, bắt đầu có một ý nghĩa mới. Trong quá trình giải các bài toán hình học, yếu tố của chúng thay đổi vai trò và được ghép nhóm khác đi: chúng tạo ra những tam giác hay những cặp tam giác với các cạnh tương ứng, hay những hình thoi hay bất kì những cấu hình quen thuộc nào khác phục vụ cho mục đích nghiên cứu của ta. Một đường, mà trước khi nảy ra một ý hay chỉ giản đơn là một đường, thì bây giờ mang một ý nghĩa đặc biệt: nó trở thành cạnh của một tam giác mà sự bằng nhau với một tam giác khác sẽ giúp ích cho việc giải bài toán hoặc nó trở thành một cát tuyến cắt hai đường song song; hoặc nó tham gia vào hình cuối cùng theo một cách khác nào đó. Sau khi nảy ra ý hay, ta sẽ nhìn thấy nhiều điều hơn trước: nhiều ý nghĩa hơn trước, nhiều triển vọng hơn trước và nhiều quan hệ hơn trước. Nảy ra một ý hay cũng tựa như bật điện rọi sáng căn phòng trước đó tối om.

Một ý hay nảy ra đồng thời với niềm tin rằng mục đích sẽ có thể đạt được. Một ý xuất hiện bất thình lình vạch ra một con đường mới, có hiệu quả giữa đám lộn xộn, rối ren, gây cho ta cảm giác rằng mình quả thực cũng có năng lực, đem lại cho ta niềm tin vững chắc vào bản thân mình. Niềm tin ấy thường biểu lộ bằng những câu thốt lên khoái trá: "Ôi, nghĩ ra rồi!", "Có thế chứ, mình tìm ra rồi!", "Thì ra bí quyết ở đây!". "Tất nhiên rồi!", trong ví dụ của ta, chỉ nhìn ra hình hộp thì chưa đủ, nếu khi đó bạn chưa phát hiện thấy rằng chính nó sẽ dẫn đến chỗ giải được bài toán, thì tức là bạn vẫn chưa có một ý có tính chất quyết định. Bạn cần phải nhìn thấy nhiều điều hơn nữa! Dĩ nhiên, cũng không cần bạn phải nhìn thấy tất cả mọi chi tiết, phải nhìn thấy hình hộp sẽ dẫn đến lời giải bằng cách nào, nhưng phải nảy ra cảm tưởng vững chắc rằng nhất định nó sẽ dẫn đến chỗ giải được bài toán.

§4. SỰ LỆ THUỘC CỦA "Ý" VÀO DỊP MAY TÌNH CỜ

Bạn đã nảy ra ý rồi phải không? Nếu bạn trả lời "vâng", thì tức là bạn đã may đấy. Bởi lẽ rằng, bạn không thể nào buộc ý phải nảy ra mỗi khi bạn muốn. Tôi tự đặt ra cho mình một bài toán nhất định. Tôi đã suy nghĩ thật nghiêm túc về bài toán đó; tôi đã phát biểu bài toán thật rành mạch đối với mình; tôi đã hình dung bài toán thật rõ nét. Tôi vùi đầu vào bài toán. Và...tôi chờ đợi một ý hay sẽ tới, nhưng liệu ý hay có nảy ra không? Có thể ý hay sẽ xuất hiện và xuất hiện ngay tức khắc, có thể ý hay phải sau một lúc mới nảy ra và cũng có thể ý hay không đến.

Ta cần đến những ý hữu ích; đương nhiên, ta mong sao có sẵn những ý hay. Nhưng trên thực tế, các ý lại sai khiến ta, chúng làm chủ ta và chúng rất "tự ý tự quyền". Dĩ nhiên, chúng có thể bất thình lình nảy ra trong đầu ta, nhưng phần nhiều thì chúng cứ cố trì hoãn, có khi chúng bắt ta phải chờ thật lâu, có khi chúng từ chối hẳn, không phục vụ ta. Ý sẽ đến lúc nào chúng muốn, chứ không phải lúc nào ta muốn chờ một ý hay, chẳng khác nào chờ trúng số vậy.

Nhưng nếu ta đồng ý rằng các ý hay là những vị khách tình cờ đến thăm, thì việc giải được bài toán phải phụ thuộc chủ yếu vào dịp may ngẫu nhiên. Có nhiều người nghĩ như thế. Xa-mu-en Ba-tơ-le(*) đã thể hiện ý này trong một bài thơ bốn câu rất hóm hỉnh:

Tất cả mọi phát minh trên đời này đều sinh ra.

Không phải do lí trí con người, hay do những suy luận tinh vi nào cả.

Mà là do trời ban cho kẻ nào may mắn.

Đã tình cờ rọi ánh sáng vào chúng.

Khó mà dám chắc rằng một ý kiến phổ biến rộng rãi đến thế lại có thể hoàn toàn vô căn cứ, hoàn toàn sai. Nhưng liệu nó có hoàn toàn đúng hay không? Và, mỗi khi phải giải một bài toán liệu ta có nên hoàn toàn trông cậy vào vận may hay không? Tôi hi vọng rằng sau khi đọc hết các chương từ đầu cuốn sách đến đây, bạn đọc sẽ xây dựng cho mình được một quan điểm nhất định về vấn đề này.

BÀI TẬP VÀ CHÚ THÍCH BỔ SUNG CHO CHƯƠNG 10

1. Sự xuất hiện bất thình lình của ý. Một đoạn trích dẫn và những bình luận về vấn đề này.

1) Chúng tôi trích dẫn dưới đây một đoạn trong cuốn sách của Tô-mát Pe-nơ (Thomas Paine)(**): Thời đại của lí trí (The Age of The Reason (Baltimore, 1956).

Ai đã từng nghiên cứu sự hoạt động và sự phát triển của trí tuệ con người dựa vào những quan sát trên trí tuệ của bản thân mình, thì không thể không nhận xét rằng có hai phạm trù khác nhau mà người ta đều gọi là ý nghĩ: phạm trù thứ nhất bao gồm những cái do chúng ta sản sinh ra một cách tích cực bằng một hành vi tư duy, bằng sự ngẫm nghĩ; phạm trù thứ hai gồm những cái tự loé sáng lên trong ý thức chúng ta. Tôi luôn luôn tôn trọng nguyên tắc cư xử rất mực lịch thiệp với những "vị khách không mời mà đến" ấy và tôi đã cố gắng tận lực nghiên cứu xem chúng có đáng được tiếp đón ân cần như thế không; bởi vì chính nhờ chúng mà tôi đã thu lượm được hầu hết các tri thức tôi hiện có.

2. Lic-ten-béc có lần đã nhận xét rằng ta không nên nói "tôi đang nghĩ" mà nên nói "nghĩ", giống như nói "mưa", "giông". Lic-ten-béc quả quyết rằng có những hành vi tư duy tự phát mà ta không thể điều khiển được, giống như ta không thể điều khiển được các sức mạnh lớn lao của thiên nhiên vậy.

Có lẽ chúng ta nên bổ sung thêm rằng lí trí của chúng ta đôi khi cư xử như một con ngựa bất kham. Đối với con vật trái tính trái nết ấy, ta phải thích nghi với nó và thỉnh thoảng phải thúc giục nó thì mới mong buộc nó phục vụ ta, bởi vì nói chung nó thường ỳ ra không chịu làm việc.

(*) Xa-mu-en Ba-tơ-le (1618 - 1680) là một nhà thơ trào phúng người Anh.

(**) Tô-mát Pe-nơ (1739 - 1809) là một nhà giáo dục, một nhà hoạt động chính trị kiêm nhà báo nổi tiếng người Mỹ. Người ta đã lấy tên ông đặt cho một bang nước Mỹ trong đó có thành phố Philadenphia, nơi T.Penơ sống trước đây, đó là bang Penxinvania.

CHƯƠNG 11. CÔNG VIỆC TRÍ ÓC

Mariốt nói, trí óc con người giống như cái tráp: lúc suy nghĩ ta lắc cái tráp song không có cái gì rơi ra ngoài. Như vậy, rõ ràng là kết quả suy nghĩ, nghiền ngẫm trên một mức độ nào còn tuỳ thuộc vào những ngẫu nhiên. Theo tôi, nên bổ sung thêm: trí óc người ta giống như cái rây nhiều hơn. Lúc suy nghĩ, ta lắc cái rây ấy, nhưng không phải hạt nhỏ nào cũng xuyên qua rây. Cũng như chỉ có những hạt nào đó lọt qua rây, sự chăm chú có chủ đích giúp chúng ta "bắt" được những hạt hình như có quan hệ với vấn đề. Điều này cũng tương tự giống như tình huống dưới đây: để tóm được tên ăn cắp, viên chỉ huy thành phố lệnh cho toàn thể mọi người trong thành phố diễu qua cổng chính đã có người bị mất cắp chờ ở đấy. Để công việc gọn nhẹ và tiết kiệm thời gian, người ta có thể dùng biện pháp chọn lọc loại trừ nào đó. Chẳng hạn, nếu người mất cắp khẳng định tên kẻ cắp là nam, không phải là nữ và lớn tuổi, không phải là thanh niên hay trẻ con, thì những ai thuộc diện sau sẽ không phải diễu qua cổng chính.

LÉP-NÍT - Opuscules

§1. CHÚNG TA SUY NGHĨ NHƯ THẾ NÀO

Người giải toán phải hiểu được trí tuệ mình như người lực sĩ hiểu thân thể anh ta, như những người đua ngựa đối với con ngựa của họ. Theo tôi, những người đua ngựa nghiên cứu các con ngựa không phải với nhãn quan thuần tuý khoa học, mà nhằm thu được kết quả tốt nhất trong cuộc đua; những đặc điểm, bệnh tật hay tính nết của con ngựa sẽ cùng họ thi đấu làm họ quan tâm hơn vấn đề sinh lí đại cương hay tâm lí học của loài ngựa.

Điều bạn đang bắt đầu đọc không phải là một chương trong cuốn tâm lí học; có thể nói không chính xác lắm, rằng đây là cuộc nói chuyện giữa những người ham mê toán về đặc điểm của trí tuệ của họ, giống như sự bàn bạc giữa những người đua ngựa về đặc điểm của những con ngựa của họ và tất cả những điều đó rất giống với một cuộc nói chuyện, hơn là một sự diễn đạt những sự việc nhất định.

§2. KHÁT VỌNG GIẢI ĐƯỢC BÀI TOÁN

Khát vọng và quyết tâm giải được bài toán là nhân tố chủ yếu của quá trình giải mọi bài tập. Một bài toán bạn định giải, mà bạn đã hiểu quá rõ về nó, thì đó chưa hoàn toàn là một bài toán đối với bạn. Bài đó chỉ thực sự trở thành bài toán của bạn, thực sự thu hút tâm trí bạn, lúc bạn quyết tâm giải đến cùng và khao khát giải được.

Một bài toán có thể thu hút bạn nhiều hay ít, lòng mong muốn giải được bài toán đó có thể mạnh hay yếu; nhưng tôi khẳng định rằng, lúc ước ao đó chưa trở thành rất tha thiết, triển vọng bạn giải được bài toán nếu là thực sự khó, sẽ mong manh.

Khát vọng giải được bài toán, ngay tự bản thân nó, đã là một nhân tố có lợi, bởi vì, cuối cùng chính đây là nhân tố dẫn ta đến lời giải và chắc chắn sẽ là động lực cho những suy nghĩ của chúng ta.

§3. XU HƯỚNG CỦA TƯ DUY

Bạn có thể bị một bài toán nào đó "làm say mê" theo đúng nghĩa của từ: chính bài toán "cầm tù bạn", bạn ở tâm trạng không dứt ra được, ở đâu, lúc nào bài toán cũng ám ảnh bạn.

Đôi lúc bài toán chi phối người giải đến mức anh ta trở thành ngẩn ngơ đãng trí, không hiểu được những sự vật xung quanh mình, tuy đối với mọi người dường như chẳng có gì xa lạ, quên mất những điều chẳng có ai lại có lúc quên được. Niu-tơn lúc tập trung nghiên cứu các đề tài, thường quên cả ăn uống.

Đúng như thế, sự chú ý của người giải toán mang *tính chất chọn lọc*, chẳng hề dừng lại ở trước những điều dường như không liên quan với bài toán, nhìn được từ xa cả những điều nhỏ nhất nếu giữa chúng với bài toán có liên hệ nào đó. Đấy là sự chú ý định hướng, sự chăm sóc có "chủ đích"(*) như Lép-nít từng phát biểu.

§4. TIẾP CẬN VỚI LỜI GIẢI

Học sinh thường trải qua những kì thi viết về toán. Kì thi không đòi hỏi học sinh giải được tất cả các bài toán, nhưng phải làm thế nào để giải được càng nhiều càng tốt. Trong tình huống như thế, phương sách sau có lẽ tốt nhất: nhìn lướt khắp lượt tất cả các bài và chọn những bài hình như dễ hơn để làm được.

Tất nhiên ở đây đã giả định người học sinh có khả năng ở mức độ nào đó đánh giá được khó khăn của bài toán, có thể trong một chừng mực nào đó "ước lượng được khoảng cách tâm lí" giữa mình và lời giải. Thật ra, khi đã nghiên cứu nghiêm chỉnh bài toán nào đó, mọi học sinh đều cảm nhận được rất rõ sự tiếp cận với lời giải và tiến bộ của mình vươn đến đích cuối cùng. Có thể tuy không nói ra miệng nhưng đã cảm thấy rõ: "mọi việc đều tiến triển ổn thoả, lời giải còn xa vời", hay " tôi đang mụ đi, chẳng đạt được tiến bộ nào", "tôi đang lẩn quẩn ngoài rìa và rời xa đích".

(*) Nguyên bản là Spying - "Của người tình báo".

§5. ĐOÁN TRƯỚC

Ngay lúc mới bắt tay nghiêm chỉnh vào việc giải bài toán, đã có cái gì đó thúc giục chúng ta nhìn lên phía trước. Thường chúng ta thử đoán trước điều gì sẽ diễn ra: chúng ta chờ đợi nó để điền vào đấy, cố dự đoán những đường bao của lời giải. Đường nét ấy có thể mơ hồ, ít hoặc nhiều, thậm chí có thể không chính xác ở mức độ nào đó, nhưng trong thực tế thường đường bao ấy không đến nỗi sai lệch.

Tất cả những người giải toán đều phải xây dựng các phỏng đoán hay đề ra giả thiết, song giữa phỏng đoán của người giải nông cạn và người suy nghĩ sâu sắc có sự khác biệt.

Người nông cạn chỉ ngồi bóp trán hay cầm bút chờ đợi sự hiểu thấu và trong lúc chờ anh ta làm rất ít làm gì (hay thậm chí chẳng làm gì cả) để cho ý nghĩa đó xuất hiện nhanh chóng. Lúc ý nghĩ ao ước đó hiện lên và mang lại các phỏng đoán dường như đúng thì anh ta chộp ngay hầu như không phê phán (hay chẳng phê phán gì cả), coi như lời giải sẵn.

Còn người sâu sắc có thái độ hoài nghi hơn đối với các phỏng đoán của mình. Phỏng đoán đầu tiên của anh ta có thể là "chúng có 25" hay "tôi phải nói với nó điều này và điều kia". Nhưng sau đó lại tự kiểm tra lại các phỏng đoán của mình và thậm chí có lúc thay đổi "không, không phải 25. Thử cho là 30 có lẽ hay hơn" hoặc "không, nói những điều đó với anh ta sẽ vô nghĩa vì như vậy sẽ làm anh ta phản ứng thế này thế nọ. Nhưng giờ tôi sẽ nói là...". Bằng con đường "thử và sai" như thế, liên tiếp đưa ra các phỏng đoán tiếp cận hợp lí, cuối cùng người giải có thể đi đến một câu trả lời đúng, chọn được phương án giải thích hợp.(*)

Lúc không tìm được câu trả lời trọn vẹn, người suy nghĩ chín chắn hơn, có kinh nghiệm hơn, sẽ cố gắng phỏng đoán một bộ phận nào đó, nét đặc trưng nào đó trong giải đáp ấy, một tiếp cận nào đó của lời giải, hay thậm chí một chi tiết trong tiếp cận ấy. Rồi cố gắng mở rộng phỏng đoán của minh, đồng thời tìm cách kiểm tra phỏng đoán của mình phù hợp với những hiểu biết hoàn chỉnh nhất đã thu được ở từng giai đoạn nhất định của quá trình giải.

Người giải, dù nhiều hay ít kinh nghiệm, nhất thiết đều mong đi đến một phỏng đoán thực sự tốt, một ý thực sự có hiệu quả.

Và không ai không biết phỏng đoán của mình có triển vọng chính xác đến mức nào. Không thể nào cân đo chính xác những triển vọng này (ở đây không phải là lúc phân tích những khả năng tìm hiểu cách đánh giá), tuy nhiên, có lẽ trong rất nhiều trường hợp người giải đã cảm nhận được rõ ràng triển vọng phỏng đoán của mình. Ngay cả những người suy nghĩ hoàn toàn thiếu thấu đáo, không biết chứng minh thế nào, vẫn có thể có những cảm giác mạnh mẽ nhất về các phỏng đoán của mình; còn những người suy nghĩ thấu đáo có thể phân biệt được những sắc thái tinh tế của cảm giác, nhưng dù là ai, nhất thiết đều có khái niệm nào đó về số phận có thể xảy ra đối với phỏng đoán của mình. Như vậy; ngoài cảm giác về những điều có liên hệ hay không liên hệ với bài toán khảo sát ngoài cảm giác

---

(*) Xem các điểm 1^0 và 5^0, §2 chương 2.

về sự tiếp cận với lời giải, ta còn nhận thấy trong suy nghĩ của người giải một cảm giác thuộc dạng khác, đó là: sự đoán trước.

Nhận định này có liên hệ với vấn đề không? Còn xa lời giải không? Phỏng đoán này chính xác đến mức nào? Những câu hỏi như thế luôn luôn theo người giải trên từng bước đi. Các câu hỏi này cũng như những câu trả lời của chúng thường được cảm nhận nhiều hơn là được diễn đạt thành lời. Những câu hỏi giống như thế, chỉ đạo hay chỉ kèm theo các hành động của người giải? Chúng là nguyên nhân hay chỉ là những báo hiệu? Tôi không rõ điều đó, nhưng nếu cảm giác tương tự chưa phát sinh ở bạn, chắc chắn bạn chưa thực sự quan tâm đến bài toán của mình.

§6. KHU VỰC TÌM TÒI

Hiếm khi tôi bị mất đồng hồ, nhưng lúc đã xảy ra, tôi luôn luôn quan tâm làm thế nào để tìm được. Lúc đó tôi thường bắt đầu tìm ở một số nơi hoàn toàn xác định: ở trên bàn giấy hoặc ngăn kéo hay để các đồ vật nhỏ, hoặc đi tìm thêm ở một số chỗ khác nữa nếu tôi nhớ ra chính tôi đã tháo đồng hồ tay ở đấy.

Hành động này có tính chất điển hình. Ngay lúc chúng ta mới nghiêm chỉnh quan tâm đến bài toán, chúng ta đã cố gắng vạch ra đường bao trong đó ta sẽ đi tìm lời giải. Đường bao ấy có thể không xác định, có thể hầu như không nắm bắt được, nhưng chính đường bao ấy quy định những hành động sau đó của chúng ta. Tất nhiên những ý đồ giải một bài toán có thể khác nhau, nhưng về bản chất đều giống nhau, đều nằm bên trong đường bao vạch ra từ trước (có thể không hoàn toàn hữu ý). Nếu đã thử tất cả các phương án giải và không có phương án nào đem lại kết quả, chúng ta sẽ cảm thấy bối rối, chẳng nghĩ ra một điều gì khác, chúng ta rơi vào trạng thái không thể nào vượt qua khỏi đường bao ấy. Chính vì chúng ta tìm một lời giải hoàn toàn xác định, chứ không phải lời giải chung chung nào đó, một lời giải phải nằm trong đường bao đã hạn định. Chúng ta không đi tìm lời giải ở nơi nào đó trên mặt đất, mà ở bên trong khu vực tìm tòi đã hạn định.

§7. NHỮNG QUYẾT ĐỊNH TRUNG GIAN

Quá trình giải một bài toán có thể mang tính chất sáng tạo, song với những người kém năng lực, đôi lúc quá trình đó trở thành những buổi ngồi lì tại chỗ, chẳng đưa lại lợi ích gì. Có những trường hợp có thể coi quá trình đó là cuộc hành trình căng thẳng vượt qua quãng đường dài, khúc khuỷu để đi tới đích, mỗi chỗ ngoặt được đánh dấu bằng một quyết định trung gian. Cảm giác về những điều có hay không có liên hệ với bài toán, sự mong mỏi tiếp cận với bài toán, niềm hi vọng tăng lên hay giảm đi, là nhân tố gợi ra (hoặc có thể chỉ đi kèm theo) những quyết định ấy. Người giải ít nói ra miệng các quyết định trung gian và những cảm giác đột xuất xuất hiện, tuy nhiên đôi lúc điều đó cũng xảy ra:

"A, hãy thử xem qua chỗ này".

"Không, vị tất cả ở đây đã có điều gì đang xem xét, xem qua chỗ kia chắc tốt hơn".

"Ở đây, điều cần xem cũng không nhiều, nhưng dường như có khói chắc có lửa. Hãy chú ý quan sát nhiều hơn".

Một trong các quyết định trung gian thuộc loại quan trọng nhất là mở rộng một khu vực tìm tòi, phá bỏ những giới hạn bắt đầu trói buộc chúng ta.

§8. HUY ĐỘNG VÀ TỔ CHỨC

Đối với những đặc điểm trong hoạt động trí tuệ của người giải toán, chúng ta biết chẳng được là bao. Tính chất phức tạp của hoạt động này có lẽ không thể đo được, nhưng có một mặt hoàn toàn thấy rõ: người giải toán càng tiến lên phía trước thì những hiểu biết về đối tượng nghiên cứu càng được tích luỹ nhiều.

Chúng ta thử so sánh nhãn quan người giải đối với bài toán lúc đầu và cuối quá trình. Ban đầu, bức tranh về bài toán đơn giản: người giải nhìn bài toán biệt lập hoặc chẳng có chi tiết nào hoặc có ít chi tiết, có lẽ chỉ phân biệt được những phần chính: ẩn số, các dữ kiện và điều kiện hoặc điều kiện cần và kết luận. Về cuối, bức tranh hiện ra trước người giải hoàn toàn khác, phức tạp, mang thêm những chi tiết và bộ phận phụ, giữa chúng và bài toán có những liên hệ ban đầu người giải không hề nghi vấn. Trên bức tranh ban đầu, bị tước mất các chi tiết, xuất hiện những đường nét phụ, được đưa thêm vào những số ẩn phụ. Các tri thức tích luỹ từ trước được vận dụng, chủ yếu là các định lí có liên hệ với bài toán. Ngay lúc mới bắt đầu nghiên cứu bài toán, người giải không thể nào thấy được chính đấy là những định lí có triển vọng có ích cho anh ta.

Tất cả những tư liệu, yếu tố phụ, các định lí này,... lấy từ đâu? Người giải đã tích luỹ những tri thức ấy trong trí nhớ, giờ đây rút ra và vận dụng một cách thích hợp để giải bài toán. Chúng ta gọi việc nhớ lại có chọn lọc các tri thức như vậy là sự *huy động*, việc làm cho chúng thích ứng với bài toán đang giải là sự *tổ chức*.

Quá trình giải một bài toán giống như xây nhà. Đầu tiên phải thu thập vật liệu, nhưng vật liệu ấy không thể tự nó trở thành ngôi nhà: đấy chỉ là đống đá. Để xây được căn nhà hay giải bài toán, đồng thời phải sắp xếp các bộ phận và tổ chức tập hợp chúng lại trong toàn bộ. Đây là điều ta cố gắng đạt được.

Thực tế không thể tách các hoạt động tổ chức và huy động, chúng bổ sung lẫn nhau như hai mặt của một quá trình phức tạp thống nhất quá trình lao động trí tuệ với đích cuối cùng là lời giải. Công việc ấy, vô cùng phong phú về nhiều mặt và tiến hành khẩn trương sẽ huy động tất cả các dự trữ vật chất, đòi hỏi vận dụng toàn bộ những khát vọng và trong toàn bộ những thao tác trí tuệ muôn màu muôn vẻ, hãy chú ý đến một số yếu tố vốn là các yếu tố của công việc trí tuệ, mà thường người ta diễn đạt bằng những thuật ngữ như cách li và liên hợp, nhận biết và hồi tưởng, tập hợp và bổ sung.

Trong những mục sau, chúng tôi sẽ cố gắng mô tả các thao tác này. Tất nhiên, bạn đọc không thể mong gặp được ở đây những phân biệt rành rọt, tỉ mỉ giữa các khái niệm, hay những định nghĩa triệt để và chặt chẽ.

§9. NHẬN BIẾT VÀ HỒI TƯỞNG

Lúc giải toán, chúng ta sẽ rất vui sướng nếu nhận ra yếu tố nào đó đã biết. Chẳng hạn nghiên cứu một hình học chúng ta có thể phát hiện được một tam giác trước đấy chưa nhận ra, hay một cặp tam giác đồng dạng hoặc có cấu hình nào đó từng biết rõ. Nghiên cứu một công thức đại số, ta có thể phát hiện được một chính phương hay một tổ hợp khác nào đó đã biết. Tất nhiên, ta có thể gặp cả những tình huống phức tạp hơn ít nhiều nếu nhận biết được sẽ rất có ích. Có lẽ chúng ta cũng chưa biết nên gọi tình huống đó là gì và chưa đưa ra được một định nghĩa hình thức, nhưng theo chúng tôi dường như đây là tình huống đặc biệt quen thuộc và quan trọng.

Lúc chúng ta nhận ra được trên hình đang khảo sát một tam giác nào đó, nếu chúng ta cảm thấy mãn nguyện, thì đấy là một điều có cơ sở. Bởi chúng ta đều biết một số định lí về các tam giác, đã giải những bài toán khác nhau và có lẽ có định lí nào đó trong các định lí đã biết hay lời giải nào đó đã tìm được trước đây phù hợp với bài toán đang khảo sát. Sau khi đã phát hiện, nhận biết được tam giác này, chúng ta thiết lập mối liên hệ giữa nó với lĩnh vực rộng lớn các tri thức đã lĩnh hội được từ trước, trong đó có những bộ phận có thể có ích cho chúng ta lúc bấy giờ. Như vậy, nói chung sự nhận biết có thể gợi cho chúng ta hồi tưởng được những điều có ích cho việc giải bài toán, huy động được những kiến thức có quan hệ tới vấn đề đang xét.

§10. BỔ SUNG VÀ PHÂN NHÓM LẠI

Giả sử chúng ta nhận biết được một tam giác trên hình và hồi tưởng được một định lí về tam giác hi vọng có ích cho tình huống đang khảo sát. Để có khả năng vận dụng định lí này vào thực hành, sau đó ta phải thêm vào tam giác những đường phụ nào đó, chẳng hạn các đường cao. Sự huy động của các yếu tố có nhiều triển vọng có ích, gắn với quan niệm của chúng ta về bài toán, thông thường có thể làm cho bài toán phong phú, đa dạng bài toán rõ rệt hơn, loại bỏ được các lỗ hổng, khắc phục những thiếu sót, tóm lại, sẽ bổ sung cho bài toán.

Những bổ sung như thế cung cấp thêm tài liệu mới giúp chúng ta tìm hiểu bài toán và là một bước quan trọng trong việc tổ chức quá trình giải toán. Song, có khi không bổ sung thêm tài liệu mới mà việc tổ chức quá trình giải toán vẫn thu được nhiều kết quả, chẳng hạn, chỉ cần thay đổi vị trí các yếu tố này trên bình diện mới, điều chỉnh và phân nhóm lại. Bằng cách phân nhóm lại các yếu tố, chúng ta đã thay đổi "cấu trúc" của quan niệm chúng ta về bài toán. Như vậy, phân nhóm lại có ý nghĩa là *thay đổi cấu trúc*.

Chúng tôi sẽ trình bày các suy nghĩ cụ thể hơn. Có lẽ, kẻ các đường phụ có thể là chìa khoá giúp ta giải các bài hình học. Nhưng đôi lúc không đưa thêm đường mới nào, chỉ hạn chế ở những đường đã có nhưng xem xét dưới góc độ khác, vẫn có thể thực hiện một bước quyết định. Ví dụ chúng ta có thể nhận thấy một số đường thẳng tạo thành hai tam giác đồng dạng. Lúc xem xét cấu hình quen thuộc như thế, ta sẽ phát hiện được mối quan hệ qua lại trước đây chưa biết giữa các yếu tố trong cấu hình, sẽ thấy chúng được

phân nhóm theo một cách khác. Chúng ta sẽ xác lập được một cấu trúc mới và hình vẽ hiện ra trước mắt ta như một chỉnh thể có tổ chức hơn, hài hoà hơn, có triển vọng hơn - chúng ta đã trao cho tài liệu của bài toán một hình thức mới.

Sự phân nhóm lại có thể làm thay đổi trọng tâm bài toán trong quan niệm của chúng ta. Các yếu tố, những liên hệ qua lại, nằm ở phía trước lúc chưa phân nhóm lại, nay có thể nhường bước, lùi lại phía sau, thậm chí có thể lui xa đến mức trên thực tế không được đề cập đến trong quá trình giải toán. Để tổ chức tốt hơn quá trình giải toán, từng lúc ta phải loại bớt đi một điều gì đó vừa được coi là có liên hệ với vấn đề. Tuy nhiên, nói chung đứng về mặt toàn diện, ta cần bổ sung nhiều hơn là loại bỏ.

§11. CÁCH LI VÀ LIÊN HỢP

Lúc nghiên cứu một chỉnh thể phức tạp, có thể chi tiết này hay chi tiết kia sẽ thu hút sự chú ý của chúng ta. Chúng ta tập trung chú ý vào một chi tiết xác định nào đó, lấy làm điểm tựa và tách chi tiết ấy ra. Tóm lại, chúng ta *cách li* chi tiết ấy. Sau đó, tiêu điểm của mọi chú ý lại chuyển đi, một chi tiết khác được tách ra - chúng ta cách li một chi tiết mới,...

Ngay lúc nghiên cứu và đánh giá một cách hợp lí một loại chi tiết, có thể xuất hiện nhu cầu hình dung lại một lần nữa toàn bộ tình huống. Thực ra, sau lúc đánh giá lại những chi tiết riêng rẽ, "hình ảnh về chỉnh thể" ("appearance of the whole", "vue d'ensemble", "Gestalt") có thể biến đổi. Tác dụng tổng hợp của việc đánh giá lại vị trí một số chi tiết có thể hình thành trong suy nghĩ của chúng ta bức tranh mới về tình huống chung, chúng *liên hợp* mới, hài hoà hơn về tất cả các chi tiết.

Cách li và liên hợp, bổ sung lẫn nhau, có thể thúc đẩy quá trình giải toán. Việc cách li các chi tiết dẫn tới sự phân rõ chỉnh thể thành các bộ phận và sự liên hợp tiếp theo lại liên kết các bộ phận thành chỉnh thể khác ít hoặc nhiều hơn với ban đầu. Phân chỉnh thể thành các hợp phần, rồi liên kết các hợp phần thành một chỉnh thể khác trước, tiếp tục nhận ra và hợp lại như thế, tất nhiên quan niệm của chúng ta phải chuyển biến, chuyển sang tình huống có triển vọng hơn.

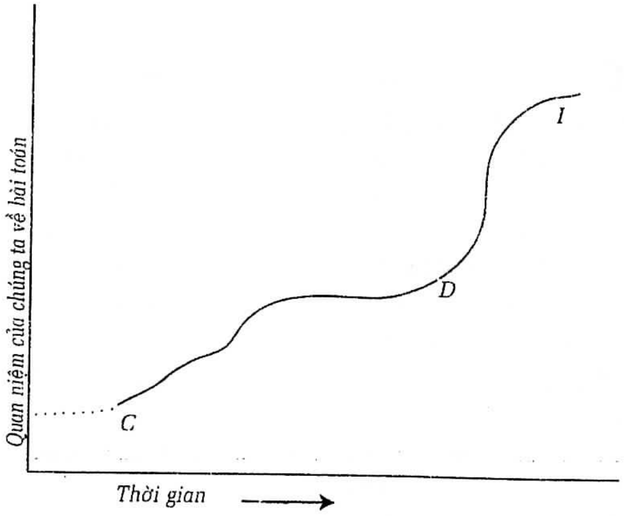
§12. BIỂU ĐỒ

Chúng ta diễn đạt những suy nghĩ đã trình bày trong các mục trên dưới dạng biểu đồ tóm tắt ở hình 11.1 và xin nhường bạn đánh giá ích lợi của sơ đồ này, chín thuật ngữ được phân bố dưới dạng hình vuông, trong đó có một ở tại tâm, bốn thuật ngữ tại bốn đỉnhvà bốn còn lại nằm trên bốn cạnh.

Huy động và tổ chức được bố trí tại hai đầu mút đối nhau trên cùng đường chéo (nằm ngang) của hình, vì trong thực tế hai thao tác này bổ sung lẫn nhau. Thao tác huy động gợi lên trong trí nhớ của chúng ta các yếu tố có quan hệ với vấn đề và việc tổ chức gắn chúng lại với nhau theo chủ đích.

Cách li và liên hợp ở tại hai đầu đường chéo kia (thẳng đứng) vì trong thực tế chúng cũng bổ sung cho nhau. Thao tác cách li tách một chi tiết cụ thể ra khỏi những yếu tố lân cận cùng chỉnh thể, còn liên hợp liên kết các chi tiết phân rõ thành chỉnh thể sinh động.

Nhận biết và hồi tưởng nằm trên hai cạnh cùng xuất phát từ "đỉnh huy động", bởi vì trong thực tế việc huy động các yếu tố có liên hệ với bài toán thường được bắt đầu từ việc nhận biết yếu tố nêu ra có trong bài và nằm trong quá trình hồi tưởng những yếu tố khác đã biết, có liên hệ với yếu tố đã nhận biết.



Hình 11.1. Chúng ta suy nghĩ như thế đấy

Các từ "*bổ sung*" và "*phân nhóm lại*" ghi trên hai cạnh xuất phát từ "*đỉnh tổ chức*", vì trong thực tế tổ chức có nghĩa là bổ sung cho những hiểu biết của chúng ta về bài toán. Làm cho bài đó có được tính hoàn thiện nhất định do đã được bổ sung thêm chi tiết mới và khắc phục được cái lỗ hổng, tổ chức còn có nghĩa là phân nhóm lại, cấu tạo lại bài toán trong quan niệm chúng ta.

Đọc các thuật ngữ phân bố dọc theo các cạnh hình vuông từ trái sang phải, ta đi từ các chi tiết được huy động đến chỉnh thể có tổ chức. Chi tiết vừa nhận biết, được cách li kĩ lưỡng và trở thành tiêu điểm mọi chú ý, có thể làm thay đổi toàn bộ quan niệm đã có đối với bài toán. Hoàn toàn giống như thế, chi tiết hồi tưởng được và tỏ ra có ích cho quá trình liên hợp, sẽ làm phong phú thêm hiểu biết cho chúng ta về bài toán và sẽ bổ sung cho chỉnh thể.

Trong quá trình giải toán, *hiểu thấu* (hay đoán trước) là trung tâm mọi hành động, nên vị trí thích hợp của thuật ngữ này là tâm hình vuông tượng trưng. Trong quá trình giải toán, chúng ta huy động và tổ chức, cách li và liên hợp, nhận biết và hồi tưởng những yếu tố thuộc dạng khác nhau, phân nhóm lại và bổ sung cho quan niệm của chúng ta về bài toán, cố gắng dự kiến lời giải hay những nét đặc thù nào đó của lời giải hay một bộ phận con đường dẫn tới lời giải. Nếu dự kiến hay sự thấu hiểu xuất hiện đột ngột như ngọn lửa

bùng lên, thì chúng ta gọi đó là cảm hứng, là ý nghĩa rực sáng; có được những ý nghĩ như thế, đó là mong muốn thầm kín nhất của chúng ta.

Những thao tác tư duy phản ánh ở hình 11.1 sẽ mang hình thức xác định hơn lúc khảo sát trên cơ sở tài liệu cụ thể. Bây giờ chúng tôi sẽ liệt kê bốn thao tác tư duy tương ứng với bốn cạnh hình vuông, có ý nghĩa quan trọng đối với việc giải bài toán.

Nhận biết:	Phân nhóm lại:
Hãy sử dụng các định nghĩa;	Hãy cấu tạo lại bài toán;
Hồi tưởng:	Bổ sung:
Nhớ lại các định lí và bài toán đã biết;	Đưa vào những yếu tố phụ.

Chúng ta hãy xét thêm một điểm nữa. Tiến hành giải toán thường kèm theo những cảm giác về phương hướng hành động, cảm giác về sự tiếp cận lời giải, cảm giác nói lên tính chất của hiệu quả các dự đoán. Thảo luận vấn đề này, chúng tôi nhất trí là ở những người càng có năng lực, những cảm giác này càng phân hoá rõ nét hơn. Tôi cũng thấy không nên yên lặng bỏ qua ở đây một nhận xét vừa được suy ra: (*) một số sắc thái của những cảm giác này có thể gắn với những thao tác tư duy đã được phản ánh trong hình 11.1.

Chúng ta sẽ vui mừng, lúc quan niệm chúng ta về bài toán tỏ ra *rất cân bằng và hài hoà*, lúc quan niệm này *chứa đựng tất cả các chi tiết cần thiết*, nhất là toàn những chi tiết chưa biết rõ. Nếu trong *chỉnh thể hài hoà có nhiều chi tiết rất đa dạng* thì sẽ cảm thấy cái ý về lời giải là rất gần. Lúc sử dụng các thuật ngữ này, theo ý tôi, chúng ta thể hiện thái độ cho là *những thao tác này nọ trong các thao tác đang xét ở trên có tác dụng thúc đẩy công việc tiến lên*, thậm chí sẽ đưa ta tới đích.

Có lẽ quan niệm chúng ta về bài toán đã ổn định nếu chúng ta cảm thấy không cần phải nhóm lại các yếu tố, quan niệm đã phù hợp, gắn bó với nhau ở bên trong nếu ta không hồi tưởng lại các chi tiết nếu thiếu một trong các chi tiết này gợi cho ta nhớ dễ dàng các yếu tố khác. Nếu quan niệm của chúng ta về bài toán không đòi hỏi bổ sung, chúng ta coi quan niệm đó đã hoàn chỉnh; nếu các chi tiết đều *nhận biết được*, quan niệm đó dường như quen thuộc và gần gũi. Việc *cách li sơ bộ* các chi tiết và tập trung chú ý riêng từng chi tiết đảm bảo cho sự hiểu biết chi tiết này được chính xác, minh bạch và tính hài hoà trong quan niệm về toàn bộ là do đã liên hiệp tốt các chi tiết. Chúng ta nói rằng ý tưởng đã tới gần, đó là lúc ta cảm thấy tiến trình đi tới cái gọi là *thấu hiểu*.

Nhằm hệ thống hoá những dấu hiệu thuận lợi này của tiến trình đã có kết quả, chúng ta sẽ phân bổ chúng theo một sơ đồ như thế nào để vị trí tương hỗ giữa chúng có ý nghĩa như ở các thuật ngữ tương ứng trên hình vuông 11.1. Vì vậy, chúng ta sắp xếp bảng thuật ngữ tương tự như vị trí của bốn cạnh hình vuông và ba điểm quan trọng tại đỉnh đường chéo thẳng đứng. Dưới đây là sơ đồ:

(*) Xem "Giải một bài toán như thế nào?" - Tiến trình và thành quả.

Các chi tiết đã cách
li có hiệu quả:
sự tách bạch giữa
các chi tiết.

Các chi tiết đã nhận
biết có kết quả :
cảm giác hiểu được quan
niệm của bài toán.

Các chi tiết đã phân
nhóm có kết quả:
tính chất ổn định của
quan niệm về bài toán.

Hiểu thấu:
sự tiếp cận của ý niệm
về phương thức giải.

Hồi tưởng có kết quả:
sự phù hợp bên trong
của bài toán.

Sự bổ sung có kết quả:
sự hoàn thiện, đầy đủ của
quan niệm về bài toán.

Liên hợp có kết quả:
tính hài hoà của quan
niệm trong toàn bộ.

§13. CÁI BỘ PHẬN GỢI LÊN CÁI TOÀN BỘ

Một em bé đi trên đường phố, qua trước mắt tôi vừa đi vừa huýt sáo một khúc nhạc. Tôi chỉ nắm được một hoặc hai cái nhịp của giai điệu mà tôi rất thích thú, nhưng từ lâu chưa được nghe. Đột nhiên giai điệu ấy, được trí nhớ bổ sung thêm, làm tiêu tan tất cả nỗi lo âu và suy nghĩ không đâu đang làm nặng đầu óc tôi.

Sự kiện nhỏ vừa kể trên là một minh hoạ rõ ràng "sự liên tưởng các ý nghĩ", một hiện tượng Aristôt từng mô tả và sau ông là bao nhiêu người nữa. Bretli đã mô tả rất hay hiện tượng này: "mỗi bộ phận của một trạng thái trí tuệ lấy riêng rẽ, được tái hiện, sẽ thúc đẩy sự phục hồi toàn bộ những điều kiện còn lại". Như trường hợp này, chỉ một nhịp đã gợi lên ngay từ đầu ấn tượng chung về giai điệu và sau đó đã nhanh chóng phục hồi tất cả các nhịp còn lại. Sự liên tưởng các ý nghĩa còn một đặc trưng nữa là thực ra ở những cái thiếu chi tiết có thể dễ dàng nhớ lại: "Cái bộ phận gợi ra cái toàn bộ". Chúng ta hãy thoả thuận với nhau xem lời nói ngắn này là những lời phát biểu chính xác hơn của Bretli, đã được rút gọn để tiện sử dụng.

Bạn hãy từ mình nhận xét lấy các từ quan trọng: "thúc đẩy" và "gợi ra". Để diễn đạt "quy luật liên tưởng", ta có thể coi các khẳng định:

"Cái bộ phận gợi ra cái toàn bộ".

"Cái bộ phận thúc đẩy sự phục hồi cái toàn bộ".

"Dựa vào bộ phận sẽ có hi vọng phục hồi cái toàn bộ" là khả dĩ chấp nhận được, nhưng câu

"Cái bộ phận phục hồi cái toàn bộ"

không thể nào chấp nhận được, vì quy luật này không khẳng định sự phục hồi cái toàn bộ, mà chỉ nói là có hi vọng, triển vọng, khuynh hướng. Về sức mạnh của khuynh hướng này, chúng ta cũng biết được ít nhiều: nếu cái bộ phận trở thành trung tâm mọi chú ý, nó sẽ gợi ra cái toàn bộ hiệu lực hơn bất kì bộ phận riêng rẽ nào. Những bổ sung này rất quan trọng đối với sự hiểu biết vai trò của sự liên tưởng các ý nghĩa trong hoạt động trí tuệ của người giải.

Chúng ta xét một ví dụ rất đơn giản. Có bài toán chỉ với một định lí *D* là có thể giải được nhanh chóng. Đó là một định lí có tầm quan trọng quyết định đối với bài toán, vì nếu không sử dụng sẽ gặp khó khăn. Thoạt đầu, người giải thậm chí vẫn chưa lường được định lí *D* có quan hệ nào đó với bài toán của mình. Nhưng tại sao người giải có thể đoán được định lí *D* có vai trò quyết định? Có thể có nhiều trường hợp.

Tương đối đơn giản là trường hợp bài toán và định lí *D* cùng có một bộ phận hợp thành. Sau khi lần lượt thử các bộ phận, người giải sẽ phải phát hiện ra bộ phận này, cách li và tập trung mọi chú ý vào đấy, nhờ đó người giải sẽ có triển vọng qua bộ phận này hồi tưởng hay "phục hồi" được toàn bộ định lí *D*.

Sẽ phức tạp hơn nếu trong khái niệm đầu tiên của chúng ta, bài toán và định lí *D* (có tầm quan trọng trong quyết định) không có bộ phận hợp thành chung nào. Trường hợp này có thể có một định lí *C* đã biết, có chung với bài toán một bộ phận hợp thành và một bộ phận khác với định lí *D*. Người giải có thể đi đến định lí *D*, bằng cách ban đầu tác động vào *C*, rồi chuyển từ *C* sang *D*.

Rõ ràng, có khả năng là chuỗi các liên tưởng còn dài hơn nữa: bài toán có thể "tiếp xúc về liên tưởng" như thế với *A*, *A* với *B*, *B* với *C* và cuối cùng là *C* với *D*. Chuỗi các liên tưởng càng dài người giải càng phải "lúc lắc cái tráp" hay "lắc cái rây", trong chừng mực mà *D*, định lí phải tìm, chưa bắn ra ngoài.

Ta có thể xem thao tác "lúc lắc cái tráp" hay "lắc cái rây" là phương thức mô tả ẩn dụ hoạt động trí tuệ ở người giải (xem tiêu đề đầu chương). Ở các chương trên (nội dung được cô đọng ở hình 11.1) chúng tôi cố gắng làm sáng tỏ hoạt động này cụ thể hơn. Ở đây những dạng hoạt động trí tuệ khác nhau, giúp người giải toán cố gắng thiết lập các tiếp cận về liên tưởng được biểu đạt khá xác đáng.

Thực ra, lúc nhận biết một yếu tố, người giải đưa các yếu tố đó vào quá trình biện luận trong đó có những tiếp cận chặt chẽ về liên tưởng với yếu tố này. Mọi yếu tố gắn liền với khái niệm của bài toán, lúc được huy động lại sẽ tạo cơ hội cho người giải tuyển chọn được các yếu tố khác tiếp cận với nó về liên tưởng. Lúc người giải cách li và tập trung vào mọi chú ý vào một yếu tố, anh ta sẽ có nhiều triển vọng tuyển chọn được các yếu tố khác cùng thể loại. Sự phân nhóm lại có thể làm cho các yếu tố gần nhau hơn và các yếu tố này

trong tổ hợp của chúng có khả năng tuyển chọn được qua liên tưởng tới một cái gì đó lớn hơn từng yếu tố riêng lẻ.

Song, chắc sẽ khó làm sáng tỏ được những quá trình tư duy diễn ra trong trí tuệ người giải đơn thuần bằng cách liên tưởng, vì bên cạnh những tuyển chọn do liên tưởng còn có một cái gì khác giúp cho người giải phân biệt được những yếu tố, cái liên hệ và liên hợp, những yếu tố không liên hệ với vấn đề, phân biệt cái cần thiết và không cần thiết, cái có ích và cái không có ích.

BÀI TẬP VÀ CHÚ THÍCH BỔ SUNG CỦA CHƯƠNG 11

1. *Kinh nghiệm của bạn, phán đoán của bạn.* Mục đích cuốn sách này nhằm giúp các bạn hoàn thiện những kĩ xảo trong công tác nghiên cứu. Song, thực ra chỉ có bạn mới có thể tự làm được điều này cho mình. Bạn phải làm sáng tỏ sự khác nhau giữa điều bạn thường làm và điều mà bạn có lẽ cần phải làm. Chương này được viết với mục đích giúp các bạn mổ xẻ tốt hơn điều bạn thường làm.

- Các bài tập 2 - 6 đòi hỏi các bạn minh hoạ những điểm quan trọng nhất của nội dung trên. Trước hết, hãy cố chọn các điều minh hoạ trong kinh nghiệm bản thân, trong việc làm của bạn. Đấy là những giai đoạn, chưa buộc bạn động não, mà có lẽ lại có nhiều triển vọng giúp bạn học hỏi hơn cả. Bạn hãy cố gắng xem xét một cách khách quan xem những điều mô tả trong nội dung trên hay trên hình 11.1 có phù hợp với kinh nghiệm bản thân không.

2. *Huy động.* Bạn hãy hồi tưởng lại quá trình giải các bài toán hình học: có phải quá trình càng tiến lên, các hình với nội dung lúc ban đầu dường như rất kém súc tích, lại càng được bổ sung thêm những yếu tố phụ.

3. *Hiểu thấu.* Bạn có thể nhớ được trường hợp nào, trong đó "vào thời điểm xán lạn", bạn đột nhiên thấy vững tin là lời giải "đã bắt đầu tìm được"?

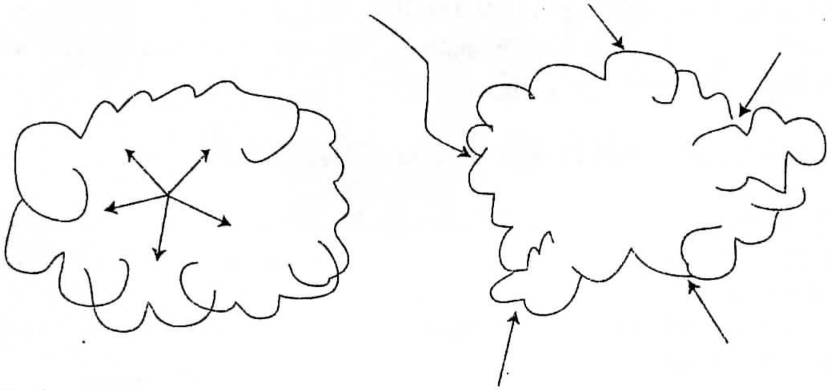
4. *Cái bộ phận gợi ra cái toàn bộ... cái bộ phận càng nhiều, thì hi vọng phục hồi cái toàn bộ càng lớn.* Qua kinh nghiệm bản thân, bạn có thể đồng ý với điều này không?

5. *Nhận biết.* Bạn có thể nhớ được có lúc nhận biết yếu tố nào đó đã là bước ngoặt trong quá trình giải (tức là trường hợp đột nhiên phát hiện được yếu tố nào đó đã biết rõ, nhưng trước đó thì chưa nhận ra)?

6. *Phân nhóm lại.* Bạn có thể nhớ được trường hợp nào sự phân nhóm lại các yếu tố trong hình là chìa khoá giải bài toán.

7. *Công việc từ trong và từ ngoài.* Một trong những bộ phận chủ yếu trong công việc người giải là thiết lập những mối tiếp cận giữa bài toán và kinh nghiệm bản thân đã tích luỹ. Người giải có thể thử phát hiện những mối tiếp cận này "từ trong" hay "từ ngoài". Đứng bên trong biên giới bài toán, anh ta có thể nghiên cứu những yếu tố riêng rẽ của bài cho đến lúc tìm được trong đó một yếu tố có khả năng gợi ra một yếu tố có ích từ ngoài, tức là từ các tri thức đã tích luỹ được. Hoặc có thể đi từ ngoài, tập hợp những tri thức tích luỹ cho đến lúc tìm được một yếu tố có ích cho bài toán phải giải. Lúc nghiên cứu từ

trong, người giải xem xét thật tỉ mỉ bài toán, những bộ phận cấu thành, các khía cạnh của bài toán, nghiên cứu từ ngoài, người giải phân loại vốn tri thức của mình; moi tìm trong mọi xó xỉnh của trí nhớ những điều có triển vọng áp dụng vào bài toán. Những bộ phận bên trái và bên phải hình 11.2 minh hoạ quá trình nghiên cứu bài toán "từ trong" và "từ ngoài".



Hình 11.2. Xuất phát từ trong, hay từ ngoài vào. Dù từ đâu mục đích của ta vẫn là một: chọc thủng, phá tan mây mù

8. *Mê cung phát kiến.* Hình 11.3. có thể biểu đạt chẳng hạn, những con đường mòn vắng vẻ của người đốn củi trên đồi núi và trong rừng, được hình thành chẳng theo kế hoạch nào. *B* là chỗ đi vào, ta cũng có thể coi hình 11.3 là mê cung các con chuột nhắt phải chạy trong một thực nghiệm tâm lí nào đó.

Hình 11.3. Đường mòn, lại đường mòn; ngõ cụt đi vòng rìa ngoài

Nhưng hình 11.3 cũng có thể tượng trưng hình ảnh nào đó của công việc nghiên cứu bài toán ở người giải. Sau khi đã tiến thẳng lên phía trước, lúc ban đầu người giải làm theo con đường mòn quanh co: rồi rơi vào ngõ cụt (có thực hay tưởng tượng). Anh ta lùi lại, đi theo đường cũ một thời gian cho đến lúc đã nhận ra mình đi vòng ngoài rìa; anh ta quay trở lại, tiếp tục cuộc hành trình nhưng lại sa vào một ngõ cụt mới nên buộc phải quay trở lại lần nữa. Cứ như vậy, trong lúc nghiên cứu bài toán, anh ta tiếp tục lần bước; thử đi đường mòn này qua đường mòn khác quay đi quay lại nhiều lần, rút ra được những kết luận mới và cuối cùng tìm ra hướng đi đúng như đã thường đạt được.

9. *Tiến lên phía trước.* Quá trình giải toán càng tiến lên phía trước, sự hiểu biết của người giải về bài toán cũng dần dần thay đổi: cái chính ở đây là anh ta lựa chọn được mỗi lúc một nhiều tài liệu gắn với bài toán. Giả sử, chúng ta giải thiết là chúng ta phần nào biết đánh giá số lượng tài liệu người đã tích luỹ được ở từng thời điểm và có thể ở mức độ nào đó coi các tài liệu này tương ứng với trình độ hiểu biết của người giải về bài toán phải

xét. Tất nhiên, giả định như thế là thô thiển và không thực tế, nhưng sẽ cho phép biểu diễn quá trình giải bài toán bằng đồ thị.

Trong hệ toạ độ hình 11.4 chúng ta biểu diễn thời gian trên trục hoành và trên trục tung "mức độ" hiểu biết của người giải về bài toán ở từng thời điểm. Đường cong biểu diễn sự hiểu biết của người giải như là một hàm số thời gian và biểu đạt trực quan quá trình diễn ra trong trí tuệ người giải.

Giả sử, quá trình giải phát triển có sử dụng đầy đủ những chi tiết tìm được. Trên hình 11.4, điều đó được biểu thị bằng đường cong đi lên - một hàm số liên tục theo thời gian. Đồ thị được bắt đầu (từ bên trái) bằng một đường đi lên với độ dốc nhỏ và hầu như là đều (đoạn chấm chấm). Đoạn này tượng trưng "tiền thái trạng", tức là giai đoạn tiềm thức của quá trình giải. *C*, điểm đầu của đường cong nét liền, chỉ lúc bắt đầu công việc có ý thức. Độ dốc tại mỗi điểm đường cong chỉ tiến độ người giải ứng với các thời điểm. Tiến độ này thay đổi, có giá trị nhỏ nhất tại *D*, là điểm bế tắc (tức thời); tiếp tuyến với đường cong ở điểm này hầu như nằm ngang. Trái lại với tiến độ *I* lớn nhất, ở đây độ dốc cực đại, *I* là điểm uốn, chỉ thời điểm tới hạn ở quá trình phát triển sự suy nghĩ của người giải. Đó là thời điểm cảm hứng (*D* cũng là điểm uốn, nhưng có tính chất ngược lại vì ở *D* độ dốc cực tiểu).

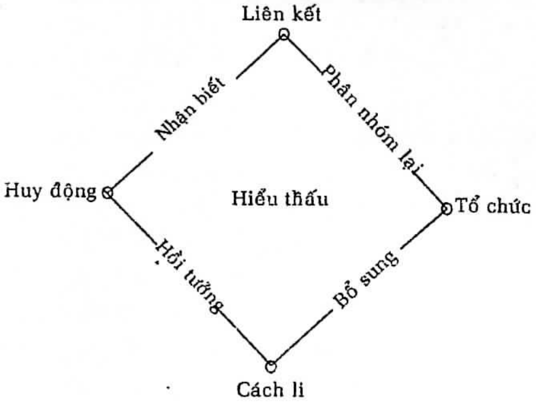
Sự phát triển quá trình này trong trí tuệ người giải là một quá trình phức tạp, chứa đựng vô số khía cạnh không thể kể xiết. Chúng tôi chẳng có tham vọng minh hoạ cặn kẽ tất cả khía cạnh này với hình 11.4, nhưng hình này có thể bổ sung phần nào cho một vài biện luận của chúng tôi trước đây, chẳng hạn có thể bổ sung và làm sáng tỏ theo hướng mỗi điểm cơ bản của hình (xem hình 7.2).

10. *Bạn cũng như tôi*. Những điều tôi biết về quá trình giải toán, có nhiều điểm đã thu được trong lúc nghiền ngẫm một số trường hợp gây ấn tượng sâu sắc. Lúc đọc sách, tranh cãi với bạn bè, mạn đàm với sinh viên hay quan sát nét mặt các thính giả, đột nhiên tôi nhận ra điều gì đó và tha thiết nói với các bạn: " Bạn cũng như tôi, trong rất nhiều trường hợp bạn đã hành động như tôi". Tôi còn nhận thấy cảm giác " Bạn cũng như tôi" cả lúc quan sát hành động các động vật, các con chó, chim, thậm chí có đôi khi cả ở chuột nhắt.

11. *Chuột nhắt và người*.[(*)] Bà chủ nhà bước nhanh ra sân và đặt cái bẫy chuột xuống đất (đây là bẫy kiểu cổ - loại lồng có cửa đóng sập xuống), lớn tiếng bảo con gái đi tìm mèo. Con chuột ngồi trong bẫy dường như đã hiểu rõ sự chuẩn bị này, lồng lộn khắp bẫy, giận dữ húc mạnh vào phía này phía kia và cuối cùng đã chen qua được một khe hở rồi chạy biến vào sân bên cạnh. Rõ ràng, ở chỗ khe hở đó luồng ánh sáng dọi vào đó lớn hơn các chỗ khác. Dường như bà chủ nhà bối rối vì con mèo đến quá chậm. Còn phần tôi, ngay từ đầu tôi đã có cảm tình với con chuột và khó lòng nói được là tôi đồng tâm với chủ

[(*)] Đối với các bạn đọc Mỹ, tên gọi này rất quen thuộc do liên tưởng đến tên cuốn truyện của Stenbéc rất phổ biến ở Mỹ.

nhà hay với con mèo; trong thâm tâm cũng mừng cho chú chuột. Chú đã giải được một bài toán gay go và đã nêu cho ta một tấm gương tốt.



Hình 11.4. Bắt đầu công việc tiềm thức- Chỗ bế tắc - Điểm cảm hứng

Chính con đường giải các bài toán cũng phải như thế! Chúng ta phải thử đi thử lại từ con đường này đến con đường khác, cho đến lúc phát hiện được sự khác biệt ít ỏi giữa "kích thước" các khe hở, tất cả mọi điều đều phụ thuộc vào "kích thước" này. Các con đường chúng ta thử phải đa dạng, muôn vẻ, để có khả năng nghiên cứu bài toán toàn diện. Bởi vì ta không thể biết được cái khe hở độc nhất len qua được, lớn hơn mọi khe hở khác chút ít, nằm ở phía nào.

Phương pháp chủ yếu của chúng ta và của chuột nhắt vận dụng lúc giải toán, chỉ là một. Thử và sai, rồi lại thử và sai lần này đến lần khác, **thử theo nhiều cách dưới nhiều dạng** để không bỏ sót khả năng thuận lợi nào. Tất nhiên phần lớn chúng ta giải các bài toán tốt hơn chuột nhắt. Chúng ta chẳng phải lao cả thân mình vào các chướng ngại vật, vì chúng ta có thể làm được điều đó với trí tuệ, các cách thử, con đường thử của chúng ta phong phú đa dạng hơn nhiều và so với chuột nhắt, qua các thất bại trong lúc thử ta rút ra những bài học bổ ích hơn.

CHƯƠNG 12. KỈ LUẬT TRÍ TUỆ

Phương pháp là sự sắp xếp và chấn chỉnh cái mà những tinh lực trí tuệ của ta phải hướng vào nhằm phát hiện một sự thực nào đó.

ĐỀ-CÁC

Trích "Các quy tắc chỉ đạo của trí tuệ"

§1. PHẢI SUY NGHĨ NHƯ THẾ NÀO?

Ở chương 11, chúng tôi đã dụng ý miêu tả các đặc điểm điển hình của hoạt động trí tuệ của người giải (trong hay ngoài lĩnh vực toán học). Nhưng, phải chăng cái điển hình cũng chính là cái hợp lí? Công việc trí óc có thể diễn ra như thế, nhưng có phải mọi công việc trí óc đều nhất thiết phải diễn ra đúng như vậy hay không?

Do tính chất chung chung của các câu hỏi này, ta khó lòng đưa ra được câu trả lời chỉ có một nghĩa. Song để có thể chỉ ra khuynh hướng của chương, các câu hỏi đó lại rất cần. Xuất phát từ kinh nghiệm trong công việc trí óc của người giải chương 11, chúng tôi cố gắng liệt kê những thao tác trí tuệ (các bước, trình tự,...) thường có ích cho ta lúc giải toán, đồng thời cố gắng chỉ ra vị trí từ thao tác trong quá trình này.

Cũng như trước đây, chúng tôi sử dụng các câu hỏi, những chỉ dẫn "tiêu chuẩn" để diễn đạt ngắn gọn và cô đọng các thao tác có ích này. Cần trình bày các bạn rõ, những câu hỏi và chỉ dẫn tương tự được diễn đạt theo hai cách: hoặc dưới dạng những trích dẫn trong lời nói của người giải với chính mình hoặc các lời trao đổi giúp đỡ học sinh của một thầy giáo giàu kinh nghiệm(*).

§2. TẬP TRUNG CHÚ Ý VÀO MỤC ĐÍCH

Lúc phải giải một bài toán, bạn thường hay nghĩ đến bài đó và thậm chí có thể bài đó thường xuyên ám ảnh bạn. Song, bạn không được suy nghĩ hời hợt - suy nghĩ chung chung như người ta nói - mà phải luôn luôn suy nghĩ đến bài toán của mình, hình dung bài đó trong một khuôn khổ minh bạch và trước hết phải tự đặt cho mình câu hỏi: *Yêu cầu cái gì?*.

Trong quá trình giải toán, chắc bạn sẽ gặp nhiều trường hợp thích hợp với câu hỏi trên. Lúc nào bạn đã quá sa đà vào một trong những con đường chỉ đưa bạn chạy quanh ngoài rìa, rốt cuộc, có thể chỉ là ngõ cụt hay lối đi làm bạn lạc đường, lúc nào suy nghĩ

(*) Bạn đọc nên so sánh nội dung chương này với những đoạn tương ứng trong cuốn "Giải một bài toán như thế nào?", mục "Ý nghĩa của các bảng". Nhưng câu hỏi và chỉ dẫn "tiêu chuẩn" mà tôi coi là một yếu tố cơ bản trong phương pháp của mình, đã được trình bày lần đầu tiên trong một bài toán của tôi.

của bạn bắt đầu tản mạn, dao động, thì lúc ấy, điều rất quan trọng đối với bạn là, một lần nữa đặt cho mình câu hỏi: *Yêu cầu cái gì?* - và một lần nữa hướng mọi chú ý của mình vào mục đích.

Đích bài toán phát hiện là ẩn số. Để có thể tập trung chú ý vào đích này, bạn hãy tự hỏi: *"Ẩn số là gì?* Đích bài toán chứng minh là kết luận, là sự suy diễn - trường hợp này, câu hỏi thích hợp sẽ có dạng: *Kết luận là gì?*

Ngay sau khi bạn bắt đầu phân biệt được rõ ràng đích bài toán, tức là đối tượng phải tìm, cần tiến hành điểm lại tất cả những điểm đã nắm được để có thể dựa vào đó tách ra những cái có khả năng giúp bạn đạt được mục đích; như vậy bạn phải tự hỏi: *Mình đã có những gì?*

Chẳng hạn, lúc bạn muốn thiết lập mối liên hệ giữa hai yếu tố, xây dựng cho mình con đường đi từ yếu tố nọ sang yếu tố kia, thì việc lần lượt xem xét các yếu tố ấy có thể giúp ích gì cho bạn: bắt đầu từ một yếu tố, rồi chuyển sang yếu tố khác, thường ở đây bạn có điều kiện đặt ra những câu hỏi đã nêu ở trên: *Yêu cầu cái gì? Ta đã thu được gì?*

Những câu hỏi thường vận dụng ở các bài toán phát hiện là: *Ẩn số là gì? Cái gì đã cho? Điều kiện là gì?* Với bài toán chứng minh, các câu hỏi thích hợp sẽ là? *Kết luận là gì? Điều kiện đủ (cần) là gì?*

Tại các câu hỏi này lại quan trọng đến thế? Bởi vì các câu ấy sẽ làm cho ta chú ý đến các yếu tố nêu trong bài toán. Theo Đề-các (xem trích dẫn ghi đầu chương), phương pháp giải toán là làm thế nào để hướng sự chú ý của mình lần lượt vào tất cả các yếu tố liên quan tới vấn đề, theo một trình tự thích đáng. Chúng ta đã rõ những phần chính của bài toán "phát hiện" (ẩn số, dữ kiện và điều kiện) và các phần chính bài toán "chứng minh" (kết luận và điều kiện đủ (điều kiện cần) là những yếu tố có quan hệ với vấn đề). Đôi lúc, các yếu tố này quan trọng đến mức nghiên cứu chúng càng sớm càng tốt và sau khi đã thấu hiểu được bài toán trong toàn bộ, chú ý ngay những phần chính của bài.

§3. ĐÁNH GIÁ CÁC TRIỂN VỌNG

Người giải nghiên cứu nghiêm chỉnh bài toán của mình sẽ cảm nhận được sâu sắc những cái mốc sát cạnh đích và tốc độ quá trình tiến hành tới đích, đồng thời cũng cảm nhận sâu sắc được mọi biến chuyển ảnh hưởng đến triển vọng của kế hoạch đã đề ra. Nhưng đôi lúc cũng nên vượt ra ngoài ít nhiều những điều chỉ mới là cảm giác, đánh giá tỉnh táo hơn các con đường có khả năng đưa tới đích, "chuẩn đoán" bài toán và đánh giá các triển vọng minh mẫn hơn. Chính đấy là khuynh hướng của những câu hỏi nêu sau đây.

Có một số bài toán bị bế tắc. Nếu gặp một bài như vậy, bạn đừng để bị lôi cuốn quá sâu vào bài đó và hãy tự hỏi: *Nói chung, có trả lời được câu hỏi nêu ra không? Có đưa ra được một câu trả lời rõ ràng, hợp lí hay không? Nếu quả có câu trả lời, ta có tìm được không?*

Nếu là bài toán "phát hiện", chúng ta nên hỏi: *Có lời giải hay không?* Có thể nêu những câu hỏi tỉ mỉ hơn nữa? *Chỉ có một lời giải độc nhất hay chẳng có lời giải nào cả? Điều kiện để xác định ẩn số đã đủ chặt chẽ chưa, hay quá thừa hoặc quá thiếu?*

Với những bài toán "chứng minh", các câu hỏi thích hợp sẽ là: *Định lí đúng hay sai?* Có thể nêu chi tiết hơn: *Định lí có đúng hay không? Tính chính xác của định lí có cần những yêu cầu gì nữa không, để điều kiện được vững chắc hơn? Định lí có được phát biểu chính xác không? Với điều kiện kém chặt chẽ hơn, có đủ cho định lí là chính xác không?...*

Thực ra, trước lúc công việc hoàn thành, nghĩa là bài toán chưa giải xong, chúng ta không thể đưa ra một câu trả lời xác định cho bất kì câu hỏi nào mới nêu trên. Nhưng do bản chất của chúng, các câu trả lời này không đòi hỏi phải được xác định chặt chẽ mà chỉ cần có tính chất giả định, phỏng đoán. Qua mày mò, mà phỏng đoán đúng đắn, ta có thể có được một quan điểm chính xác về bài toán đang khảo sát và đây là yêu cầu ta cần cố gắng đạt được. Các câu hỏi trên phát biểu dưới hình thức ngắn gọn thường sử dụng trong hỏi đáp, hội thoại. Nêu ra những câu hỏi như sau sẽ thận trọng hơn (và chính xác hơn): *Bài toán có câu trả lời hay là lời giải không?* (khả năng đó có không và có lớn không?). Định lí đã phát biểu có thể đúng, có thể sai: *nhưng khả năng nào lớn hơn?*

Vào đúng thời điểm nào, chúng ta phải nhanh chóng bắt đầu đặt ra nhưng câu hỏi giống như thế? Về điểm này, chẳng có (không thể có, chắc không có) một quy tắc nào thật chặt chẽ và có hiệu quả, những câu hỏi này thường rất hay được nêu ra tiếp sau những câu hỏi về các phần chính của bài toán đã nói trong §2.

§4. THĂM DÒ: TÌM CÁCH THỨC XỬ LÍ

Đích cuối cùng nêu trong bài toán sẽ gợi ý cho ta các biện pháp; việc nghiên cứu đích này (ẩn số, kết luận) có thể giúp ta tìm được biện pháp giải bài toán ấy. Chúng ta đã biết, một câu hỏi sẽ làm nảy sinh câu hỏi khác: *Yêu cầu cái gì? Ẩn số là gì? Có thể tìm được ẩn số tương tự bằng cách nào? Các dữ kiện phải thế nào để có một ẩn số như thế?* Chính những câu hỏi này có thể là khởi điểm của phương pháp "đi theo hướng ngược trở lại". Ví dụ, nếu tinh ý biết phân biệt được những "dữ kiện" cho phép tìm ra ẩn số, thì ta có thể lấy các dữ kiện đó làm cái đích "trung gian" giúp ta xây dựng được bài toán phụ và như vậy là đã bắt đầu tiến trình đi ngược từ điểm cuối tới khởi điểm (xem điểm 2, bài tập 1, chương 8).

Gặp bài toán chứng minh, ta sẽ nêu những câu sau: *Yêu cầu những gì? Kết luận là gì? Làm thế nào để có một kết luận như thế? Có thể rút ra được kết luận tương tự như thế từ điều kiện (điều kiện cần) nào?*

Thay cho việc làm thế nào để có thể tìm được ẩn số (hay sự suy diễn của định lí), chúng ta tập trung chú ý các dữ kiện (hay điều kiện) qua các câu hỏi: Đã cho cái gì? Những dữ kiện như thế có thể giúp ích cho điều gì? Có thể suy ra cái gì từ các dữ kiện như vậy? Các câu hỏi này có thể là điểm xuất phát của phương pháp "theo hướng đi xuôi"

(xem bài tập 1, chương 8; bạn cần nhớ là ở đây, nói chung, việc xây dựng kế hoạch giải các bài toán theo hướng ngược nên có trước kế hoạch theo hướng xuôi).

Tiếc thay, thường chúng ta không xây dựng được những kế hoạch đúng yêu cầu - cả kế hoạch tiến hành theo hướng đi ngược cũng như kế hoạch dựa trên hướng đi xuôi. Gặp trường hợp này, chúng ta sử dụng các câu hỏi dự trữ có khả năng giúp ta tìm được phương pháp giải bài toán. Dưới đây là một câu hỏi đó (có thể nêu ngay từ đầu vẫn đem lại kết quả): Bài toán đang xét thuộc loại nào? Có gần gũi với bài toán nào biết? Có giống bài toán quen thuộc nào không? Cố gắng phát hiện được mối liên hệ hay sự giống nhau giữa các bài toán này với bài toán đã biết, ta có thể nhớ ngay được một phương pháp quen thuộc phù hợp với bài toán đang xét và nếu được như thế, rõ ràng quãng đường đi ban đầu này có khả năng dẫn ta đến lời giải.

Nếu cố gắng tìm ra được một "bài thân thuộc" với bài toán đang xét, ta sẽ phát hiện ngay được những mối liên hệ (các "quan hệ họ hàng") giữa các bài này, các mối liên hệ đó rất có ích cho chúng ta: *Bạn có biết bài toán có quan hệ thân thuộc với bài đang xét? Bạn có nghĩ ra được bài toán nào gần gũi với bài toán này không? Một bài tương tự? Một bài tổng quát hơn?* Một bài thuộc phạm vi hẹp hơn, song điều đáng ngại là những câu hỏi tương tự như trên có thể dẫn ta đi lệch phương hướng, vì vậy, để cho có lợi hơn, thông thường ta nêu các câu hỏi này ít lâu sau khi bản chất bài toán đã nhận thức được rất sáng tỏ và khắc sâu trong ý thức chúng ta, nghĩa là lúc không còn lo ngại xa rời bài toán một cách hữu ý và mất hút bài toán.

§5. THĂM DÒ: BÀI TOÁN CÓ CHĂNG MỘT KHÍA CẠNH NHIỀU TRIỂN VỌNG HƠN?

Lúc chuẩn bị làm một công việc chân tay (chẳng hạn khi định cưa các nhánh cây), bạn sẽ tự động chọn một vị trí làm việc thuận lợi nhất. Lúc giải toán, dù là bài toán nào, bạn cũng nên xử sự giống như thế: bạn phải cố gắng chiếm được một vị trí như thế nào để có thể tiếp cận bài toán ở phía thuận lợi nhất, dễ dàng nhất. Bạn cần suy nghĩ chín chắn, lật đi lật lại bài toán dưới mọi khía cạnh ở trong đầu mình; cố thử dừng nhìn bài toán ở phía dường như gần gũi hơn. Khía cạnh bài toán mà bạn dựa vào để xem xét nghiên cứu lúc đầu có thể không phải là thuận lợi nhất. Phải chăng đã diễn đạt bài toán đơn giản, sáng tỏ, "gợi ý" đến mức cao nhất? *Bạn có trình bày được bài toán khác đi không?*

Tóm lại, bạn muốn diễn đạt bài toán tốt hơn, (cải biến thành một bài toán tương đương) để bài toán trở thành quen thuộc hơn, hấp dẫn hơn, dễ hiểu hơn, nhiều triển vọng hơn.

Mục đích là để có thể phá bỏ được sự ngăn cách giữa cái bạn đang cần và cái bạn đã có, giữa ẩn số với dữ kiện, kết luận với điều kiện (giả thiết). Có thể thay đổi được hay không phương thức diễn đạt bài toán như thế nào để ẩn số và dữ kiện, điều kiện và kết luận dường như *tiến sát lại nhau hơn?*

Bạn hãy biến đổi dạng của kết luận hoặc điều kiện hoặc đồng thời cả hai, nhưng phải biến đổi như thế nào để chúng gần gũi nhau hơn. Bạn hãy biến đổi ẩn số hay dữ kiện (điều

kiện) của bài toán, hay thậm chí toàn bộ cả bài, nhưng phải tiến hành như thế nào để ẩn số và các dữ kiện gần nhau hơn trước.

Quá trình giải càng tiến hành lên phía trước, trên hình đang khảo sát lại càng xuất hiện thêm những đường nét mới; cấu trúc hình thành trong đầu người giải lại được bổ sung thêm những chi tiết, những mối liên hệ mới. Mỗi cải biến đều có thể đưa thêm vào bài toán các yếu tố mới. Một trong những phương thức quan trọng đưa tài liệu mới vào quan niệm của chúng ta về bài toán là *trở về các định nghĩa*.

Có thể lấy trường hợp hình nón cụt là ví dụ (như trong chương 7). Hình chóp cụt là gì? Nó được định nghĩa như thế nào? Hình chóp cụt là phần còn lại của hình chóp nguyên, lúc cắt hình chóp nguyên bằng một mặt phẳng song song với đáy và có thể tích nhỏ hơn hình chóp nguyên. Định nghĩa này dẫn tới việc khảo sát hai vật thể mới: Hình chóp nguyên và hình chóp nhỏ - và như vậy kết luận rút ra từ một trong hai hình chóp này hay đồng thời từ cả hai có thể có lợi cho quan niệm chúng ta về bài toán(*).

Trong lúc quay trở về định nghĩa những yếu tố có trong điều kiện của bài toán, ta đã đưa vào những yếu tố mới và các yếu tố mới này kéo theo những yếu tố mới khác. Tiếp tục hành động theo tinh thần này, càng về sau, quan niệm của chúng ta về bài toán càng mở rộng. Quá trình mở rộng điều kiện bài toán như thế thường đưa chúng ta tiến đến gần lời giải bài toán hơn, tuy rằng không phải điều đó bao giờ cũng xảy ra, đôi lúc chỉ chất vào bài toán những chi tiết không cần thiết.

Để cải tiến các điều kiện của bài toán, có nhiều phương pháp đáng lưu ý, trong đó, bên cạnh những phương pháp có thể áp dụng tương đối phổ biến, có một số chỉ thích hợp với vài trường hợp riêng (xem bài tập 1, 2 dưới đây).

§6. THĂM DÒ: TÌM NHỮNG KIẾN THỨC CÓ ÍCH

Quá trình giải một bài toán phụ thuộc chủ yếu vào việc thiết lập mối liên hệ giữa bài toán đó với những kiến thức thích hợp tích luỹ được từ trước. Lúc chúng ta cố gắng tìm cách diễn đạt lại bài toán, dưới một hình thức nhiều triển vọng hơn, thực chất là đi tìm mối liên hệ ấy, trong đó ta lấy chính bài toán làm điểm xuất phát, cố gắng chọc thủng mây mù bao quanh và nghiên cứu bài đó "từ trong", song còn có thể tìm được liên hệ này từ một hướng khác, bằng cách cố gắng tìm một kiến thức có ích nào đó ở bên ngoài, nghĩa là tiến lại gần bài toán "từ ngoài", như người ta nói.

Điểm lại toàn bộ tri thức đã tích luỹ được lúc này lúc nọ là điều quá sức. Vì vậy nên bắt đầu xem xét những lĩnh vực tri thức có khả năng có liên hệ với bài toán đang xét nhiều hơn.

Nếu bài toán thuộc lĩnh vực quen thuộc, bạn cần biết được những "điểm chìa khoá", tức là những sự kiện có khả năng được sử dụng nhiều nhất. Bạn hãy chuẩn bị các tri thức ấy như người công dân tốt chuẩn bị dụng cụ đồ nghề của mình, nói một cách khác, là phải chuẩn bị như thế nào để chúng nằm trong tầm tay.

(*) Xem Giải một bài toán như thế nào?- Các định nghĩa.

Nếu đó là bài toán phát hiện, bạn sẽ đặc biệt chú ý đến những bài cùng ẩn, có thể trong các bài đó sẽ là điểm xuất phát của quá trình đi ngược lại (xem chương 8). Với bài toán chứng minh, cần đặc biệt lưu ý đến những định lí có cùng kết luận như định lí bạn quan tâm, vì chúng có thể được sử dụng làm điểm xuất phát.

Ở đây có những sự kiện nào là điểm chìa khoá? Có bài toán nào (may mắn đã giải rồi) có ẩn giống thế? Có định lí nào (may mắn trước đây đã chứng minh) có cùng kết luận? Các câu hỏi này có nhiều triển vọng sẽ giúp bạn rút ra được một yếu tố có ích trong vốn tri thức đã tích luỹ. Hãy bắt đầu bằng các câu hỏi trên, nếu bạn muốn thu lượm và tập hợp tất cả những gì cần thiết để giải bài toán. Nếu chưa đạt được kết quả, có thể bạn hướng đến những sự kiện phức tạp hoặc tinh tế hơn hoặc những bài giải rồi có cùng một yếu tố nào đó với bài toán đang xét, hoàn toàn không nhất thiết với yếu tố ấy là ẩn hay kết luận. Chắc chắn trong vốn kiến thức của bạn có những yếu tố có thể vận dụng vào bài toán, nhưng chúng liên hệ với bài toán ra sao? Khai thác chúng như thế nào? Bạn có thể lần lượt vận dụng biện pháp khái quát hoá, cá biệt hoá, tương tự hoá. Bạn có thử lục lọi tất cả những tri thức nằm trong lĩnh vực gắn liền với bài toán, nhất là lúc lĩnh vực đó ở bạn chẳng rộng lớn lắm.

Tóm lại, tri thức của bạn càng rộng, càng có hệ thống, bạn càng có nhiều triển vọng tìm được những yếu tố cần thiết (xem bài tập 4).

§7. THĂM DÒ: CÓ THỂ LÀ CẦN ĐÁNH GIÁ LẠI TÌNH HÌNH CHĂNG?

Chẳng hạn, bạn chưa hài lòng với cung cách tiến triển của công việc. Những ý khác nhau xuất hiện trong đầu bạn đều bị đánh bại, những con đường mà bạn đã thử tuy muôn màu muôn vẻ, rút cuộc đưa bạn đến ngõ cụt. Lúc đó, cái hình bạn đang chăm chú khảo sát, toàn bộ quan niệm của bạn về bài toán đang ở trạng thái rắc rối, tối tăm, chồng chất quá nhiều chi tiết nhưng lại không đầy đủ, đang thiếu một yếu tố cơ bản, một mắt xích quan trọng nào đấy.

Có thể tai hoạ này là do những con đường bạn đã điều tra khảo sát đều chạy ngoài rìa, đều là những ngõ cụt, nên đã vất vả khổ sở vì những tài liệu chẳng liên quan tới vấn đề. Hãy thử quay trở lại khái niệm ban đầu, chưa tô vẽ thêm: xem xét lại lần nữa ẩn, các dữ kiện và điều kiện của bài, điều kiện cần và kết luận, rồi tự hỏi: *Đã chú ý đầy đủ tất cả điều kiện chưa? Đã sử dụng tất cả các dữ kiện chưa? Đã sử dụng tất cả các dữ kiện chưa?* Tất cả các bộ phận của bài có được sử dụng hết không?

Những câu hỏi này quả là đúng lúc nếu từ trước bạn đã tin tưởng rằng để xác định được ẩn nhất thiết bạn phải cần đến tất cả các dữ kiện và tất cả các phần trong điều kiện của bài hoặc để rút ra được kết luận bạn cần đến tất cả điều kiện cần. Thậm chí tuy chưa có lòng tin đến thế, bạn còn nghi ngờ cho là có thể tất cả các dữ kiện, các điểm trong điều kiện hay điều kiện cần mới chỉ là chủ yếu, thì những câu hỏi giống như trên vẫn xác đáng và có thể giúp ích cho bạn. Các câu hỏi này sẽ nhắc nhở bạn, cần phải thử sử dụng dữ kiện hay điểm nào đó cho đến nay bạn đã quên khuấy đi mất và nhờ đó, bạn có thể phát hiện ra khâu đã thiếu.

Tai hại có thể là ở chỗ bạn chưa hình dung được đầy đủ, minh bạch ý nghĩa các thuật ngữ cơ bản có trong điều kiện của bài toán. *Bạn đã hiểu rõ hay chưa (đã hình dung rành mạch hay chưa) tất cả các khái niệm - những bộ phận không thể tách rời bài toán?* Câu hỏi này có thể sẽ thúc đẩy bạn *quay trở lại các định nghĩa một số khái niệm,* do đó có thể làm bạn nghĩ đến việc mở rộng khái niệm về bài toán, có triển vọng giúp bạn diễn đạt điều kiện trong bài khá hơn và tìm được những yếu tố mới có ích.

§8. NGHỆ THUẬT NÊU CÂU HỎI

Các chương trên, chúng tôi đã nêu khái quát những thao tác tư duy hay những "bước" suy nghĩ điển hình của người giải. Lúc mô tả mỗi bước này, chúng tôi đều đưa ra câu hỏi (hay lời khuyên in nghiêng) để có thể diễn đạt rất cô đọng từng bước cụ thể, thể hiện bước đó bằng hình ảnh thu nhỏ(*). Hiểu được người giải (hay thầy giáo) có thể sử dụng các câu hỏi này như thế nào, là điều quan trọng.

Mỗi câu hỏi đã diễn ra ở trên, nếu được đưa ra đúng lúc đúng chỗ, có thể gợi cho ta một câu trả lời đúng, một ý nghĩa chính xác, một phương hướng tốt trong suy nghĩ. Đó là những nhân tố có khả năng đẩy quá trình giải toán tiến lên phía trước. Như vậy, câu hỏi có thể giữ vai trò chất kích thích (các nhà toán học gọi là "chất xúc tác") làm cho phản ứng đang mong đợi nhanh chóng diễn ra. Những câu hỏi có nội dung như thế, dường như là những *máy phát cỡ nhỏ* sản xuất ra các ý nghĩ.

Tất nhiên trong một số trường hợp, có thể ta không biết chính câu nào cần nêu ra. Song, mỗi khi tuy đã hết sức cố gắng vẫn không đi đến một câu hỏi có ích, thì bạn có thể lần lượt xem đi xem lại từng câu hỏi. Bạn có thể sử dụng các mục nhỏ trên như là bản *danh mục* các câu hỏi thích hợp, như là *bản mục lục các câu hỏi kiểm tra.*

Nhưng, không được sử dụng bản mục lục ấy không theo một trình tự nào cả, lựa chọn hú hoạ các câu hỏi, cũng như sử dụng một cách máy móc, xem từng câu hỏi theo một trình tự cứng nhắc. Đối với bản mục lục này, bạn hãy hành động như người công nhân có kinh nghiệm sử dụng *hợp lí dụng cụ đồ nghề* của mình lúc sản xuất. Người công nhân đó sẽ lựa chọn dụng cụ sau khi đã cẩn thận nhìn khắp lượt công việc được giao. Có thể, để chọn đúng yêu cầu bác ấy phải thử một vài dụng cụ, nhưng cả trường hợp này cũng không lấy dụng cụ ra khỏi hộp một cách hú hoạ hay theo một thứ tự máy móc; bác ấy chọn chúng một cách *có ý thức*. Việc lựa chọn câu hỏi trong vô số câu đã nêu ra trong chương này cũng phải tiến hành đúng như thế.

Tất nhiên, người công nhân nắm vững kĩ thuật nhanh hơn nhờ có kinh nghiệm lâu năm và biết quan sát chu đáo việc làm của người khác. Cả bạn cũng có thể học vận dụng các câu hỏi ở đây bằng con đường như thế. Tuy không có quy tắc chặt chẽ, cứng rắn chỉ đạo việc sử dụng những câu hỏi này, song nếu kèm theo các câu hỏi này bạn có kinh

(*) Các câu hỏi thuộc những bài toán phát hiện, đã được dẫn ra trong cuốn "Giải một bài toán như thế nào?". Bạn đọc nên nghiên cứu kĩ những câu này và cả phần giải thích minh hoạ.

nghiệm cá nhân đã rút ra được qua những thành công và thất bại và nếu như bạn hiểu cặn kẽ, đầy đủ đích bạn phải tiến đến, thì có nhiều triển vọng bạn sẽ chọn được câu hỏi tốt.

CÁC BÀI TẬP VÀ CHÚ THÍCH BỔ SUNG CHƯƠNG 12

1. Thay đổi phương thức diễn đạt bài toán.

Đích các bài toán là làm thế nào để chứng minh (hay phủ định) một sự xác nhận: "Nếu *A* đúng, *B* sẽ đúng". Đôi lúc sẽ có lợi nếu ta biến dạng bài toán và thử chứng minh (hay phủ nhận) bài toán tương đương sau: "Nếu *B* sai *A* sẽ sai" (xem bài tập 10 chương 9).

Dưới đây cũng là tình huống tương tự. Chẳng hạn, trong một bài toán phát hiện, gọi x là ẩn số và $a, b, c,\ldots l$ các dữ kiện (những dữ kiện và ẩn số này là số đo các yếu tố một hình hình học chẳng hạn). Thay đổi vai trò giữa ẩn số x với một trong các dữ kiện, chẳng hạn a, có thể có ích. Với cách làm này, ta đã chuyển từ bài toán ban đầu sang bài toán mới có ẩn số a và các dữ kiện $x, b, c,\ldots l$ (xem các bài tập 34, 35 và 36 chương 2).

Chúng ta xét ở đây hai kiểu cải biến, không lệ thuộc vào nội dung cụ thể vấn đề khảo sát. Việc nghiên cứu các kiểu cải biến này nhất thiết có liên hệ với thuật toán phát minh.

2. Diễn đạt bài toán bằng ngôn ngữ toán: Có thể rút gọn rất nhiều sự diễn đạt của Đề-các về dự án lớn lao của ông ta, đã bàn ở mục 1, chương 2, bằng một lời khuyên ngắn gọn: "Dẫu bài toán là gì bạn cũng biến đổi thành một bài toán học, diễn đạt bài toán ấy dưới dạng các phương trình đại số". Dự án của Đề-các không thực hiện, song, vẫn có thể phục hồi lại nếu chúng ta dừng lại ở góc độ khái quát: "Diễn đạt bài toán bằng ngôn ngữ toán".

Tất nhiên, hiệu quả lời khuyên này tuỳ thuộc mức độ phong phú về ngôn ngữ toán học của bạn. Ví dụ, nếu bạn viết và có thể sử dụng không những các kí hiệu đại số như Đề-các mà cả phép tính vi phân và đạo hàm, thì số lượng bài toán có khả năng biến đổi được sẽ tăng lên nhiều.

Khái niệm "ngôn ngữ toán", theo nghĩa rộng nhất có thể bao gồm mọi dạng cấu tạo lôgic tương đối rõ ràng khúc triết. Với quan niệm rất rộng như vậy, lời khuyên "diễn đạt bằng ngôn ngữ toán" về mặt lí luận rất hoàn chỉnh, nhưng trong thực tế có thể là viển vông, vì câu này chỉ có thể có nghĩa. "Hãy cố gắng đạt được tính sáng sủa ở mức cao"(*).

Tuy nhiên, nếu giải thích hẹp hơn ít nhiều và ở một mức độ nào đó, lời khuyên này thường có ích. Các đồ thị, biểu đồ hay các hình hình học cũng là một trong những biến thể của ngôn ngữ toán. Vẽ phác các hình, diễn đạt một bài toán bằng ngôn ngữ dựng hình

---

(*) "Ngôn ngữ kí hiệu" của lôgic toán hiện đại, mà việc tạo ra luôn luôn gắn với tư tưởng Lép-nít về "phương pháp phức hợp" đã nhiều lần nhắc tới trong cuốn này, là bộ phận quan trọng của "ngôn ngữ toán" hiểu theo nghĩa rộng của thuật ngữ (một số nhà toán học thậm chí có khuynh hướng coi khái niệm "ngôn ngữ toán" và "ngôn ngữ kí hiệu" như nhau). Song, trong cuốn này hầu như chưa đề cập đến biến thể này của "ngôn ngữ toán" (tuy nhiên bạn hãy so sánh với phần trình bày ở chương 14 dưới đây), bởi vì toàn bộ cuốn sách này được viết trong thời kì môn lôgic toán chưa phát triển và chưa diễn ra những tranh luận rộng rãi về vai trò của lôgic toán và các kí hiệu của lôgic toán trong phương pháp luận và phương pháp luận toán học như hiện nay.

thường giúp ích cho ta. Có một số người thường cảm thấy rất cần thể hiện ý nghĩ của mình bằng các kí hiệu hình học (đối chiếu với bài tập 9 chương 14).

3. Hãy chứng minh mệnh đề sau: Nếu cạnh một tam giác nhỏ hơn trung bình cộng hai cạnh kia, thì hai góc đối của cạnh này sẽ nhỏ hơn trung bình cộng hai cạnh kia.

(Các phần chính của bài toán như thế nào? Hãy sử dụng kí hiệu của lượng giác sơ cấp để diễn đạt các phần này bằng ngôn ngữ toán).

4. Vốn tri thức được hình thành tốt và được tổ chức tốt là một nhân tốt tích cực quan trọng đối với người giải toán. Tổ chức vốn kiến thức này để tạo điều kiện lĩnh hội dễ dàng các kiến thức còn quan trọng hơn là vấn đề trình độ các kiến thức ấy. Những tri thức thừa đôi lúc trở thành có hại, ngăn cản người giải tìm được cách giải đơn giản, còn vốn tri thức tổ chức tốt trong bất kì trường hợp nào cũng có ích. Trong vốn tri thức tổ chức tốt, những điều được sử dụng nhiều thường sắp xếp ở những vị trí dễ dàng huy động nhất. Các điểm hay sử dụng chung được ghi nhớ cùng với nhau, việc đánh dấu và sắp xếp trình tự được cấu trúc như thế nào để có thể tập hợp một cách dễ dàng những điểm có quan hệ với nhau (tập hợp thành những cặp hay từng khối lớn).

Tất nhiên, một thư viện hay hộp dụng cụ sắp xếp đều có lợi, nhưng việc "sắp xếp" hợp lí các tri thức trong trí nhớ của chúng ta có thể mang lại nhưng lợi ích vô cùng lớn hơn nhiều. Bây giờ chúng ta chuyển sang bàn một số vấn đề quan trọng đối với người giải trong việc tổ chức.

1) Trong mọi vấn đề cụ thể, luôn luôn có những sự kiện chìa khoá (các bài toán, các định lí chìa khoá) cần được ghi lại trong ô phía trước của tủ trí nhớ. Lúc bắt tay làm toán thì gần ta nhất, ở trong tầm tay chúng ta phải có một số sự kiện chìa khoá - đúng như một người thợ có kinh nghiệm sắp đặt các dụng cụ thường sử dụng nhiều nhất tại những nơi lấy được thuận lợi nhất.

Chẳng hạn, bạn định chứng minh một mệnh đề trong hình học phẳng theo tinh thần Ơ-clít, tất nhiên các dấu hiệu của ba trường hợp bằng nhau và ba trường hợp đồng dạng của tam giác là những sự kiện chìa khoá phải khảo sát. Nếu bạn định đưa bài toán thuộc hình học phẳng về một hệ phương trình theo tinh thần Đề-các (xem chương 2), bạn có thể gọi định lí Pi-ta-go và định lí các đoạn thẳng tỉ lệ trong các tam giác đồng dạng là những sự kiện chìa khoá. Bạn cũng chọn các sự kiện chìa khoá một cách tương tự trong các bài toán khác thuộc những loại tương đối phổ biến.

2) Dưới đây là hai câu hỏi quen thuộc đã đưa lại lợi ích cho người giải không biết bao nhiêu lần. Với các dữ kiện như thế nào thì ta có thể xác định một ẩn số giống như vậy? Có thể rút ra kết luận như thế từ điều kiện (điều kiện cần) gì? Vì các câu hỏi trên rất hay sử dụng, nên phải chú ý làm thế nào để "ghi nhớ được đồng thời" các bài toán đã giải có những ẩn số cùng loại như các định lí cùng kết luận.

3) Bạn có biết rõ thành phố bạn đang sinh sống không? Nếu quả bạn rất thông thuộc, bạn phải biết chọn được con đường ngắn nhất nối hai địa điểm nào đó trong thành phố và biết dùng phương tiện giao thông gì sẽ thuận lợi nhất. Chính đây cũng là điều mà việc tổ

chức các tri thức phải đạt được; làm việc trong lĩnh vực nào, bạn cũng biết tìm được mối liên hệ thức sự thuận lợi nối hai điểm bất kì.

Việc tổ chức tốt các tri thức có thể giúp ta nhìn được khái quát những bài toán gần nhau. Ví dụ, trong phần đầu cuốn này có những bài toán được khảo sát với một quan điểm rộng rãi, bài nọ gắn liền với bài kia do tính đồng nhất trong cách giải. Chúng ta cũng có thể khảo sát những nhóm bài có tính đồng nhất về ẩn số, về dữ kiện hoặc tương tự với nhau về mặt nào đó.

Như bạn đã biết, ngoài bộ "nguyên lí", Ơ-clít còn viết về một số sách khác, đó là cuốn "Các dữ kiện", có chứa một tổng quan về những dữ kiện xác định các đối tượng hình học. Theo tôi, tôi tin là Ơ-clít viết cuốn "Các dữ kiện" để giúp người giải biết cách lựa chọn các kiến thức hình học. Nội dung được trình bày với hình thức dễ hiểu và dành cho các bạn đọc thường tự đặt cho mình câu hỏi: Có thể xác định ẩn số giống như thế với các dữ kiện gì?

5. Có thể xác định những ẩn tương tự bằng các dữ kiện? Bạn hãy tìm những bài toán đơn giản nhất có ẩn diễn đạt bằng một trong các câu dưới đây:

1)........ tìm điểm P;

2)........ tìm chiều dài đoạn thẳng AB;

3)........ tìm diện tích tam giác ABC;

4)........ tìm diện tích khối tứ diện $ABCD$ (các chữ cái A, B, C, D, P theo quy ước, chỉ các điểm).

6. Có thể rút ra kết luận như vậy từ điều kiện (điều kiện cần) gì? Hãy liệt kê những định lí hình học phẳng đơn giản nhất có kết luận trùng với một trong những kết luận dưới đây:

1)........ thì $AB = EF$;

2)........ thì $ABC <= EGF$;

3)........ thì $AB : CD = EF : GH$;

4)........ thì $AB < AC$,

(các chữ cái A, B, C đều chỉ các điểm).

7. *Những tín hiệu có quan hệ với vấn đề đang khảo sát.* Nếu một tứ giác có cạnh a, b, c, d và diện tích S, đồng thời là nội tiếp và ngoại tiếp (nội tiếp trong một đường tròn và ngoại tiếp là đường tròn khác), ta sẽ có: $S^2 = abcd$.

(Chứng minh mệnh đề này dễ hay khó tuỳ theo bạn biết hay không một số mệnh đề có liên quan với câu hỏi trên).

8. *Sự tương tự giữa tam giác và tứ diện.*

Đây là các cặp bài toán tương tự với nhau, một số liên hệ với tam giác, một số với khối tứ diện:

dựng đường tròn nội tiếp với một tam giác đã cho;

dựng hình cầu nội tiếp với một tam giác đã cho.

Bạn hãy nêu những cặp bài toán hay định lí khác tương tự với nhau. Lời giải hay chứng minh các bài và định lí này có tương tự với nhau không, nếu không, chúng nó quan hệ với nhau như thế nào?

9. Hãy nêu những tam giác có liên hệ với một định lí tương tự với định lí dưới đây về khối tứ diện:

Đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh đối của khối tứ diện đi qua trọng tâm mọi mặt cắt song song với hai cạnh này.

Định lí về tam giác có giúp ta chứng minh định lí về khối tứ diện không? Bạn hãy trả lời những câu hỏi tương ứng có liên hệ với các định lí sẽ nói đến trong các bài tập 10, 11.

10. (Làm tiếp) Mặt phẳng đi qua trung điểm hai cạnh đối của khối tứ diện, chia thể tích này thành hai phần bằng nhau.

11. (Làm tiếp) Mặt phẳng phân giác của góc nhị diện khối tứ diện chia cạnh đối thành các đoạn thẳng tỉ lệ với diện tích các mặt bên tạo thành góc nhị diện này.

12. *Bạn có biết bài toán nào cùng nguồn gốc không?* Hãy giải hệ ba phương trình ba ẩn số x, y, z sau (các đại lượng a, b, c đã cho).

$$\begin{cases} x^2y^2 + x^2z^2 = axyz, \\ x^2z^2 + y^2x^2 = bxyz, \\ z^2x^2 + z^2y^2 = cxyz. \end{cases}$$

(Chúng ta có ở đây một hệ ba phương trình ba ẩn số. Hệ phương trình loại này được nghiên cứu nhiều nhất là hệ tuyến tính. Bạn có thể "tuyến tính hoá" hệ này được không? Chúng ta có thể giải hệ viết theo dạng sau:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{z^2} = \dfrac{a}{xyz}, \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{z^2} = \dfrac{b}{xyz}, \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{c}{xyz}. \end{cases}$$

Đây là một hệ tuyến tính đối với x^{-2}, y^{-2}, z^{-2} với điều kiện là xyz đã biết. Lời giải sẽ có dạng $\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{A}{xyz}$ ...và như vậy một triển vọng đang mở ra trước chúng ta (bạn có nhìn thấy triển vọng này không?)).

13. Hãy quay trở về định nghĩa. Xét 3 đường tròn f, f' và v với F, F' và V là các tâm tương ứng. Hai đường tròn f và f' cố định, v biến đổi, f' và v nằm trong đường tròn f nhưng đường nọ nằm ngoài đường kia. Chứng minh mệnh đề: Nếu đường tròn biến đổi v tiếp xúc với cả hai đường tròn cố định f và f', thì quỹ tích của tâm đường tròn v là một Elíp (Elíp nào?).

14. *Nghiên cứu lân cận gần nhất.* Bạn có thích bài toán trên (bài 13) không? Lời giải bài này có làm bạn hài lòng hay không? Giờ bạn hãy nghiên cứu những lân cận gần nhất, vì bạn sẽ hái được không phải chỉ một quả táo mà có thể những mấy quả chín ngon ngọt.

Hãy biến dạng bài toán: có thể khảo sát hoặc trường hợp tổng quát, hoặc trường hợp riêng, các trường hợp giới hạn, hoặc các bài tương tự. Bạn có hi vọng sẽ phát hiện được những điều hứng thú và có khả năng nắm được kĩ năng nghiên cứu khoa học.

Đề nghị bạn tìm quỹ tích điểm V tương ứng với các biến dạng của những giả thiết liên quan tới các đường tròn cố định f, f' và đường tròn biến đổi v.

1) *Cá biệt hoá:* Cho các đường tròn f và f' đồng tâm.

2) *Trường hợp giới hạn:* f là đường thẳng cố định, f' là đường tròn cố định ("nằm ngoài" f có nghĩa là không cắt f), v tiếp xúc với f và f'.

3) *Tương tự hoá:* Hai đường tròn f và f' nằm bên ngoài nhau và sự tiếp xúc của v với f và f' cùng tính chất, hoặc v nằm ngoài hai đường tròn này hoặc chứa cả hai.

4) *Trường hợp riêng của 3):* Giả sử hai đường tròn của f và f' bằng nhau, các điều kiện khác như điểm 3) không thay đổi.

Bạn hãy xem xét các trường hợp riêng, trường hợp giới hạn và các bài tương tự khác của bài toán gốc và các biến thể của nó.

15. *Sự chú ý và hành động.*

1) có đúng như Đề-các đã khẳng định (xem trích dẫn đầu chương)" " Phương pháp không thể là cái gì khác là hướng sự chú ý của chúng ta đến tất cả các yếu tố có liên quan với vấn đề khảo sát (lần lượt từ yếu tố nọ đến yếu tố kia theo một trình tự thích đáng)". Tôi không dám khẳng định như vậy. Song, rõ ràng ở người giải toán có phương pháp, phần quan trọng trong việc làm là tập trung chú ý vào các yếu tố có quan hệ với bài toán (lần lượt xem đi xem lại từng yếu tố và những tổ hợp các yếu tố này). Câu hỏi "ẩn là gì?" và lời khuyên "hãy xem xét ẩn" cũng nhằm mục đích độc nhất là để hướng người giải chú ý đến ẩn. Người giải toán làm việc có phương pháp dường như tiến lên phía trước theo sự nhắc nhở của tiếng nói bên trong".

Hãy xem xét bài toán trong toàn bộ.

Xem xét ẩn số.

Xem xét các dữ kiện.

Xem xét các điều kiện.

Xem xét riêng từng dữ kiện.

Xem xét riêng từng điểm của điều kiện.

Đặc biệt chú ý xem xét dữ kiện nào chưa sử dụng đến. Đặc biệt chú ý xem xét điểm nào trong điều kiện chưa sử dụng.

Xem xét tổ hợp hai dữ kiện này.

....

2) Sự chú ý có thể đặt khởi điểm cho hành động. *Hãy xem xét ẩn? Ẩn là gì? Làm thế nào để có thể tìm được ẩn như thế? Có thể xác định được ẩn giống như thế với các dữ kiện gì? Bạn có biết (đã giải) bài toán nào có ẩn cùng loại?* Sự chú ý đến ẩn sẽ thôi thúc người giải lần sâu trí nhớ tìm những bài toán đã giải cùng ẩn như thế. Nếu tìm được, người giải có thể giải thử bài toán của mình bằng cách đi ngược từ cuối lên đầu (xem chương 8).

Tuy những trường hợp tương tự như trên (hành động đệ quy do sự chú ý đến ẩn gây nên) rất gặp và rất có ích, nhưng cả sự chú ý đến mọi yếu tố khác trong bài toán đều có thể dẫn đến những tiếp cận có lợi và do đó sẽ đưa đến những hành động có hiệu quả. Chẳng hạn, sự chú ý đến một thuật ngữ nào đó trong bài toán có thể đòi hỏi ta quay trở về định nghĩa thuật ngữ ấy, do đó yêu cầu ta thay đổi phương thức diễn đạt và đưa vào bài những yếu tố mới có ích.

3) Chú ý hợp lí đến những yếu tố khác nhau ở trong bài hay những tổ hợp yếu tố này, người giải sẽ phát hiện được yếu tố hay tổ hợp yếu tố mở đường đi đến những hành động hợp lí (hay còn tốt hơn nữa), chính đó là yếu tố hay tổ hợp yếu tố dẫn tới các hành động hợp lí nhất. Người giải có hi vọng sẽ nghĩ ra những ý xuất sắc chỉ cho anh ta thấy ngay được cần hành động như thế nào.

16. *Tư duy có hiệu quả và tư duy sáng tạo.* Có thể gọi là tư duy có hiệu quả nếu tư duy đó dẫn đến lời giải một bài toán cụ thể nào đó. Có thể coi là sáng tạo tư duy đó tạo ra những tư liệu, phương tiện giải các bài toán sau này. Các bài toán vận dụng những tư liệu phương tiện này có số lượng càng lớn, có dạng càng muôn màu muôn vẻ, thì mức độ sáng tạo của tư duy càng cao.

Đôi khi, ngay cả trong trường hợp không giải được bài toán đang khảo sát, việc làm đó có thể coi là sáng tạo, ví dụ những lúc cố gắng của người giải vạch ra được các phương thức giải áp dụng cho những bài toán khác. Việc làm của người giải có thể là sáng tạo một cách gián tiếp, chẳng hạn lúc anh ta để lại một bài toán tuy không giải được tốt vì đã gợi ra cho người khác những suy nghĩ có hiệu quả.

Theo tôi, người Hi Lạp lúc để lại cho ta bài toán về chia ba một góc, đã làm một việc rất sáng tạo, dù họ chưa giải được, vì trải qua hàng mấy trăm năm nay bài đó đã làm cho không biết bao nhiêu người tổn hao tâm trí. Chúng ta nhận thấy bài toán này vạch ra một sự tương phản: mọi đoạn thẳng, mọi góc đều có thể chia thành hai phần bằng nhau, trong lúc đó chỉ có thể chia thành ba phần một cách dễ dàng một số góc đã được chọn đặc biệt (chẳng hạn góc 90^0)(*). Tiếp tục con đường này, ta sẽ gặp những bài chia góc thành 5, 7 và 17 phần bằng nhau, có quan hệ với các bài toán giải các phương trình bằng căn thức và cuối cùng là với các phát hiện của Gao-xơ, A-ben và Ga-loa đã dẫn đến việc hình thành các định lí giúp ta giải được vô số bài toán mà những người Hi Lạp, những người đầu tiên nghĩ ra bài toán chia ba một góc, cũng chưa hề nghĩ tới.

(*) Tính chất đặc biệt của trường hợp này lại càng đáng lưu ý hơn nữa, vì trong hình học phi Ơ-clít (thân thuộc với hình học Lô-ba-sep-xki), ta chỉ có thể chia thành ba phần bằng nhau bằng compa và thước một số góc và đoạn thẳng được lựa chọn đặc biệt.

CHƯƠNG 13. CÁC QUY LUẬT CỦA SỰ KHÁM PHÁ, PHÁT HIỆN

Mặc dù cả trong những trường hợp tương tự cũng khó đưa ra được những chỉ dẫn tổng quát và mỗi người lúc gặp các trường hợp ấy phải làm theo sự chỉ dẫn của lí trí bản thân, tuy vậy tôi vẫn có ý định chỉ đường cho những người mới bắt đầu.

NIU-TƠN - Số học đại cương

Cho đến nay, tôi vẫn chăm lo giải hàng loạt bài toán, vì trong nghiên cứu khoa học các ví dụ có ít hơn các quy tắc.

NIU-TƠN - Cùng tác phẩm

§1. CÁC QUY TẮC THƯỜNG KHÁC NHAU

Công việc người giải càng tiến lên phía trước, dạng bên ngoài của bài toán càng thay đổi không ngừng. Ở mỗi giai đoạn mới, người giải thường gặp tình huống mới và vấn đề lựa chọn cách giải trung gian, chính xác được đặt ra: phải xử lí như thế nào trước tình huống đó, bước gần nhất là gì? Nếu người đó có được một phương pháp hoàn chỉnh, một sách lược hoàn toàn đúng trong việc giải toán, anh ta xuất phát từ tình huống đang diễn ra và tuân theo những định luật chặt chẽ, chỉ cần một ít suy luận là có thể chọn được bước tiếp theo. Song tiếc thay, ta không có một phương pháp giải toán vạn năng và hoàn toàn đúng: những quy tắc chặt chẽ vận dụng được cho bất kì tình huống nào hiện nay vẫn chưa tìm ra và chắc chắn chẳng bao giờ tìm được.

Nhưng tính chất các quy tắc có thể khác nhau. Các quy tắc đạo đức, những nguyên tắc châm ngôn, chỉ dẫn thường khá có ích, nhưng không thể chặt chẽ như quy tắc toán học hay lôgic. Các định luật toán học làm cho ta nhớ đến "những đường không bề rộng" phân rõ trắng đen. Tuy nhiên, cũng có những quy tắc hoàn toàn mang tính chất hợp lí, còn để lại cho người vận dụng một số tự do, một khoảng không gian, nhất định. Ở đây không có đường phân định ranh giới ngặt nghèo và chẳng bao giờ có cái đen, cái trắng mà chỉ có những sắc thái màu xám.

Rõ ràng là cần phải có những phương hướng, phương thức tư duy, các kĩ xảo trí tuệ có ích cho nhiều tình huống và nếu có thể được thì cho đại bộ phận các tình huống xuất hiện trong lúc giải toán. Dầu sao, các ví dụ và lí luận trình bày rất nhiều ở các chương trên, dường như đã cho ta thấy có những phương hướng như thế. Bởi vậy, không nên đặt ra câu hỏi. "Có chăng những định luật về thuật phát minh, tức là những quy tắc chính xác cần nắm thật vững để có thể phát hiện ra bất cứ điều gì?". Chúng ta cần nêu những câu hỏi khác, chẳng hạn: "Có những nguyên tắc hay châm ngôn nào đó để thể hiện phương hướng có ích cho việc giải toán không?".

§2. TÍNH HỢP LÍ

Chúng ta nói một hành động hay một phán đoán *là hợp lí* nếu trong hành động ấy, phán đoán ấy, dựa trên những lí lẽ rõ ràng, sáng tỏ trên mọi khía cạnh và không bắt nguồn từ các điều lờ mờ rắc rối như thói quen, ấn tượng, cảm giác hay "cảm hứng" ít ăn khớp với những sự nghiên cứu phân tích chính xác. Một thừa nhận được chúng ta liệt vào hàng định lí toán học sau khi đã nghiên cứu cẩn thận và có phê phán các chứng minh trong đó, là mẫu đầu của một phán đoán hợp lí. Dưới góc độ nhất định, ích lợi chủ yếu của việc nghiên cứu các chứng minh toán học là các chứng minh đó dẫn dắt chúng ta tới gần cách suy nghĩ hợp lí hơn cả, đối với con người có suy nghĩ, "động vật có trí tuệ".

Song ta vẫn chưa rõ tính hợp lí của các hành động của người giải là ở cái gì. Để xem xét khó khăn của anh ta phần nào cụ thể hơn, chúng ta hãy hình dung một tình huống nào đấy có tính chất điển hình thường xuất hiện. Lúc nghiên cứu bài toán *A*, người giải thấy rõ *A* gắn liền với bài toán *B*. Việc nghiên cứu *B* có thể đưa anh ta tới gần đích, nghĩa là tới lời giải bài toán gốc *A*, nhưng cũng có thể làm phí thời gian và sức lực vô ích. Như vậy, người giải cần phải lựa chọn: hoặc tiếp tục giải bài toán *A* không để ý đến quan hệ thân thuộc của *A* với *B* hoặc trái lại ngừng nghiên cứu bài toán mới *A*, mà chuyển sang nghiên cứu bài toán *B*. Tình huống lưỡng lự ở đây là lúc phân tích *A*, anh ta không biết có nên coi *B* là một bài toán phụ hay trung gian hay không. Người giải có cơ sở gì để biết việc chấp nhận cách giải quyết nào đó trong hai cách này là hợp lí?

Một trong những lợi ích quan trọng nhất người giải có thể thu được ở *B* là việc nghiên cứu bài *B* có thể khuấy động trí nhớ anh ta làm nổi lên những yếu tố giúp cho việc giải bài toán gốc *A*. Triển vọng việc nghiên cứu *B* sẽ cho được kết quả mong muốn lớn đến mức nào? Chỉ dựa trên những lí lẽ "hợp lí" chặt chẽ để đánh giá triển vọng ấy dường như không thể được; ở đây người giải trong chừng mực nào đó phải dựa vào những cảm giác không rõ rệt của mình.

Tuy nhiên vẫn có thể có những lí lẽ, bằng cứ hợp lí giúp cho người giải chấp nhận hay không chấp nhận *B* như một bài toán phụ. Chúng ra đã xem xét một số những lí lẽ bằng cách ấy trong chương 9. Người giải làm thế nào để cân nhắc được cả hai yếu tố: những cảm giác không rõ ràng - hiển nhiên là chủ quan - và những lí do khách quan chặt chẽ? Có thể, anh ta cần phân tích tỉ mỉ những lí lẽ đã được hình thành rõ ràng minh bạch trong một thời gian (một thủ tục tương tự như thế chắc là hợp lí nhất), rồi sau đó, chưa cả tin ngày vào những lí lẽ ấy mà còn hỏi lại trực giác và những cảm giác không rõ rệt của mình trước lúc đưa ra quyết định cuối cùng và có lẽ ta phải coi mẫu hành động mô tả trên là hợp lí nhất.

Trong bất kì trường hợp nào, người giải cũng phải biết duy trì được sự cân bằng giữa những cảm giác không rõ rệt và nhưng lí lẽ sáng tỏ. Có lẽ đó là điều quan trọng nhất mà anh ta phải học cho thông thạo. Theo tôi, ở đây quy tắc chính mà người giải phải tuân theo, có thể diễn đạt như sau:

Không bao giờ đi ngược lại những cảm giác của mình, nhưng cũng cố gắng tỉnh táo cân nhắc tất cả những lí lẽ phù hợp hay mẫu thuẫn với các kế hoạch của bạn.

§3. TIẾT KIỆM NHƯNG KHÔNG CỐ CHẤP

Cố gắng tiết kiệm là điều quá rõ chẳng cần làm sáng tỏ. Ai cũng hiểu rõ bạn mong muốn giữ được tài sản của mình, mất thời gian, sức lực, tiền tài ít nhất lúc thực hiện nhiệm vụ. Có lẽ tài sản quan trọng nhất của anh là trí tuệ và không phung phí những nỗ lực trí tuệ là hình thức tiết kiệm cần thiết nhất. *Không dùng dao mổ trâu để cắt tiết gà.* Đó là nguyên tắc tiết kiệm cơ bản. Chúng ta đã vận dụng nguyên tắc ấy trong quá trình giải toán, lúc có ý định đưa ra một cách giải sử dụng *tư liệu phụ ít nhất trong điều kiện cho phép.*

Trước hết nhất thiết chúng ta phải nghiên cứu tỉ mỉ chính bài tập và các tư liệu gắn với bài tập, tất nhiên đầu tiên là phải đi tìm những khả năng giải bài toán không sử dụng những phương tiện phụ. Nếu khả năng này không phát hiện được, ta đi vào những nghiên cứu tư liệu gắn với bài toán ít trực tiếp hơn nhưng vẫn gần. Nếu như ở đây vẫn chẳng tìm được điều gì bổ ích, ta có thể chuyển sang những chi tiết xa hơn. Song và đây là một nguyên tắc chung cần nắm vững, dầu trong lúc chẳng còn hi vọng giải được bài toán những đối tượng ở gần, thâm tâm chúng ra vẫn chống lại việc đầu tư thì giờ và sức lực vào những đối tượng nằm xa bài tập hơn. Biến tướng này của hình thức tiết kiệm trí tuệ có thể diễn đạt bằng câu châm ngôn sau: *Hãy bám lấy bài tập càng gần càng tốt.*

Tất nhiên trong vấn đề này chúng ta không thể nhìn thấy trước phải đi ra xa tư liệu trực tiếp gắn liền với bài toán đến chừng mực nào đó. Theo nguyên tắc tiết kiệm, lúc đầu chúng ta nghiên cứu ngay trong bản thân bài toán, nếu chưa đủ, ta tiếp tục nghiên cứu vùng lân cận của bài. Nếu vẫn còn ít chưa đáp ứng được, thì chúng ta phải tiến xa hơn. Người nào sẵn sàng giải bài toán với mọi giá có thể thực sự là phải chịu một giá cao, nhưng bất kì trường hợp nào, anh ta cũng không thể hạn định trước các chi phí của mình. Người giải kiên trì quyết tâm phải bám chắc nguyên tắc không thừa nhận các hạn định có nguyên tắc tiết kiệm bổ sung:

...nhưng bạn sẵn sàng đi ra xa bài toán tới những giới hạn mà hoàn cảnh yêu cầu.

§4. KIÊN TRÌ NHƯNG PHẢI MỀM DẺO

"Thiên tài, đó là sự nhẫn nại".

"Thiên tài, chỉ một phần trăm là cảm hứng và chín mươi chín phần trăm là mồ hôi". [*]

Một câu là của Buýp-phông [**] và câu kia là của Edison, cả hai cùng nói lên một ý: người nào muốn giải quyết tốt nhiệm vụ, phải có quyết tâm, phải kiên trì mục đích của mình, không được nửa đường thoái chí.

Song kiên trì đối với cái toàn bộ có thể không phải là kiên trì đối với các bộ phận. Lúc nghiêm túc cứu một chi tiết, một khía cạnh nào đó của bài toán, tất nhiên phải kiên trì không được đầu hàng quá sớm, tuy nhiên cũng phải biết đánh giá các triển vọng, không cố vắt mãi quả cam đã ép kiệt nước từ trước.

---

[*] Theo nguyên bản đây là lối chơi chữ: inspiration, cảm hứng Perspiration, đẫm mồ hôi.

[**] Joóc Buýt-phông (1767 – 1783) nhà tự nhiên học người pháp nổi tiếng.

Đừng lao vào một vấn đề lúc bạn chẳng còn hi vọng phát hiện được một ý gì có ích.

Công việc của người giải, phần lớn là huy động mọi nguồn dữ trữ; luôn luôn phải rút từ trong trí nhớ ra được những đối tượng mới và mới, cần thiết cho việc giải bài toán. Đối tượng cần đến có thể gắn với một chi tiết hay khía cạnh xác định nào đó chặt chẽ hơn so với các chi tiết hay khía cạnh khác và nhờ chính chi tiết (hay khía cạnh) đó, ta đi tới nhớ lại dễ dàng hơn. Song người giải không biết được từ trước chính chi tiết nào, khía cạnh nào sẽ đưa anh ta đến gần đích. Bởi vậy, người giải chẳng còn con đường nào khác là xem xét một số lớn khía cạnh, chi tiết và trước tiên là những điểm quan trọng nhất và có triển vọng nhất trong số đó.

Để có thể bao quát được cả một vùng rộng mênh mông mà không phí thời giờ, người giải không được bám chặt vào chỉ một chỗ quá lâu hoặc đi qua chỗ ấy quá nhanh. Các tìm tòi của anh ta phải đa dạng, trong mỗi giai đoạn phải cố gắng thấy được cái mới như chi tiết mới hay tổ hợp mới, những chi tiết đã nghiên cứu hay cuối cùng là những chi tiết đã xem xét và tổ hợp của chúng dưới ánh sáng mới. Tất nhiên mục đích ở đây là để nhìn được tất cả bài toán trong toàn bộ, dưới ánh sáng mới nhiều hứa hẹn hơn.

Một cách ngắn gọn, ta có thể nói, tính kiên trì còn có sự mềm dẻo bổ sung. Ở trên chúng ta đã khẳng định là phải tỏ ra kiên trì lúc nghiên cứu các vấn đề.

Nhưng trong mọi giai đoạn bạn hãy cố gắng nắm được những bộ phận chưa đụng chạm đến và rút ra được những ý có ích từ những điều còn chưa nghiên cứu đến.

Nguy hiểm thấy rõ nhất mà câu châm ngôn ngăn ngừa, là sự thiếu mềm dẻo và do đó sẽ rơi vào bánh xe cổ hủ, nghĩa là cứ lặp đi lặp lại một thủ đoạn, khư khư không thay đổi và chẳng tiến lên được bước nào(*).

§5. CÁC QUY TẮC ƯU TIÊN

Nếu đối với cùng một bài toán hai cách xử lí đều tỏ ra có triển vọng như nhau về mọi mặt, nhưng một cách có lẽ dễ dàng hơn, tất nhiên ta phải thử trước cách này. Ở đây chúng ta lưu ý đến quy tắc ưu tiên (một quy tắc hầu như tầm thường) có thể diễn đạt như sau:

Cái dễ hơn đi trước cái khó hơn.

Song, cách phát biểu tương tự như trên làm cho sự khẳng định này không được đầy đủ. Chúng ta phải thêm vào câu trên, với tư cách bổ sung hay hạn định, các từ "ceteres paribus", có nghĩa là "trong những điều kiện khác như nhau". Ta nhận thấy, tuy ở đây sự hạn định quan trọng này chưa nói lên được thật rõ, nhưng trong câu này cũng như ở trong tất cả các quy tắc ưu tiên diễn đạt giống như thế dưới đây, đều có ngụ ý nói đến. Và đây là hai quy tắc nữa thuộc loại này, cũng thực sự hiển nhiên như trên:

Cái quen thuộc đi trước cái xa lạ hơn.

Đối tượng có nhiều điểm gắn với bài toán đang xét, đi trước đối tượng có ít điểm hơn.

(*) Trong nghệ thuật đánh cờ có quy tắc sau: sau lúc lặp đi lặp lại tiên tiếp ba lần một nước cờ, trận đấu sẽ tự động đình chỉ và không bên nào được coi là thắng cuộc.

Các quy tắc đều rõ ràng, nhưng sự vận dụng lại có thể hoàn toàn không rõ ràng. Sự hạn định "ceteres paribus", nhất là lúc chỉ nói ngụ ý và không được diễn đạt rõ ràng, có thể sẽ đòi hỏi ở người giải phải có nghệ thuật cao. Lại có những quy tắc ưu tiên kém rõ ràng hơn, hoàn toàn mang tính chất không phổ biến và có tính chất đặc trưng nhiều hơn. Để có thể nghiên cứu có hệ thống quy tắc này, cần sơ bộ phân loại các đối tượng có liên quan hệ với chúng. Đây là mọt trong những phân loại, có thể chưa thật hoàn chỉnh, nhưng đã bao gồm được khá tự nhiên đại bộ phận các trường hợp đáng quan tâm.

1) Các bộ phận của bài toán.

2) Những kiến thức có ích.

3) Các bài toán phụ.

Trong ba mục sắp tới, chúng ta sẽ sét các quy tắc ưu tiên tương ứng với phân loại trên.

§6. CÁC BỘ PHẬN CỦA BÀI TOÁN

Lúc bắt tay vào giải một bài toán, bạn vẫn còn chưa biết những chi tiết nào trong đó là quan trọng nhất. Do lẽ đó, điều đáng lo là có thể vì quá say mê chi tiết nào đó không quan trọng nên sau đó khó dứt khỏi chi tiết ấy. Bởi vậy, bạn hãy bắt đầu nghiên cứu bài toán trong toàn bộ, đừng để các chi tiết thu hút làm lạc hướng và lúc bạn vẫn còn chưa hoàn toàn mổ xẻ được bản chất của vấn đề, chưa nắm được mục đích đặt ra, thì bạn hãy nhường quyền sử dụng các suy nghĩ của bạn cho bài toán, được hiểu như là một cơ cấu thống nhất.

Cái toàn bộ đi trước cái bộ phận.

Lúc bạn đã có ấn tượng việc nghiên cứu bài toán trong toàn bộ kéo dài nữa sẽ không lợi và chính bạn thấy cần chuyển sang xem xét chi tiết hơn, bạn sẽ nhận thấy ở các chi tiết một cái gì giống như là thứ bậc. Các bộ phận chính thuộc bậc cao là loại gần "trục" của bài toán nhất (như đã nói ở trên, giả thuyết và kết luận là những phần chính của bài toán chứng minh và ẩn số, dữ kiện, điều kiện là phần chính bài toán phát hiện). Tất nhiên, ta bắt đầu nghiên cứu chi tiết các bộ phận chính. Bạn không được nhìn một cách đơn giản, nhìn với *ranh giới rạch ròi* là kết luận định đến và giả thiết từ đó rút ra kết luận này, hoặc ẩn số nằm trong dữ kiện và điều kiện (gắn dữ kiện với ẩn số), nằm trong cái gì.

Các bộ phận chính đi trước các bộ phận khác. Một bộ phận chính có thể bị chia nhỏ: một điều kiện cần có thể do một số khẳng định tạo nên, một điều kiện có thể gồm một số điểm; ẩn số có thể gồm nhiều hợp phần, các dữ kiện có thể là mấy điểm, mặc dù lúc nghiên cứu bước đầu bạn đã xem xét chúng như là một chỉnh thể. Sau những bộ phận chính, bạn chú ý tiếp đến những bộ phận nhỏ nằm trong các bộ phận chính ấy: bạn có thể nghiên cứu tách riêng từng cái trong các dữ kiện, trong ẩn số, từng điểm một của điều kiện, từng giả thiết của điều kiện cần, từng khẳng định trong kết luận. Sau những bộ phận chính tạo thành bậc cao và các hợp phần của chúng tạo thành bậc tiếp theo, là tất cả các chi tiết khác có thể coi là xa trục bài toán hơn cả. Trong những bộ phận ở xa hơn có thể có một số ở bậc cao hơn cả. (Chẳng hạn trong sự diễn đạt một định lí có khái niệm A nào đó và định nghĩa của A lại có khái niệm B, rõ ràng B nằm xa trục bài toán hơn A). Hãy cố gắng đừng rời xa trục bài toán quá mức cần thiết. Trong những điều kiện khác như nhau

(chúng tôi luôn luôn bổ sung thêm điều này), sử dụng những phần gần trục bài toán hơn, có nhiều triển vọng đưa lại lợi ích hơn.

Những bộ phận gần hơn đi trước những bộ phận xa hơn.

§7. NHỮNG KIẾN THỨC CÓ ÍCH

Như chúng tôi đã nhắc đi nhắc lại, một trong những hành động quan trọng (có thể là quan trọng nhất) của người giải là huy động những kiến thức trong vốn tri thức của mình và gắn chúng với các yếu tố của bài toán. Công việc này có thể thực hiện "từ trong" và "từ ngoài". Anh ta có thể giải bài toán bằng cách chỉ dừng lại ở bên trong bài, toàn tâm toàn ý nghiên cứu các bộ phận có hi vọng mang lại kết quả và nhờ đó rút ra được những kiến thức có ích, trái lại, có thể xử lí bài toán từ ngoài bằng cách điểm lại các lĩnh vực tri thức đã tích luỹ và rút từ đó ra những kiến thức có ích. Trong chương trước đã nói đến cách giải chỉ tác động từ trong, giờ đây, chúng ta tập trung theo dõi công việc anh ta xử lí bài toán chỉ theo phương hướng từ ngoài.

Mọi tri thức hay kinh nghiệm thu hoạch được trong quá khứ đều có thể có ích, giúp chúng ta giải bài toán cụ thể nào đó; song rõ ràng chúng ta không thể nào kiểm lại toàn bộ tri thức, nhớ lại toàn bộ kinh nghiệm đã có, lần lượt từ điểm nọ tới điểm kia. Ngay cả lúc đấy là một bài toán thuộc lĩnh vực toán học và chỉ nói đến một lĩnh vực tri thức tương đối sáng sủa, có hệ thống chặt chẽ đã tích luỹ được trước đây trong quá trình giải các bài toán và chứng minh các định lí, chỉ liên hệ với một ngành toán học xác định, cả trường hợp này chúng ta vẫn không thể nghiên cứu từ đầu tất cả tư liệu có quan hệ với bài toán, lần lượt xem xét mọi đối tượng. Chúng ta phải hạn chế, chỉ chọn những điểm có khả năng giúp ích nhiều nhất.

Chúng ta hãy lần lượt xét các bài toán phát hiện và các bài toán chứng minh.

Dưới đây là một bài toán phát hiện. Ngay sau lúc xét các bộ phận chính: ẩn số, dữ kiện và điều kiện, ta tập hợp trong trí nhớ những bài toán nào đã giải trước đây xem chừng có thể giúp chúng ta tìm tòi, phát hiện. Tất nhiên chúng ta chú ý đến những bài có điểm nào đó trùng với bài đang xét, chẳng hạn ẩn số hay một trong những ẩn số, toàn bộ tập hợp các dữ kiện hay một trong các dữ kiện đó, một số khái niệm nào thực sự tương ứng,... Có khả năng, nhiều hoặc ít, là mọi bài toán thuộc loại này đã giải trước đây đều có ích, nhưng ta không thể nào xem xét được tất cả. Song trong tất cả những điểm có khả năng trùng hợp, có một điểm đáng chú ý hơn tất cả, đó là ẩn số (đặc biệt là đối với bài toán đã giải cùng có các ẩn số như bài đang xét, chúng ta phải cố gắng sử dụng, lấy làm xuất phát điểm để triển khai cách giải theo hướng ngược lại hay đi từ điểm cuối lên điểm đầu (xem chương 8). Dĩ nhiên, với một vài trường hợp cá biệt ta có thể ưu tiên chọn những bài có điểm trùng hợp khác, nhưng nói chung, *trước hết bạn hãy chú ý xem xét ẩn số.*

Những bài toán đã giải cùng có ẩn số như bài toán đang xét đi trước những bài đã giải khác.

Nếu không tìm được bài gần gũi cùng có những ẩn số như bạn đang xét, bạn có thể cố gắng tìm những bài có các ẩn số cùng loại. Chính đấy là những bài được ưu tiên hơn tuy chưa phải là ưu tiên nhất.

Trong trường hợp các bài toán chứng minh, tình huống cũng diễn ra tương tự. Bạn hãy hồi tưởng lại trong trí nhớ của mình định lí nào đó đã được chứng minh trước đây có thể giúp bạn nghiên cứu xem xét và trước hết bạn hãy *xem xét những chứng minh có cùng kết luận.*

Những định lí đã chứng minh có cùng kết luận như định lí đang chứng minh đi trước các định lí đã chứng minh khác.

Sau định lí có cùng kết luận, định lí "tốt nhất" là định lí có kết luận cùng loại với định lí đang cần chứng minh.

§8. CÁC BÀI TOÁN PHỤ

Trong quá trình giải toán, một trong những nhân tố quan trọng nhất đối với người giải là chọn được bài toán phụ thích hợp. Có thể tìm được một bài phụ như thế bằng cách triển khai bài toán đang giải từ trong hay từ ngoài, hay (thường đây là phương thức hợp lí nhất) liên tiếp tác động lúc từ trong, lúc từ ngoài. Những bài toán phụ có tính chất mẫu, trong những điều kiện khác như nhau, có nhiều khả năng mang lại lợi ích hơn các bài khác.

Bài toán phụ có thể hỗ trợ, thúc đẩy việc giải bài toán đang xét qua vô số phương thức không kể xiết. Chẳng hạn có thể là sự hỗ trợ thực sự (như người ta thường nói đối với các giúp đỡ vật chất), có thể giúp đỡ về phương pháp, có thể gây ra một tác động kích thích, dùng làm kim chỉ nam hay làm mẫu hoặc đơn thuần chỉ là một bài toán thực hành có ích. Song, dầu hỗ trợ theo phương thức nào, trước tiên, bài toán phụ nào có quan hệ trực tiếp hơn, chặt chẽ hơn sẽ có nhiều khả năng giúp chúng ta được nhiều hơn.

Những bài toán tương đương với bài toán đang xét đi trước các bài dẫn tới bài này hay bao hàm bài này và những bài loại sau lại đi trước tất cả các bài khác.

Ta cũng có thể diễn đạt điều này như sau:

Phép quy hai chiều đi trước phép quy một chiều và phép này lại đi trước tất cả các mối liên hệ khác kém chặt chẽ hơn (xem chương 9).

§9. TÓM TẮT

Tính hợp lí. Không bao giờ bạn đi ngược lại những cảm giác của mình, nhưng cũng có gắng tỉnh táo cân nhắc tất cả những lí lẽ phù hợp hay mâu thuẫn với các kế hoạch của bạn.

Tiết kiệm nhưng không cố chấp. Hãy bám lấy bài tập càng gần càng tốt, nhưng bạn phải sẵn sàng đi ra xa bài toán tới những giới hạn mà hoàn cảnh yêu cầu.

Kiên trì nhưng phải mềm dẻo. Đừng lao vào một vấn đề lúc bạn chẳng còn hi vọng phát hiện ra được một ý gì có ích, nhưng trong mỗi giai đoạn, hãy cố gắng nắm được những bộ phận chưa đụng chạm tới và rút ra được những ý có ích từ những điều bạn còn chưa nghiên cứu.

Các quy tắc ưu tiên.

Cái dễ hơn đi trước cái khó hơn.

Cái quen thuộc hơn đi trước cái xa lạ hơn.

Đối tượng có nhiều điểm gắn liền với bài toán đang xét đi trước đối tượng có ít điểm hơn.

Cái toàn bộ đi trước cái bộ phận. Những bộ phận chính đi trước các bộ phận khác. Những bộ phận gần hơn đi trước những bộ phận xa hơn.

Những bài toán đã giải có cùng ẩn số như bài toán đang xét đi trước các bài đã giải khác.

Những định lí đã chứng minh có cùng kết luận như định lí đang chứng minh đi trước các định lí đã chứng minh khác.

Những bài toán tương đương với bài đang xét đi trước các bài dẫn tới bài này hay bao hàm bài này và những bài loại sau lại đi trước tất cả các bài khác. Hoặc: Phép quy hai chiều đi trước phép quy một chiều, phép này lại đi trước tất cả các mối liên hệ khác kém chặt chẽ hơn.

Đối với tất cả các quy tắc ưu tiên, trong suy nghĩ bạn chớ nên quên bổ sung thêm: *Trong những điều kiện khác như nhau.*

BÀI TẬP VÀ CHÚ THÍCH BỔ SUNG CHO CHƯƠNG 13

1. *Người thông minh, nhà chuyên môn và người mới vào nghề.* Người thông minh thường hành động phù hợp với các quy tắc, thậm chí cả lúc chưa ngờ là có các quy tắc này. Nhà chuyên môn, cũng hành động theo các quy tắc không phải suy nghĩ, song lúc cần cân nhắc hành vi của mình đều có thể tìm ra được quy tắc cần thiết. Người mới vào nghề lúc hành động, thường cố gắng vận dụng quy tắc nào đó, đánh giá tỉ mỉ quy tắc này và xuất phát từ kinh nghiệm (còn ít ỏi) đã có...

Tất nhiên, tất cả điều vừa nói chẳng có gì mới. Thánh Augutstin(*) nói về các diễn giả và các quy tắc tu từ học. "Họ hùng biện vì bám chặt các quy tắc; họ bị tước mất tài hùng biện cũng vì bám chặt quy tắc".

2. *Về các trái cây và các kế hoạch*(**). Có cần hái trái cây này không? Nhưng đã chín đủ để hái chưa? Dĩ nhiên nếu để trên cây, trái cây này còn có thể chín hơn và ngon ngọt hơn. Song, để lại trên cây có thể bị chim ăn hay sâu huỷ hoại, có thể bị gió thổi rụng hoặc trẻ em láng giềng hái mất. Cuối cùng không thể nói trước được tất cả các trường hợp bị hư hỏng hay huỷ hoại. Có nên để lại trên cây không? Hay là hương, sắc, hình dáng, vẻ ngoài đã khá dịu dàng, hấp dẫn?

Hương sắc, hình dáng, vẻ ngoài nói chung chỉ mới nói được chút ít chứ chưa đảm bảo nói được đầy đủ chất lượng của trái cây. Chỉ trong trường hợp trái cây này ra hoa kết quả ở vườn nhà, đánh giá của tôi qua các dấu hiệu trên mới có thể đáng tin cậy, hay ít ra tôi cũng nhận định được ở mức độ nào. Nếu tôi biết rất ít về trái cây này, đánh giá của tôi sẽ rất đại khái. Dầu sao, đánh giá chất lượng qua vẻ ngoài cũng khó có thể coi là "hoàn toàn khách quan". Những đánh giá tương tự như thế phần lớn phụ thuộc vào kinh nghiệm cá

(*) Augutstin "hạnh phúc" (354 – 430), một trong những nhà thần học cơ đốc đầu tiên, nhà tư tưởng và truyền giáo, được giáo hội cơ đốc đánh giá cao và liệt vào hàng các "Thánh".

(**) Theo nguyên bản "Về các quả mận và các kế hoạch", đây là trò chơi chữ vì theo nguyên bản các cây mận (plums) và các kế hoạch (plans) phát âm gần như nhau.

nhân. Vì tất đã mấy ai có thể đánh giá kinh nghiệm bản thân được hoàn toàn khách quan và hiếm khi đưa ra được những lí lẽ có sức thuyết phục đối với mọi người để bảo vệ kinh nghiệm ấy.

Có cần bắt đầu từ bước này không? Kế hoạch đã đủ chín muồi để có thể đưa ra thực hiện chưa? Tất nhiên không thể hoàn toàn tin tưởng là kế hoạch chúng ta thực hiện sẽ đưa lại kết quả mong muốn. Nếu suy nghĩ thấu đáo ít nhiều, ta cũng thấy được là chỉ nên đánh giá triển vọng của kế hoạch. Nhưng sớm hoặc muộn; thể nào ta cũng phải bắt đầu làm cái gì đó và hiện giờ tôi cũng chưa nghĩ được kế hoạch nào đáng tin cậy hơn. Có nên bắt tay vào thực hiện kế hoạch này ngay không? Kế hoạch này có nhiều triển vọng không?

Lúc thu lượm trái cây cũng như khi thực hiện các kế hoạch, chúng ta có thể tích luỹ được những tri thức nhất định. Song, chưa chắc quyết định cuối cùng chỉ bắt nguồn đơn thuần từ những suy luận của lí trí. Phán đoán của chúng ta về chất lượng trái cây hay về tình huống diễn ra trong quá trình giải bài toán có hiệu quả hay không còn phụ thuộc vào những cảm giác chủ quan là những yếu tố không thể phân tích đến kẽ tóc chân tơ.

3. *Phong cách làm việc.* Lúc định diễn đạt các quy tắc đoán nhận, ai cũng phải dựa vào cách giải toán khác nhau của nhiều người khác. Cách giải toán tốt ở mỗi người đều có phong cách riêng.

Chúng ta hãy thử hỏi hai người, một có tư chất kĩ sư, người kia có tư chất nhà vật lí. Tuy cùng định giải một bài toán, song họ làm việc khác nhau, vì mặt chính của vấn đề đối với họ không như nhau. Người kĩ sư sẽ tìm lời giải nào sáng tỏ, ngắn gọn và có hiệu quả (cách giải "ít tiêu phí nhất", "hợp lí nhất"). Còn nhà vật lí sẽ cố gắng tìm được nguyên tắc chung làm cơ sở cho lời giải. Người kĩ sư thiên nhiều về " tư duy hiệu quả" và nhà vật lí về "tư duy sáng tạo" (xem mục 16 phần bị chú bổ sung chương 12). Chính vì vậy, cả hai tuy theo đuổi cùng một mục đích nhưng thiên về những biện pháp khác nhau.

Chúng ta hãy xét một ví dụ tương đối cụ thể hơn. Giả sử, đối với bài toán hai người định giải, có hai cách xử lí. Một mặt bài toán đang xét thể hiện sự tương tự nào đó với bài toán *A* đã giải. Mặt khác bài này rõ ràng bị ảnh hưởng bởi một thể thức do một phương pháp chung *B* chi phối. Cần chọn một trong hai cách xử lí *A* và *B*. Theo tôi, trong tình hình trên (coi các điều kiện khác là tương đồng), chắc người kĩ sư sẽ thiên về phương pháp lấy bài toán cụ thể *A* làm xuất phát điểm và nhà vật lí sẽ xuất phát từ những ý tổng quát *B*.

Ví dụ này sẽ dẫn chúng ta đến khẳng định tổng quát rằng phong cách làm việc của người giải thực chất nằm trong hệ thống các ưu tiên anh ta đã lựa chọn. Đối với các quy tắc ưu tiên đã tóm tắt ở §9, người giải có thể thêm một số nữa (chẳng hạn quy tắc: "Các phương pháp tổng quát đi trước các sự kiện riêng lẻ" - hoặc ngược lại). Ngoài ra, người giải có thể coi trọng một số quy tắc này hơn các quy tắc kia ("Trong tình huống phức tạp quy tắc *X* có trọng lượng hơn quy tắc *Y*").

CHƯƠNG 14. VỀ HỌC TẬP, GIẢNG DẠY VÀ HỌC CÁCH GIẢNG DẠY

Những gì mà tự bản thân anh buộc phải khám phá sẽ để lại trong tiềm thức của anh con đường nhỏ mà anh có thể sử dụng lại khi cần thiết.

G. LICXƠTENBEGƠ - Aphorismen

Mọi nhận thức của con người đều bắt đầu từ những quan sát, rồi từ đó đi đến các khái niệm và kết thúc bằng những tư tưởng.

I. KANTƠ - Phê phán tư duy thuần tuý

Tôi cố gắng viết sao cho người nghiên cứu luôn luôn có thể nhận thấy cơ sở bên trong của những cái mà họ nghiên cứu, sao cho họ có thể tìm thấy nguồn phát minh và do đó có thể hiểu rõ tất cả như chính họ đã nghĩ ra điều đó.

G. LÉP-NÍT - Mathematische Schriften

§1. DẠY HỌC KHÔNG PHẢI LÀ MỘT KHOA HỌC(*)

Tôi trao đổi với các bạn một số quan điểm về quá trình dạy học, nghệ thuật giảng dạy và học cách giảng dạy.

Những quan điểm này là kết quả của những kinh nghiệm lâu năm. Nói chung, việc nêu lên những quan điểm cá nhân không phải bao giờ cũng đúng chỗ và tôi có nguy cơ làm mất thời gian của các bạn, nếu như việc dạy học hoàn toàn được điều chỉnh bằng những sự việc khoa học và những định lí. Nhưng trong thực tế điều này không như vậy, theo tôi, ít ra là ngày nay, việc dạy học không phải chỉ là một ngành của tâm lí học thực hành.

Việc giảng dạy nằm trong một mối liên quan nhất định với việc học tập. Sự nghiên cứu thực nghiệm và lí thuyết của quá trình nghiên cứu (tức là quá trình thu nhận những tri thức mới) là một ngành rộng lớn và đang phát triển mạnh mẽ của tâm lí học. Nhưng bây giờ tôi nói về cái khác. Ở đây chúng ta sẽ nghiên cứu chủ yếu những quá trình phức tạp của việc dạy học giống như việc dạy đại số hay việc dạy phương pháp luận của toán học, liên quan đến những hiệu quả sư phạm lâu dài. Tâm lí học chủ yếu nghiên cứu những tình huống được làm đơn giản, làm ngắn về thời gian và tập trung hầu hết chú ý về những cái đó. Như vậy, tâm lí học có thể nêu cho chúng ta một cái gì đó lí thú, nhưng điều này còn xa với việc giải quyết những vấn đề chúng ta nghiên cứu và không có tham vọng rút ra những kết luận cuối cùng.

(*) Các mục 1-7 của chương này là phát biểu của tác giả tại Hội nghị hàng năm lần thứ 46 của hội toán học Mỹ ở Bec-cơ-li, đã được công bố.

§2. MỤC ĐÍCH DẠY HỌC

Chúng ta không thể đánh giá tác dụng của thầy giáo nếu không biết mục đích của họ. Chúng ta không thể thảo luận một cách linh hoạt quá trình dạy học khi chưa thoả thuận với nhau những cái gọi là mục đích.

Tôi muốn cụ thể hơn, ở đây tôi nói về việc dạy toán trong khuôn khổ chương trình phổ thông và một quan niệm lỗi thời về mục đích này: trước tiên, đây là điều chính không phải bàn cãi, cần phải dạy cho thanh niên SUY NGHĨ.

Đây là niềm tin mãnh liệt của tôi, các bạn có thể không đồng ý hoàn toàn, nhưng tôi cho rằng các bạn đồng ý với nó dù chỉ một phần. Nếu các bạn không cho rằng giáo dục các khả năng tư duy là mục đích hàng đầu của chương trình toán phổ thông, thì các bạn có thể cho rằng đó là mục đích thứ yếu. Ngay cả trong trường hợp này, giữa chúng ta cũng có nhiều điểm gặp nhau thuận lợi cho việc thảo luận sau này.

Khẩu hiệu " dạy suy nghĩ" có nghĩa là thầy giáo toán cần phải không chỉ là nguồn thông tin mà còn phải cố gắng phát triển khả năng của học sinh vào việc sử dụng những thông tin này; thầy giáo cần phải phát triển ở học sinh của mình bản lĩnh suy nghĩ, những thói quen có liên quan, tư chất nhất định của trí tuệ. Trong phạm vi có thể, mục đích này cần được giảng giải một cách tỉ mỉ hơn (tất cả các công trình đã in của tôi dành cho vấn đề học có thể xem như sự giảng giải như thế); nhưng ở đây tôi cần nhấn mạnh hai điều.

Một là, những điều ngẫm nghĩ mà chúng ta nói ở đây không phải những điều tưởng tượng vô ích mà là "sự ngẫm nghĩ có mục đích" hay là "sự ngẫm nghĩ có ý" hay là "sự ngẫm nghĩ có hiệu quả". Những điểm "ngẫm nghĩ" này ít ra đầu tiên có thể đồng nhất với việc "giải bài toán". Và tôi cho rằng một trong những mục đích quan trọng nhất của chương trình toán ở phổ thông là ở chỗ phát triển ở học sinh bản lĩnh giải các bài toán.

Hai là, không được coi tư duy toán học thuần tuý là "hình thức", nó không những chỉ dựa trên một số các tiên đề, định nghĩa và những chứng minh chặt chẽ, mà còn bao gồm nhiều cái khác. Sự mở rộng các trường hợp đang xét, sự ứng dụng phép quy nạp, sự áp dụng cách tương tự, sự khám phá hay nêu bật ra nội dung toán học trong một hoàn cảnh cụ thể nào đó. Thầy giáo toán có nhiều điều kiện thích hợp để giáo dục học sinh của mình làm quen với những giai đoạn "không hình thức" rất quan trọng này của quá trình tư duy và đối với tôi họ cần phải sử dụng những điều kiện này rộng rãi hơn, nhiều hơn nữa so với những cái họ làm hiện nay. Tóm lại, mặc dù không đầy đủ, có thể nói rằng: bằng mọi phương tiện, cần phải dạy nghệ thuật chứng minh, đồng thời không được quên cả nghệ thuật phỏng đoán.

§3. DẠY HỌC LÀ MỘT NGHỆ THUẬT

Dạy học không phải là một khoa học mà là một nghệ thuật. Ý kiến này được nêu lên bởi nhiều người và nhiều lần đến nỗi tôi cảm thấy lúng túng khi nhắc lại nó. Nhưng nếu chúng ta bỏ qua những sự khái quát tầm thường và đi đến những chi tiết cụ thể, thì câu

châm ngôn tầm thường này cho phép ta làm sáng tỏ một số biện pháp gặp trong nghề nghiệp của chúng ta.

Rõ ràng dạy học có nhiều cái giống nghệ thuật sân khấu. Chẳng hạn, các bạn cần phải giới thiệu cho lớp của mình cách chứng minh mà các bạn đã biết rành rọt, bởi vì các bạn đã giới thiệu nó nhiều lần trong các năm trước. Tất nhiên, chứng minh này không thể làm các bạn thích thú, nhưng các bạn chớ có biểu lộ điều đó cho học sinh: nếu học sinh thấy rằng bạn không thích thì lập tức cả lớp sẽ chán. Khi bắt tay vào chứng minh hãy cố tỏ ra thích thú, trong quá trình chứng minh không bỏ qua những khả năng tập trung sự chú ý của học sinh vào những ý hay, sau khi kết thúc chứng minh hãy cố gắng tỏ ra đã gặp điều ngạc nhiên trong chứng minh và hãy cho học sinh có thể thấy được tinh thần sảng khoái của bạn. Các bạn cần phải lưu ý tới những học sinh mà thái độ của bạn về vấn đề đáng xét có thể ảnh hưởng nhiều tới họ.

Cần phải thú nhận rằng, tôi đang đi tìm sự mãn nguyện trên những sân khấu như vậy, đặc biệt là bây giờ, khi tôi đã già và rất ít phát minh ra những cái gì mới trong toán học. Tôi có thể được chia sẻ niềm vui nhỏ của vở kịch mà tôi có đóng các vai bắt chước sự phát minh của một tình tiết này khác trong quá khứ.

Dạy học - dù điều này không rõ lắm - cũng có một số điểm giống với âm nhạc. Dĩ nhiên các bạn biết rằng thông thường giáo viên buộc phải nói về cùng một vấn đề không phải là một, hai lần mà là ba, bốn, năm lần,...Nhưng sự lặp lại nhiều lần liên tục, không thay đổi giọng cùng một vấn đề có tính chất châm ngôn răn dạy, có thể khó lọt tai người nghe và như vậy làm hại đến mục đích mà bạn lặp lại. Hãy học người nhạc sĩ để làm điều đó như thế nào cho tốt hơn! Một trong những hình thức âm nhạc quan trọng nhất là "chủ đề với biến điệu". Khi đưa hình thức âm nhạc này vào phương pháp sư phạm, các bạn bắt đầu từ việc trình bày câu châm ngôn của bạn dưới dạng đơn giản nhất; lần thứ hai các bạn lặp lại với một sự thay đổi nhỏ; lần thứ ba các bạn thêm vào các mẫu mới tươi sáng hơn,... Khi kết thúc, các bạn có thể quay trở về mệnh đề phát biểu đơn giản ban đầu. Hình thức âm nhạc quan trọng khác là "rondo", khi đưa hình thức âm nhạc này vào phương pháp sư phạm, các bạn hãy lặp lại những ý chính của mình một vài lần với những sự thay đổi không lớn lắm hay hoàn toàn không thay đổi; nhưng đồng thời giữa các lần lặp lại, hãy đưa vào những tài liệu minh hoạ chọn lọc một cách thích hợp. Tôi hi vọng rằng lần sau khi nghe chủ đề với biến điệu của Bethôven hay là Rondo của Môda, ít nhiều các bạn sẽ nghĩ về những vấn đề phương pháp luận của giảng dạy.

Thường thì việc dạy học có thể nhích gần đến thơ ca, nhưng đôi khi đến sự trơ trẽn. Hãy cho phép tôi kể cho các bạn một câu chuyện nhỏ về Anh-xtanh vĩ đại. Có một lần tôi có mặt trong một buổi nói chuyện của Anh-xtanh với một nhóm các nhà vật lí. "Tại sao tất cả các điện tử có diện tích như nhau?" - Anh-xtanh hỏi lại - "Nào, thôi được, nhưng tại sao tất cả mọi bụi cây hồ đào có kích thước như nhau?" Anh-xtanh có thể cho phép mình nói như vậy có nghĩa là thế nào? Phải chăng chỉ để chỉ trích những điều rỗng tuyếch? Tôi không nghĩ rằng mục đích của ông là như vậy. Phải chăng lí do ở đây còn sâu xa hơn. Tôi nghĩ rằng, những nhận xét mà tôi thu được không hoàn toàn ngẫu nhiên. Dù cho chuyện đó xảy ra như thế nào, từ nó tôi rút ra được cho mình cái gì đó trừu tượng là tốt, nhưng

hãy sử dụng mọi công cụ để làm cho nó trở thành dễ thấy hơn. Không có cái gì là quá tốt hoặc quá xấu, quá trữ tình, hay quá thấp kém để làm sáng tỏ những ý nghĩ trừu tượng của các bạn. Môn-ten-hơ nói: "sự thật là cái vĩ đại đến nỗi chúng ta không cần phải bỏ qua cái gì để đi tới nó". Cho nên nếu linh cảm báo trước cho các bạn rằng cần biểu hiện trước lớp học ít nhiều như một nhà thơ hay chút ít như một kẻ trơ trẽn, thì cũng phải nhẫn nhục mà chịu đựng thôi.

§4. BA NGUYÊN LÍ HỌC TẬP

Dạy học là một ngành thủ công nghiệp và giống như mỗi ngành thủ công nghiệp, nó có một số những phương pháp và mẹo. Ở mỗi thầy giáo giỏi đều có phương pháp riêng và không giống bất kì ai.

Mỗi phương pháp có hiệu quả của việc dạy học cần phải thích hợp với phương pháp nhất định của việc học tập. Chúng ta không hoàn toàn biết nhiều về những điều mà quá trình học tập xảy ra như thế nào, nhưng ngay cả bức phác hoạ thô sơ nhất với một số đặc tính rất rõ của nó có thể toả sáng các thủ thuật của người thầy. Hãy cho phép tôi trình bày bức phác hoạ thô sơ này dưới dạng ba "nguyên lí" học tập. cách phát biểu cũng như việc chọn các nguyên lí này là của tôi; nhưng thực chất các nguyên lí này không có gì mới lạ. Chúng được phát biểu nhiều lần trước đây dưới nhiều dạng khác, chúng ra đời do kinh nghiệm của nhiều thế kỉ, được xác nhận bởi ý kiến của nhiều người vĩ đại và ngoài ra được phát biểu nhờ sự nghiên cứu về phương diện tâm lí học của quá trình học tập.

"Các nguyên lí học tập" này cũng có thể được xem như "các nguyên lí dạy học", mà điều này là lí do chủ yếu có lợi cho việc phân tích chung ở đây; tuy nhiên tôi sẽ nói tỉ mỉ hơn ở phần sau.

1. *Học tập tích cực.* Thông thường theo nhiều cách khác nhau, nói việc học tập cần phải tích cực mà không được thụ động hay tái diễn, có nghĩa là chỉ dựa trên sự thụ cảm; khi giới hạn bởi sự đọc sách, nghe giảng hay xem phim mà không kèm theo sự hoạt động tích cực của trí tuệ bản thân thì các bạn có thể học được cái gì và rõ ràng không thể học được nhiều.

Thường tồn tại một ý kiến được công thức hoá (gần giống như trên): cách tốt nhất để học một cái gì đấy là tự khám phá lấy. Lictenbe (nhà vật lí người Đức thế kỉ 18 nổi tiếng như một nhà sáng lập châm ngôn) bổ sung vào đấy một nét đặc sắc: *Những cái gì mà bản thân anh buộc phải khám phá, để lại trong tiềm thức của anh con đường nhỏ mà anh lại có thể sử dụng khi cần thiết.* Cách phát biểu sau đây không đẹp bằng nhưng được áp dụng rộng rãi hơn: *Để việc học tập có hiệu quả nhất, học sinh cần phải tự mình khám phá trong chừng mực có thể một phần lớn tài liệu học tập.*

Nguyên lí học tập tích cực kết thúc tại đây. Nguyên lí này rất cũ, nó là cơ sở tư tưởng của "phương pháp Xô-crát".

2. *Sự kích thích tốt nhất.* Chúng ta nói rằng việc học tập cần phải tích cực; nhưng học sinh sẽ không biểu hiện tính tích cực, nếu ở họ không có lí do để tích cực. Cần kích thích

tính tích cực động não, chẳng hạn bởi sự mong muốn được phần thưởng. Nhưng sự kích thích tốt nhất cho việc học tập là sự thích thú mà tài liệu học tập gợi nên cho học sinh, còn phần thưởng tốt cho hoạt động trí óc căng thẳng là sự sảng khoái đạt được nhờ vào hoạt động như vậy. Nếu ở chúng ta không có cái kích thích tốt nhất, thì cần phải cố gắng thay nó bằng một cái tốt hay thậm chí bằng cái khá tốt: không nên quên những nguồn kích thích khác cho việc học tập, ngoài những cái hoàn toàn mang tính chất nội tại.

Để việc học tập có hiệu quả, học sinh cần phải thấy thích thú khi xem tài liệu học tập, tìm thấy sự hài lòng ngay trong quá trình học tập. Nhưng ngoài những mối kích thích tốt nhất này cho việc học tập còn có những cái khác mà một phần của chúng có thể xem là tốt. (Hình phạt về việc học tập không tự giác có thể là phương pháp tồi nhất trong các phương pháp kích thích công việc của học sinh).

Chúng ta gọi khẳng định này là *nguyên lí kích thích tốt nhất.*

3. *Tính liên tục trong các giai đoạn của quá trình học tập.* Chúng ta bắt đầu từ châm ngôn thường được dẫn của Kan-tơ: *"Mọi nhận thức của con người đều bắt đầu từ những quan sát, rồi từ đó đi đến các khái niệm và kết thúc bằng những tư tưởng"*. Trong câu nói này đã sử dụng các thuật ngữ: "quan sát", "khái niệm", "tư tưởng". Tôi không đủ sức (một người nào đó có đủ sức làm điều này chưa?) khai thác ý nghĩa chính xác mà Kan-tơ đưa vào trong những thuật ngữ này; nhưng tôi đề nghị các bạn cho phép tôi diễn đạt ở đây sự hiểu biết của mình về câu châm ngôn nổi tiếng của Kan-tơ:

Việc học tập bắt đầu từ hành động và sự thụ cảm, rồi từ đó đi đến các từ và các khái niệm và phải kết thúc bằng sự rèn luyện những đặc điểm mới mẻ nào đó của tư chất trí tuệ.

Trước hết, các bạn hãy xét những thuật ngữ trong lời giải thích của tôi về câu châm ngôn trên, theo nghĩa mà các bạn có khả năng minh hoạ bằng những ví dụ từ kinh nghiệm riêng. (Nhắc các bạn nhớ kinh nghiệm riêng là một trong những mục đích mà tôi mong muốn). "Việc học tập" cần làm cho bạn nhớ lại lớp học mà bạn đã có mặt với tư cách là một học sinh hay là một nhà giáo. "Hành động và sự thụ cảm" cần phải gợi được ở các bạn sự hình dung về công việc với những đối tượng cụ thể nào đó: quả bóng hay quả địa cầu, compa và thước, dụng cụ thí nghiệm,... và về những quan sát trên những cái đó.

Sự giải thích cụ thể như vậy về các thuật ngữ đó xuất hiện nhẹ nhàng và tự nhiên khi ta nghĩ về những vật đơn giản, thông thường. Nhưng dần dần có thể học cách phân chia giai đoạn tương tự cả khi làm việc với tài liệu phức tạp hơn. Chúng ta quy ước phân chia ba giai đoạn của công việc: *giai đoạn nghiên cứu, giai đoạn hình thức hoá và giai đoạn tiếp thu.*

Giai đoạn thứ nhất- *giai đoạn nghiên cứu* - gần hơn cả đối với hành động và cảm thụ biểu hiện trước hết ở mức độ linh cảm hay trực quan.

Giai đoạn thứ hai - *Giai đoạn hình thức hoá* - liên quan với sự hình thành thuật ngữ, định nghĩa và chứng minh, được nâng lên đến mức độ cao hơn, mức độ khái niệm.

Giai đoạn thứ ba - *Giai đoạn tiếp thu* - xảy ra sau cùng; nó trả lời cho ý định nắm được "thực chất bên trong" của vấn đề; trong giai đoạn này tài liệu học tập cần phải được

học sinh tiếp thu, cần phải đi vào hệ thống kiến thức của họ, mở rộng tầm hiểu biết, tri thức của họ; giai đoạn này một mặt hình thành con đường đi đến ứng dụng, mặt khác đi đến sự khái quát ở mức độ cao hơn.

Kết luận. *Để quá trình học tập có hiệu quả, giai đoạn nghiên cứu cần phải tiến hành trước giai đoạn sắp đặt lời và sự hình thành các khái niệm, cuối cùng tài liệu học tập cần phải đi vào tiềm lực chung của trí thức học sinh, tạo khả năng nâng cao trình độ tri thức của họ.*

§5. BA NGUYÊN LÍ DẠY HỌC

Thầy giáo cần phải làm quen với quá trình học tập diễn ra như thế nào. Họ cần phải tránh những con đường không có hiệu lực để có được kiến thức và sử dụng tính ưu việt của những con đường có hiệu lực. Để làm được điều đó, họ có thể sử dụng một cách có hiệu quả ba nguyên lí mà chúng ta vừa mới xét, tức là nguyên lí học tích cực, nguyên lí kích thích tốt nhất và nguyên lí các giai đoạn liên tục. Ba nguyên lí học tập đã chỉ ra đồng thời cũng là ba nguyên lí dạy học. Nhưng ở đây cần phải tính đến một điều kiện cần để thu được lợi ích từ các nguyên lí này, thầy giáo cần phải làm quen với chúng không chỉ vì được nghe nói đến, mà họ cần phải cảm thấy một cách sâu sắc về chúng trên cơ sở kinh nghiệm tư duy tốt của riêng mình.

1. *Học tập tích cực*. Những điều mà thầy giáo giảng ở lớp học tất nhiên là quan trọng, nhưng điều mà học sinh nghĩ còn hàng nghìn lần quan trọng hơn. Những khái niệm cần được nảy sinh trong trí tuệ của học sinh, vai trò chính của người thầy trong qá trình này có thể so sánh với vai trò của bà đỡ.

Đó là người dạy bảo kinh điển của Xô-crát, hình thức dạy học tốt nhất phù hợp với thầy giáo - Đối thoại Xô-crát. Thầy giáo phổ thông có ưu thế nhất định hơn thầy giáo đại học, vì họ sử dụng rộng rãi hơn hình thức đối thoại. Nhưng tiếc rằng ở trường phổ thông thời gian cho bài giảng cũng bị hạn chế nghiêm ngặt, do đó không thể tiến hành bài học dưới hình thức vấn đáp. Tuy nhiên nguyên lí cũ của ta vẫn có hiệu lực: hãy cho phép học sinh tự khám phá tới mức tối đa trong hoàn cảnh đã cho.

Tôi tin tưởng rằng điều này có thể làm nhiều hơn so với những cái mà bình thường người ta vẫn làm. Hãy cho phép tôi giới thiệu với các bạn một thủ thuật nhỏ. Hãy tạo khả năng cho học sinh tham gia thiết lập bài toán mà họ cần phải giải. Nếu họ góp phần vào việc thiết lập bài toán thì họ sẽ làm việc tích cực hơn trong việc giải.

Tôi nhận thấy rằng trong công việc của nhà khoa học việc thiết lập bài toán là phần quí giá nhất của sự phát minh. Thường là việc giải một bài toán đòi hỏi sự thấm nhuần thực chất vấn đề và tính đặc sắc của tư tưởng ít hơn so với sự phát biểu nó. Như vậy, khi tạo cho học sinh khả năng đóng góp vào việc tìm điều kiện hợp lí của bài toán, các bạn không chỉ kích thích họ làm việc tích cực hơn mà còn phát triển ở họ cái tư chất mong muốn của trí tuệ.

2. *Sự kích thích tốt nhất.* Người thầy cần phải cảm thấy chính mình như là một thương nhân muốn bán cho thanh niên một số kiến thức toán học. Nhưng nếu thương nhân cảm thấy khó khăn trong việc bán hàng và hàng hoá của anh ta bị ứ đọng vì khách hàng không muốn mua thì anh ta không thể quy toàn bộ lỗi cho khách hàng. Hãy nhớ rằng khách hàng luôn luôn có quyền, về nguyên tắc và đôi khi cả về thực tế. Chàng trai trẻ từ chối việc học toán có thể là đúng. Không nhất thiết học sinh của bạn lười hoặc dốt - có thể chỉ vì anh ta thích thú những cái hoàn toàn khác. Vì rằng trên thế giới có biết bao nhiêu điều thú vị! Và nhiệm vụ của các bạn, những người thầy, những người cung cấp kiến thức, là ở chỗ làm học sinh ham thích toán học, thấy được sự trong sáng và đẹp đẽ của vấn đề mà các bạn đang xét, buộc họ phải hiểu rằng họ không có gì phải ân hận, sau khi đã bỏ nhiều công sức vào bài toán mà các bạn đã đưa ra.

Cho nên thầy giáo cần phải dành sự chú ý đặc biệt vào việc chọn bài toán, cách diễn đạt nó và trao cho học sinh sao cho tốt nhất. Bài toán cần phải sinh động không những theo quan điểm của thầy giáo mà còn theo quan điểm của học sinh. Mong rằng nó gắn liền với kinh nghiệm hàng ngày của học sinh; cũng là tốt nếu như việc thiết lập bài toán liên quan đến câu chuyện vui, chuyện chơi chữ hay một nghịch lí nho nhỏ. Cũng có thể bắt đầu bài toán từ sự kiện nào đó mà học sinh đã biết rõ, đồng thời sẽ bổ ích nếu nó chứa cái gì đó để biểu hiện sự thích thú chung hay khả năng áp dụng. Nếu chúng ta muốn kích thích những nỗ lực sáng tạo của học sinh, thì chúng ta buộc phải cho họ những cơ sở nào đó để thấy rằng những nỗ lực đó của họ không mất đi một cách vô ích.

Chính vì vậy sự thích thú của học sinh là yếu tố kích thích tốt nhất đối với công việc của người giáo viên. Nhưng có những kích thích khác không thể bỏ qua. Hãy cho phép tôi giới thiệu với các bạn một thủ thuật nhỏ. Trước tiên, khi học sinh bắt tay vào công việc, hãy đề nghị học sinh đoán nhận kết quả hoặc thậm chí một phần nào đó của nó. Sau khi đưa ra những giả thuyết nhất định, học sinh ràng buộc mình bằng những cái đó, uy tín và lòng tự trọng của họ trong một mức độ nào đó bây giờ phụ thuộc vào sự kết thúc của công việc mà họ nóng lòng muốn biết sự đoán nhận của mình có đúng hay không? Học sinh sẽ thích thú hơn bài toán của mình và công việc ở lớp, vì vậy các em sẽ không buồn ngủ và không bị lôi cuốn bởi những cái khác.

Tôi nhận thấy rằng trong công việc của nhà khoa học, sự đoán nhận hầu như luôn luôn đi trước chứng minh. Vì vậy, khi để cho học sinh tiên đoán kết quả, các bạn một lần nữa không chỉ kích thích họ làm việc tích cực hơn mà còn tạo điều kiện hình thành ở họ tư chất mong muốn của trí tuệ.

3. *Các giai đoạn liên tiếp.* Nhược điểm cơ bản của các sách giáo khoa về toán ở phổ thông là ở chỗ việc chọn các bài tập trong sách thường hầu như chỉ cần những bài toán mẫu cũ kĩ. Ví dụ cổ truyền(*) là ví dụ có phạm vi ứng dụng hẹp, nó là minh hoạ của một quy tắc và cho thực hành ứng dụng của chỉ một quy tắc đó. Những ví dụ cổ truyền như thế có thể là có ích và thậm chí có thể là cần thiết, điều này tôi không phủ nhận, nhưng ở đây thiếu hai giai đoạn quan trọng của việc học tập: giai đoạn nghiên cứu và giai đoạn tiếp

---

(*) Nguyên văn là "ví dụ theo đường mòn".

thu. Hai giai đoạn này có mục đích gắn liền bài toán đang xét với thực tiễn xung quanh và với những tri thức có từ trước, thứ nhất là trước khi, thứ hai là sau khi tìm được lời giải hình thức. Bài toán cổ truyền rõ ràng chỉ được gắn liền với một quy tắc xác định, mục đích của nó là minh hoạ quy tắc và chưa chắc nó có quan hệ với vấn đề khác nào đó. Vì vậy ở đấy việc tìm kiếm những mối quan hệ sâu xa hơn chưa hẳn là đã có lợi. Trái với những bài toán cũ như thế, nhà trường phổ thông ít nhất thỉnh thoảng phải cho học sinh giải những bài toán sâu sắc hơn, những bài toán bao quát hơn phục vụ cho việc nghiên cứu sau này, đồng thời cả những bài toán khiến cho họ cảm thấy thích thú với việc nghiên cứu khoa học.

Đây là lời khuyên thực tế nho nhỏ: nếu bài tập mà các bạn chuẩn bị để đưa ra ở lớp với mục đích này thì trước hết hãy để cho học sinh nghiên cứu sơ bộ, điều này kích thích họ thích thú đi tới lời giải hình thức của bài toán. Và chớ quên dành một ít thời gian để tranh luận kết quả tìm được. Điều này cũng giúp các em về sau này khi giải các bài toán.

4. Bằng sự tranh luận này, trong khuôn khổ không hoàn toàn đầy đủ, tôi buộc phải giới hạn sự phân tích của mình về ba nguyên lí dạy học: học tập tích cực, kích thích tốt nhất và giai đoạn liên tiếp. Đối với tôi, hình như các nguyên lí này cần phải đi vào mọi yếu tố của công việc hàng ngày của thầy giáo một cách hữu cơ và chúng có thể giúp đỡ họ một cách nghiêm túc trong công tác của họ. Tôi cũng nghĩ rằng, cần phải xuất phát từ ba nguyên lí này để đặt kế hoạch cho khoá học, lập chương trình cho mỗi môn trong khóa học đó và cho mỗi phần trong chương trình từng môn riêng biệt.

Tất cả những nguyên lí này tôi hoàn toàn không có ý định buộc các bạn phải thừa nhận một cách không bàn cãi. Chính vì chúng xuất phát từ một hệ thống nhất định các luận điểm, từ một quan điểm nhất định trong khi quan điểm của bạn có thể hoàn toàn khác. Nhưng trong việc học tập - cũng như nhiều việc khác thường gặp trong cuộc sống - quan điểm của các bạn như thế nào thật ra không quan trọng lắm. Điều quan trọng hơn nhiều là ở chỗ nói chung các bạn có quan điểm nào hay không đối với đối tượng đang xét. Và một điều rất quan trọng là các bạn đã nỗ lực một cách tích cực đến chừng mực nào để trong cuộc sống giữ quan điểm của mình. Những nguyên lí duy nhất mà tôi hoàn toàn bác bỏ, đó là những nguyên lí mà những người tuyên truyền nó không làm theo.

§6. VÍ DỤ

Các ví dụ hơn những quy tắc. Hãy cho phép tôi đi đến những ví dụ, tôi cho rằng những ví dụ cụ thể quý báu hơn nhiều so với bất kì lập luận chung nào. Ở đây tôi tiếp cận đến những vấn đề chính của việc dạy học đối với trình độ phổ thông, cho nên những ví dụ của tôi sẽ liên quan tới những chủ đề này. Thông thường sự phân tích những ví dụ như thế làm cho tôi thoả mãn và tôi có thể nói cho các bạn biết vì sao: tôi cố gắng trình bày chúng để sao cho chúng về mặt nào đó làm cho tôi nhớ lại kinh nghiệm của công tác nghiên cứu riêng của mình. Tôi như người đóng kịch trên sân khấu để giải thích - tất nhiên trong một khuôn khổ hẹp hơn - điều gì đó từ những phát minh quý báu đối với tôi.

1. *Bài toán cho lớp bảy*. Một trong những hình thức cơ bản của nghệ thuật dạy học là kiểu đối thoại Xô-crát. Ở một trong các lớp của trường phổ thông, chẳng hạn ở lớp bảy, thầy giáo có thể bắt đầu cuộc đối thoại như sau:

"Giữa trưa ở Xan-Franxicô là mấy giờ?"

- Nhưng ai cũng biết điều này - một cậu học sinh vui tính có thể trả lời thầy giáo như vậy. Cũng có khả năng cậu ta còn nói là: "Đây là một câu hỏi ngớ ngẩn: tất nhiên là 12 giờ".

" Thế còn ở Xacramento giữa trưa là lúc mấy giờ?"

- Vào lúc 12 giờ - tất nhiên là 12 giờ trưa chứ không phải 12 giờ đêm.

"Thế còn ở Niu Oóc giữa trưa vào lúc mấy giờ?

- Vào lúc 12 giờ.

"Nhưng tôi giả thiết rằng ở Xan-Franxicô và ở Niu Oóc giữa trưa đến vào những thời gian khác nhau, còn các em lại trả lời ở cùng hai nơi đó vào lúc 12 giờ".

- Vâng, giả sử như thế này: ở Xan-Franxicô giữa trưa vào lúc 12 giờ theo giờ tiêu chuẩn phương Tây, còn ở Niu Oóc vào lúc 12 giờ theo tiêu chuẩn giờ phương Đông.

-"Thế còn ở Xacramento theo giờ tiêu chuẩn nào? Đông hay Tây?".

- Tất nhiên là Tây.

"Giữa trưa có đến cùng một lúc đối với những người sống ở Xan-Franxicô và những người sống ở Xacramento hay không? ".

"Các em không thể trả lời ư? Khi đó hãy cố gắng đoán câu trả lời : Ở Xan-Franxicô hay ở Xacramento giữa trưa sẽ đến sớm hơn? Hay cũng có thể là trong hai thành phố này nó đến cùng một lúc?"...

Ý nghĩ của tôi về cuộc trao đổi theo tinh thần Xô-crát với học sinh lớp bảy có thể làm các bạn vừa lòng không. Dù là trả lời thế nào thì các bạn đều có thể hình dung sự tiến triển tiếp sau của cuộc trao đổi. Nhờ những câu hỏi thích hợp, thầy giáo - làm theo Xô-crát - phải làm cho học sinh hiểu được những điều sau đây:

a) Phải phân biệt "giữa trưa thiên văn" và giữa trưa có điều kiện hay "giữa trưa địa phương".

b) Cả hai khái niệm "giữa trưa" đó cần phải được định nghĩa.

c) Phải hiểu giờ tiêu chuẩn là cái gì; tại sao bề mặt quả đất được chia thành những múi giờ và được chia như thế nào.

d) Cần phải phát biểu bài toán của ta như sau: "Giữa trưa thiên văn ở Xan-Franxicô sẽ đến vào giờ nào theo giờ tiêu chuẩn phương Tây?".

e) Dữ kiện duy nhất cần phải biết để giải bài toán đặt ra là kinh độ Xan-Franxicô (gần đủ cho học sinh lớp bảy).

Bài toán không dễ tí nào. Tôi đã thử đưa nó cho hai nhóm thầy giáo của các trường phổ thông; một nhóm giải nó mất khoảng 25 phút, còn nhóm kia - khoảng 35 phút.

2. Cần chỉ ra rằng, bài toán này đối với học sinh lớp bảy có một loại ưu điểm. Cái chủ yếu trong chúng có thể là ở chỗ trong bài toán cố nhấn mạnh ý nghĩa của một quá trình tư duy rất quan trọng (mà các tác giả tuyển tập các bài toán dùng cho trường phổ thông xem thường), *quá trình nhận thức trong những tình huống cụ thể đã cho một khái niệm toán học quan trọng có tính nguyên tắc*. Để giải bài toán về giữa trưa, học sinh cần phải tìm sự phụ thuộc tỉ lệ giữa thời gian và kinh độ: giờ, tương ứng với vị trí cao nhất của mặt trời tại một địa điểm bất kì của mặt đất, thay đổi một cách tỉ lệ với kinh độ của địa điểm đó. So với đa số các bài toán không tự nhiên và ít thiết thực trong tuyển tập các bài toán dùng cho trường phổ thông, bài toán của ta tỏ ra hoàn toàn thiết thực và "cụ thể". Ở các bài toán nghiêm túc trong toán học ứng dụng, việc diễn đạt thích ứng vấn đề luôn luôn là quan trọng và đôi khi quan trọng hơn hết; bài toán nhỏ của ta có thể giới thiệu cho mỗi lớp bảy phổ thông chính là có tính chất đó. Hơn nữa chúng ta nhận thấy rằng bài toán nghiêm túc trong lĩnh vực toán học ứng dụng có thể dẫn tới hiệu quả thực hành nghiêm túc, chẳng hạn dẫn tới việc áp dụng vào quá trình sản xuất tốt nhất; bài toán nhỏ của ta giải thích cho học sinh lớp bảy hệ thống 24 múi giờ, với giờ tiêu chuẩn như nhau trong phạm vi của mỗi múi, cần để làm gì. Nói chung đối với tôi thì bài toán này, nếu như thầy giáo truyền đạt lại với nghệ thuật khá sư phạm, thì có thể giúp cho các nhà khoa học tương lai hay kĩ sư tìm được phương hướng của mình; nó cũng có thể góp phần vào sự mở mang trí tuệ của những học sinh về sau không chuyên dùng toán vào công tác chuyên môn của mình.

Chúng ta cũng thấy rằng, bài toán này có thể là minh hoạ cho các thủ thuật nho nhỏ đã nói ở trước, chẳng hạn như thế có thể kích thích học sinh tham gia một cách tích cực vào việc phát biểu bài toán (xem mục nhỏ 10^0 §5). Nói chung, giai đoạn nghiên cứu cho phép diễn đạt bài toán là cực kì quan trọng (xem mục nhỏ 3 §5). Sau đó cho học sinh đoán nhận nội dung cơ bản của kết quả (xem mục nhỏ 2 §5).

3. *Bài toán cho lớp mười*. Chúng ta xét một ví dụ nữa. Có thể ta bắt đầu từ bài toán quen thuộc nhất về dựng hình: *dựng một tam giác theo ba cạnh của nó*. Vì sự tương tự là nguồn phong phú của những phát minh mới, nên tự nhiên nảy ra câu hỏi: bài toán hình học không gian tương tự là như thế nào? Học sinh phổ thông làm quen ít nhiều với hình học không gian đã có thể diễn đạt nó như sau: *dựng một tứ diện theo sáu cạnh của nó*.

Ở đây ta có thể nhận thấy rằng, bài toán dẫn học sinh khá gần tới bài toán thực hành của môn "vẽ kĩ thuật". Kĩ sư và công trình sư sử dụng các bản vẽ hoàn chỉnh để có tài liệu chính xác cần thiết cho việc chế tạo các chi tiết máy hay cho việc thiết kế các công trình. Ở đây ta tập trung dựng tứ diện khi biết các cạnh của nó. Có thể là chúng ta đã muốn cắt tứ diện này từ một khúc gỗ.

Việt thiết lập bài toán như thế đưa đến đòi hỏi lời giải chính xác của nó nhờ thước và compa và đưa tới thảo luận vấn đề là nên tìm các yếu tố nào của tứ diện với điều kiện đó. Việc trao đổi có phương hướng một cách khéo léo trong lớp học dẫn đến việc xuất hiện sự diễn đạt cuối cùng sau đây:

Trong tứ diện ABCD cho biết độ dài sáu cạnh của nó AB, BC, CA, AD, BD, CD. Lấy tam giác ABC làm đáy của tứ diện, dựng bằng thước và compa các góc nhị diện tạo bởi mặt đáy với ba mặt còn lại.

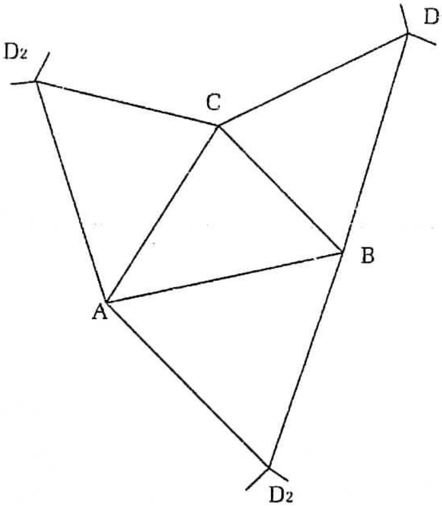
Cần biết các góc đã nói tới, chẳng hạn nếu ta muốn cắt vật thể của ta từ một khúc gỗ; nhưng trong quá trình trao đổi, đối tượng thảo luận có thể là các yếu tố khác của tứ diện, chẳng hạn:

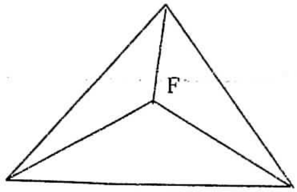
a) Đường cao hạ từ đỉnh D đối diện với đáy.

b) Chân F của đường cao đó nằm trong mặt phẳng tam giác ABC.

Các yếu tố a) và b) có thể giúp ta dựng vật thể; không loại trừ rằng với sự giúp đỡ của chúng, ta tìm được các góc cần thiết; vì vậy cũng nên thử dựng chúng.

4. Rõ ràng dễ dàng dựng được tất cả bốn mặt tam giác của tứ diện, chúng hợp thành một khối trên hình 14.1a (Những cung nhỏ sử dụng khi dựng các mặt được giữ nguyên để các bạn không quên rằng $AD_2 = AD_3$, $BD_3 = BD_1$, $CD_1 = CD_2$).



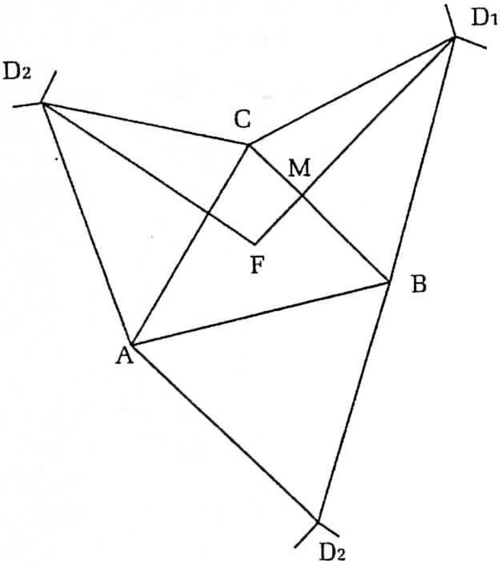


Hình 14.2a. Hãy dựng tứ diện theo sáu cạch của nó *Hình 14.1b. Một khía cạnh của bài toán*

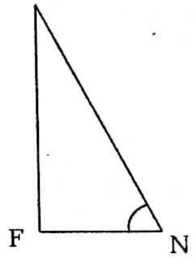
Ta cân lại hình 14.1a trên bìa cứng, vẽ thêm ba đường viền, cắt thành mẫu, gấp lại dọc theo ba đường và cuối cùng dán các viền lại; như vậy chúng ta nhận được một mô hình không gian, trên đó có thể đo sơ bộ đường cao và các góc đã nói trên. Công việc tương tự bằng bìa cứng rất bổ ích, nhưng đó hoàn toàn không là điều mà chúng ta hướng tới: chính là ta phải dựng đường cao, đáy của nó và các góc bằng compa và thước.

5. Ở đây việc "giả thiết bài toán là đã giải" - hoàn toàn hay một phần có thể sẽ giúp đỡ chúng ta. Chúng ta hãy hình dung hình 14.1a sau khi ba mặt bên của tứ diện được nâng lên ở vị trí đòi hỏi (để có điều đó, cho mỗi một trong chúng quay quanh cạnh đáy). Trên hình 14.1b minh hoạ hình chiếu trực giao của tứ diện lên mặt phẳng đáy (tức là lên mặt phẳng ABC), ở đây điểm F là hình chiếu của đỉnh D, tức là chân của đường cao hạ từ điểm D.

6. Việc chuyển từ hình 14.1a đến hình 14.1b có thể hình dung được nhờ mô hình bìa cứng hay không. Ta tập chung sự chú ý vào một trong ba mặt bên, chẳng hạn chú ý vào mặt bên BCD, lúc đầu ở trên cùng một mặt phẳng với tam giác ABC, tức mặt phẳng nằm ngang của hình 14.1a. Ta quan sát tam giác BCD quay quanh cạnh BC, không rời mắt khỏi đỉnh chuyển động duy nhất D_1 của tam giác đó. Đỉnh D_1 này vạch nên một cung tròn. Tâm của đường tròn đã nói thuộc cạnh BC, mặt phẳng chứa đường tròn này vuông với trục quay (nằm ngang) BC, như vậy điểm D_1 chuyển động trong một mặt phẳng đứng. Vì vậy hình chiếu quỹ đạo của nó lên mặt phẳng nằm ngang của hình 14.1a là một đường thẳng vuông góc với BC và đi qua vị trí ban đầu D_1 của điểm chuyển động.



Hình 14.1c. Điểm tới duy nhất của ba nhà tu hành



Hình 14.1d. Phần còn lại thật là đơn giản

Nhưng ngoài tam giác BCD_1 ra còn có hai tam giác quay nữa.

Toàn bộ chúng là ba. Như vậy, có ba đỉnh chuyển động, mỗi một trong chúng vạch lên một quỹ đạo tròn trong mặt phẳng thẳng đứng, đạt tới một điểm nào đó (cụ thể là điểm nào?).

7. Tôi nghĩ rằng, cho tới lúc này độc giả đã phỏng đoán được kết quả (có thể điều này xảy ra ngay từ khi các bạn đọc đoạn cuối mục nhỏ 6): ba đoạn kẻ từ những vị trí ban đầu *(hình 14.1a)* của các điểm D_1, D_2 và D_3 lần lượt vuông góc với các đoạn BC, CA và AB cắt nhau tại một điểm, cụ thể là điểm F. Việc tìm F là mục đích của câu hỏi phụ b) *(hình 14.1c)*. (Để tìm điểm F chỉ cần hai đường vuông góc là đủ; đường thứ ba có thể dùng để kiểm tra độ chính xác của hình vẽ). Phần còn lại là dễ dàng. Giả sử M là giao điểm của các đường thẳng D_1F và BC *(hình 14.1c)*. Hãy dựng tam giác vuông FMD có cạnh huyền $MD = MD_1$ và một cạnh góc vuông *(hình 14.1d)*. Rõ ràng FD là đường cao, còn góc FMD là góc phẳng của nhị diện lập nên bởi đáy ABC và mặt bên DBC, là góc mà ta phải dựng.

8. Một trong các ưu điểm của một bài toán lí thú là ở chỗ nó làm nảy sinh các bài toán lí thú khác.

Chúng ta nhận thấy rằng lời giải nói trên có thể và thậm chí cần phải khơi gợi một số nghi ngờ. Chúng ta đã thu được kết quả minh hoạ trên hình 14.1c (là ở chỗ ba đường vuông góc có mặt trong bài toán của ta cắt nhau tại một điểm) khi xét sự chuyển động của các vật thể quay. Nhưng chính vì kết quả của ta không thuộc về lĩnh vực vật lí, cho nên ta cần phải thiết lập nó bằng các phương pháp thuần tuý hình học, tức là không phụ thuộc vào ý dùng sự chuyển động.

Rõ ràng các lập luận ở trên (xem các mục nhỏ 6 và 7) dễ dàng tách khỏi sự chuyển động và sẽ nhận được kết quả cần tìm dựa vào sự hiệu biết thuần tuý hình học không gian (sự tương giao của các mặt cầu, phép chiếu trực giao - xem mục nhỏ 3, §2 chương 6). Tuy nhiên kết quả này không phải là một định lí hình học không gian, mà là một định lí của hình học phẳng và vì vậy nó cần phải được thiết lập chỉ bằng các phương tiện của hình học phẳng (như thế nào?).

9. Hãy nhận xét rằng, bài toán của ta đối với học sinh lớp mười có thể là sự minh hoạ của một số luận điểm chung mà ta đã nói từ trước. Chẳng hạn như ở đây học sinh có thể (và cần phải) tham gia vào việc phát biểu cuối cùng của bài toán; trong bài toán này giai đoạn nghiên cứu khá rõ ràng và tình huống rất phong phú.

Trong bài toán của ta có một nhân tố nữa, tôi muốn nhấn mạnh một cách đặc biệt: nó được thiết lập để làm cho học sinh chú ý đến. Mặc dù bài toán này không liên quan trực tiếp tới kinh nghiệm hàng ngày của học sinh, như bài toán ta xét trước đây đối với học sinh lớp bảy, nhưng nó xuất phát từ một trong các sự kiện quen thuộc nhất của học sinh (việc dựng một tam giác theo ba cạnh), trong đó ngay từ đầu đã nhấn mạnh tới tư tưởng được nhiều người quan tâm (sự tương tự), nó đã hướng tới những áp dụng thực hành có thể có (vẽ kĩ thuật).

Ngay cả khi chưa biết làm tốt, nhưng với lòng mong muốn lớn, thầy giáo vẫn có thể làm tất cho cả học sinh của mình chú ý đến bài toán đó, có thể trừ ra những học sinh quá tồi.

§7. HỌC GIẢNG DẠY NHƯ THẾ NÀO?

Chúng ta còn trao đổi một vấn đề nữa, nhưng là vấn đề là quan trọng: sự chuẩn bị của thầy giáo. Trong mục này tôi đứng ở vị trí rất thuận tiện, vì hầu như tôi hoàn toàn đồng ý với "quan điểm chính thống". (Ở đây tôi đề cập đến bản "kiến nghị của hội toán học Mĩ về sự đào tạo các thầy giáo toán"; để ngắn gọn, tôi tự cho phép trích dẫn dưới đây tài liệu đó như một "kiến nghị chính thức"). Tôi dừng lại chỉ trên hai điều có liên quan đến các vấn đề mà trước đây tôi đã dành khá nhiều thời gian và công sức, thực tế là toàn bộ công sức nhà giáo của tôi trong thời gian mười năm.

Đại để, một trong các điểm tôi đề cập đến liên quan tới vai trò và nội dung của các chương trình "môn học" (toán) trong hệ thống đào tạo của các thầy giáo tương lai, thứ hai là giáo trình về phương pháp giảng dạy.

1. *Nội dung chương trình các "môn học"*. Bây giờ đã nhiều người thừa nhận một thực tế đáng buồn là thầy giáo các trường phổ thông của ta, nói chung, không nắm vững được môn học của mình. Dĩ nhiên tôi đã gặp các thầy giáo phổ thông được đào tạo tốt, nhưng trong số họ (tôi đã tiếp xúc với một số), có những người có nguyện vọng làm việc đáng khâm phục, tuy nhiên sự chuẩn bị toán học còn thua xa mong muốn công tác của họ. Về phương diện tổng quan của nội dung các chương trình học, có thể các kiến nghị chính thức không thể xem là đã hoàn chỉnh, tuy nhiên chắc chắn việc thực hiện các kiến nghị đó sẽ dẫn tới việc cải tiến căn bản sự đào tạo các thầy giáo. Tôi chỉ muốn chú ý tới một điểm, theo sự tin tưởng sâu sắc của tôi là nên dựa vào các kiến nghị chính thức. Việc làm chủ một môn học nào đó được hình thành từ các kiến thức tích luỹ được và từ các thói quen có được, từ các kĩ năng (know-how) vận dụng các kiến thức tích luỹ được (thông tin). Các kĩ năng đó không thể có được nếu không có cá tính độc lập trong suy nghĩ, độc đáo và sự sáng tạo. Khả năng vận dụng trong toán học là khả năng giải các bài toán, tìm được các chứng minh, phân tích có phê phán các lí giải, sử dụng thành thạo công cụ toán học và nhận thức các khái niệm toán học trong những tình huống cụ thể.

Mỗi người đều tán thành rằng kĩ năng vận dụng trong toán học là quan trọng hơn và thậm chí quan trọng hơn rất nhiều so với một kiến thức. Mọi người đòi hỏi nhà trường phổ thông không những chỉ cung cấp cho học sinh những kiến thức toán học mà còn rèn luyện cho họ kĩ năng vận dụng, tính độc lập, sự độc đáo và khả năng sáng tạo. Tuy nhiên, hầu như không ai yêu cầu những điều tốt đẹp đó ở thầy giáo toán. Phải chăng đó không phải là một ý kiến lập dị? Các kiến nghị chính thức cũng chưa được đề cập đến. Nhưng ai học toán để có được học vị, cần phải nghiên cứu khoa học; tuy nhiên trước khi nhận được học vị, họ được rèn luyện năng lực nghiên cứu độc lập trong các buổi học trao đổi và các xêmina, các xêmina khoa học hay trong khi chuẩn bị thi tốt nghiệp đại học. Không ai tạo khả năng đó cho thầy giáo toán tương lai và trong các kiến nghị chính thức cũng không nói tới, dù dưới dạng nào, việc làm độc lập hay nghiên cứu khoa học. Nhưng nếu thầy giáo không bao giờ học tập lao động sáng tạo gì cả thì làm sao họ có thể gây hứng thú, hướng dẫn, giúp đỡ hay thậm chí đơn giản là ghi chép lại tính tích cực sáng tạo của học sinh? Người thầy tiếp thu mọi kiến thức toán học bằng phương pháp thuần tuý thụ động chắc gì đã thúc đẩy học sinh mình nghiên cứu tích cực môn học. Và hoàn toàn có thể là giáo viên, trong cuộc sống không nảy ra ý nghĩ độc đáo lần nào, lại khiển trách học sinh về tính độc lập mà đáng lí phải khích lệ.

Cụ thể trong vấn đề này, theo tôi, chỗ hổng lớn nhất trong sự hiểu biết về toán học của thầy giáo phổ thông bình thường là ở chỗ họ không có kinh nghiệm lao động toán học tích cực và vì vậy họ không thể là chuyên môn lành nghề trong lĩnh vực họ buộc phải dạy cho học sinh.

Tôi không thể giới thiệu ở đây những phương thức hiệu nghiệm nào đấy, nhưng tôi có thể trao đổi kinh nghiệm của mình. Tôi tổ chức cho giáo viên các buổi **xêmina về giải các bài toán** và hướng dẫn nhiều lần cho họ. Các bài toán nêu ra trong buổi học đó không đòi hỏi các kiến thức phụ nào vượt quá chương trình phổ thông nhưng chúng yêu cầu một trình độ khá cao (đôi khi thậm chí một trình độ rất cao) về khả năng tập trung tư tưởng và

năng lực lập luận sáng suốt - và lao động của thầy giáo để giải các bài toán hoàn toàn có thể gọi là lao động "sáng tạo". Tôi cố gắng tổ chức các xêmina của mình sao cho người dự có thể sử dụng hầu như không sửa đổi tài liệu họ dạy, để họ có thể trau dồi nghiệp vụ, nắm vững toán sơ cấp. Tôi cũng tạo cho họ ngay cả một số khả năng thực hành giảng dạy (khi giao cho thầy giáo tiến hành bài giảng trong một nhóm không lớn gồm các bạn đồng nghiệp của họ) (chi tiết hơn về vấn đề này xem ở trên trong lời nói đầu).

2. *Phương pháp giảng dạy*. Từ kinh nghiệm tiếp xúc với hàng trăm thầy giáo dạy toán, tôi có ấn tượng là các giáo trình phương pháp giảng dạy thường được họ lĩnh hội ít nhiệt tình. Cụ thể là đối với giáo trình thông thường về phương pháp giảng dạy ở khoa toán của các trường đại học sư phạm. Một thầy giáo đã thổ lộ cởi mở với tôi về vấn đề đó như sau: "Trong các buổi học toán, họ cho chúng tôi món bít tết dai ngoách không thể nhá được. Còn các giáo trình phương pháp giảng dạy lại giống món canh xuông, nói chung không có miếng thịt nào". Đối với ta dĩ nhiên cần mạnh dạn trao đổi công khai vấn đề giáo trình phương pháp giảng dạy có cần cho các thầy giáo tương lai không? Phải chăng chúng hoàn toàn không bổ ích? Tôi nghĩ rằng sự trao đổi ý kiến cởi mở về vấn đề này vẫn tốt hơn là những thứ phàn nàn, chắc chắn là ở đây có nhiều vấn đề phức tạp. Nói chung có thể dạy nghề dạy học được không? (nhiều người trong chúng ta xem việc dạy học như là một nghệ thuật - và có thể dạy nghệ thuật được không?). Nói chung có tồn tại những quy tắc giống như phương pháp giảng dạy toán không? (vì những gì mà thầy giáo cung cấp cho học sinh của mình không bao giờ tốt hơn những gì mà chính họ có, nên việc dạy học phụ thuộc vào phẩm chất riêng biệt của thầy giáo và trên thế gian này có bao nhiêu thầy giáo giỏi thì có bấy nhiêu phương pháp dạy học tốt). Thời gian dành để đào tạo giáo viên được phân phối thành các giáo trình toán. Giáo trình phương pháp giảng dạy và các bài giảng thực hành; có thể nên dành thời gian ít hơn cho giáo trình phương pháp giảng dạy được không? (nhiều nước châu Âu dành cho chương trình này sự chú ý ít hơn nhiều so với nước Mĩ).

Tôi hi vọng rằng những thanh niên can đảm, có nghị lực hơn tôi sẽ tìm được thời gian cho sự thảo luận quan trọng và không gì sánh được của vấn đề đó.

Tôi chỉ có thể nói về kinh nghiệm riêng của mình và như đã biết, câu trả lời của tôi cho một vấn đề quan trọng trong các vấn đề đặt ra là: tôi cho rằng chương trình phương pháp giảng dạy là có ích. Thật ra tất cả nhưng gì tôi trình bày ở đây là ý định xây dựng một chương trình như vậy, hay trước tiên, phác hoạ một số những vấn đề mà theo tôi cần được đưa vào giáo trình phương pháp giảng dạy cho thầy giáo toán. Mọi giáo trình tôi đọc cho thầy giáo toán đều được xây dựng sao cho nó có thể dùng làm chương trình phương pháp giảng dạy ở một mức độ nào đó. Tên của một giáo trình thường chỉ là một môn học. Chính thời gian dành cho giáo trình được phân bổ giữa toán và phương pháp giảng dạy: có lẽ chín phần mười thời gian dành cho môn học và một phần mười - cho phương pháp giảng dạy. Tuỳ theo khả năng, giáo trình được xây dựng dưới hình thức đối thoại. Một số nhận xét về phương pháp giảng dạy của tôi hay của học sinh có tính chất ngẫu nhiên, tuy nhiên việc rút ra các sự kiện quan trọng hay lời giải của bài toán hầu như luôn luôn được kết thúc bằng sự thảo luận khía cạnh phương pháp giảng dạy của vấn đề. "Các bạn có thể

áp dụng điều đó vào bài giảng trong lớp của các bạn được không?" - tôi hỏi lớp học - "Điểm nào của chương cho phép sử dụng như vậy? Nên chú ý đặc biệt đến gì? Các bạn đã có ý định trình bày cho lớp học thế nào?" Các câu hỏi thuộc loại như thế (được phát biểu một cách thích đáng) cũng được đưa một cách có hệ thống vào các phiếu câu hỏi trong kì thi. Tuy nhiên điều quan tâm chính của tôi là ở chỗ việc lựa chọn các bài toán (giống như hai bài toán đã xét trong chương này) minh hoạ cho mặt này hay mặt khác của quá trình dạy học.

3. Kiến nghị chính thức gọi giáo trình phương pháp giảng dạy là "giáo trình về sự nghiên cứu các kế hoạch và chương trình" (Curriculum-stuty courses) và nó không được hùng hồn lắm trong vấn đề đó. Tuy thế các bạn có thể tìm thấy ở chúng một lời khuyên, đối với tôi là tuyệt diệu. Điều khuyên đó như sau: giáo viên có ý định đọc giáo trình phương pháp dạy toán cần phải nắm khá vững cả toán học. Tôi cũng muốn nói thêm rằng anh ta cần phải có kinh nghiệm nhất định trong công tác nghiên cứu khoa học, dù là khiêm tốn nhất. Nếu anh ta không có kinh nghiệm như thế thì làm sao có thể kích thích được người nghe, một trong các phẩm chất quan trọng nhất của người thầy giáo tương lai, tinh thần của sự nghiên cứu sáng tạo.

Tôi đã làm cho bạn cảm thấy tương đối mệt mỏi bằng những lời nói huyên thuyên của một người già. Nhưng từ điều đó bạn có thể thu được một ý nào đó. Một cách có cân nhắc, tôi nêu ra các mệnh đề sau đây, rút ra từ cuộc nói chuyện của chúng ta bổ sung cho "kiến nghị chính thức" của hội Toán hai điểm sau đây:

I - Việc đào tạo thầy giáo toán cần phải bao gồm các yếu tố lao động độc lập (sáng tạo) ở trình độ thích hợp dưới hình thức các xêmina (giải các bài toán hay dưới một hình thức khác nào đấy.

II - Các giáo trình phương pháp giảng dạy cần phải liên hệ một cách chặt chẽ với các chương trình toán học hay với việc dạy thực hành. Nếu có thể, phải để các thầy giáo ở trường đại học có kinh nghiệm làm các công tác nghiên cứu khoa học cũng như có kinh nghiệm thực tế giảng dạy, phụ trách các giáo trình này.

§8. VỊ TRÍ CỦA THẦY GIÁO

Nếu như tôi nhắc đến, các giáo trình tôi giảng cho các thầy giáo ở một mức độ nào đó là các giáo trình phương pháp giảng dạy. Khi đọc chúng, tôi luôn luôn chú ý nhấn mạnh vào các vấn đề có thể có ích cho thầy giáo trong công việc hàng ngày của họ. Vì vậy tôi hoàn toàn không thể bỏ qua vấn đề về các nhiệm vụ người thầy giáo phải giải quyết hàng ngày và về vị trí của họ. Dần dần các nhận xét của tôi đã có hình thức châm ngôn và cuối cùng tìm được cách phát biểu tóm tắt của mình dưới dạng "mười điều khuyên đối với thầy giáo" sau đây:

Mười điều khuyên đối với thầy giáo:

1) Hãy thích thú với môn học của mình.

2) Hãy hiểu biết môn học của mình.

3) Hãy biết, bằng phương pháp nào có thể học những gì cần thiết cho bạn. Phương pháp học tập tốt nhất chính là tự mình khám phá lấy.

4) Hãy biết cách hiểu học sinh theo nét mặt của họ. Hãy cố gắng thấy họ chờ mong điều gì ở bạn, hiểu những khó khăn của họ; hãy biết tự đặt mình vào vị trí của họ.

5) Đừng hạn chế ở những "thông tin trơn". Hãy cố gắng rèn luyện cho học sinh những thói quen nhất định, tư chất cần thiết của trí tuệ và thói quen làm việc có phương pháp.

6) Hãy cố gắng dạy cho họ biết phán đoán.

7) Hãy cố gắng dạy cho họ biết chứng minh.

8) Hãy tìm trong bài toán của bạn những gì có ích khi giải các bài toán khác. Theo tình huống cụ thể đã cho, hãy cố gắng phát hiện phương pháp chung.

9) Chớ có tiết lộ điều bí mật ngay từ đầu, hãy để cho học sinh thử phán đoán nó trước khi bạn giải cho họ. Hãy để cho chính học sinh tìm được càng nhiều càng tốt.

10) Hãy sử dụng những chỉ dẫn gợi ý, nhưng không ép buộc theo ý của mình.

Bây giờ tôi muốn thêm vào mười quy tắc này những lời bình nho nhỏ.

Khi diễn đạt các quy tắc này, tôi chú ý tới những người tham gia các buổi xêmina cho các thầy giáo toán ở trường phổ thông, tuy nhiên các quy tắc của ta áp dụng được cho mọi hình thức giảng dạy, cho mọi môn học được trình bày ở mọi trình độ. Nhưng chính trong nhà trường phổ thông và trước các thầy dạy toán, mới có những khả năng lớn nhất của việc áp dụng một số các quy tắc đó; đặc biệt đối với các quy tắc 6, 7 và 8.

Mười điều khuyên này củng cố uy tín của ai? Bạn đồng nghiệp thân mến! Hãy đừng để bị lệ thuộc vào một uy tín nào, hãy chủ đề cao kinh nghiệm riêng và phán đoán riêng riêng dựa vào kinh nghiệm đã hướng dẫn các bạn. Bạn hãy cố gắng thấy một cách rành rọt ý nghĩa của một điều khuyên này khác trong tình huống cụ thể mà bạn đã gặp. Hãy thử nghiệm điều khuyên đó trong lớp học và rút ra kết luận cuối cùng chỉ sau khi phân tích một cách tỉnh táo thí nghiệm đã đưa ra.

Bây giờ chúng ta lần lượt xét 10 nguyên tắc này, chú ý đặc biệt đến vấn đề dạy toán.

1. Chỉ có một phương pháp dạy học tối ưu! Nếu thầy giáo thích thú môn học của mình, thì toàn lớp học sẽ thích thú.

Có lẽ nhận xét này đủ để làm rõ điều khuyên thứ nhất và là chủ yếu nhất của thầy giáo: Hãy thích thú môn học của mình.

2. Nếu môn học không làm bạn thích thú, thì hãy từ chối việc dạy, vì bạn không bao giờ có thể trình bày tốt nó được. Sự thích thú là điều kiện hoàn toàn *cần thiết* (không thể thiếu được), tuy nhiên điều kiện đó là chưa đủ. Nhiệt tình chân thật nhất và sự phong phú nhất về các thủ thuật, phương pháp không giúp bạn giải thích được cho người khác những gì mà bạn chưa hiểu kĩ.

Nhận xét này đủ để làm điều khuyên thứ hai rõ ràng: *Hãy hiểu biết môn học của mình.*

Thích thú môn học của mình và biết nó là cần thiết cho thầy giáo. Tôi đặt sự thích thú vào vị trí thứ nhất, vì rằng trong trường hợp có sự thích thú thực sự ở các bạn thì sẽ có

nhiều điều kiện để trau dồi các kiến thức cần thiết, trong khi đó ngay khi có một hiểu biết nào đó với môn học mà không có sự thích thú thì cũng dễ tạo ra những thầy giáo cực kém.

3. Bạn có thể thu được nhiều điều bổ ích khi đọc một cuốn sách tốt hay khi nghe một bài giảng hay làm sáng tỏ mặt tâm lí học của quá trình học tập, tuy nhiên cả việc đọc sách lẫn việc nghe bài giảng không hoàn toàn là những đặc điểm tất yếu của quá trình đó và đối với điều đó hoàn toàn không đủ: các bạn cần phải biết *bằng phương pháp nào có thể học những gì cần thiết cho bạn*, các bạn cần phải trở nên thân thiết với quá trình học tập dựa vào kinh nghiệm riêng, kinh nghiệm có được trong quá trình nghiên cứu độc lập và thu được từ sự quan sát các học sinh của mình.

Chỉ tán thành nguyên lí mà không có chính các nguyên nhân kích thích bên trong là không tốt, còn tồi hơn khi chỉ nói xuông tới nguyên lí. Tuy nhiên, có trường hợp hoàn toàn không thể cho phép mình thoả mãn với những hiểu biết nông cạn hay sự nhất trí bên ngoài với nguyên lí - ở đây tôi chú ý tới nguyên lí dạy học cơ bản - nguyên lí học tập tích cực. Các bạn cần phải tự làm sáng tỏ rằng trong quá trình học tập, nguyên lí này giữ vị trí trung tâm. *Phương pháp học tập tốt nhất chính là tự mình khám phá lấy.*

4. Ngay cả khi nắm vững các kiến thức thực sự, khi biểu lộ sự thích thú sinh động và khi hiểu quá trình học tập ở một mức độ nào đấy, bạn vẫn có thể là một thầy giáo yếu. Tôi cho rằng trường hợp đó không thể xem là bình thường, nhưng nó không là hạn hữu. Trong chúng ta có người đã từng gặp những thầy giáo, hoàn toàn có uy tín trên mọi mặt, nhưng không biết cách tiếp xúc với lớp học của mình. Để việc giảng dạy, được chỉ đạo bởi một cá tính - bởi thầy giáo, có kết quả thì việc học tập môn học của các cá tính khác - là học sinh, cần phải có một sự tiếp xúc nhất định giữa họ: thầy giáo cần phải phân tích theo quan điểm của học sinh; cần biết hỗ trợ học sinh vào lúc cần thiết. Lời khuyên sau đây căn cứ vào đó: *Hãy hiểu học sinh theo nét mặt của họ. Hãy cố gắng thấy họ chờ mong cái gì ở bạn, hiểu khó khăn của họ; hãy biết tự đặt mình vào vị trí của họ.*

Sự đáp ứng của học sinh với những điều mà bạn dạy cho họ tuỳ thuộc vào trình độ đào tạo, những dạng hoạt động của họ về sau, những thích thú của họ. Vì vậy các bạn hãy luôn luôn nhớ và chú ý xem họ biết và không biết cái gì, họ muốn tìm hiểu gì và điều gì hoàn toàn không tác động đến họ, họ cần phải biết và họ có thể không biết cái gì.

5. Bốn quy tắc trước là cơ sở nghệ thuật sư phạm. Gộp chúng lại thành lập cái giống như điều kiện cần và đủ của việc dạy học có nhiều kết quả. Nếu các bạn thích thú môn học của mình và hiểu biết nó, nếu ngoài ra các bạn có thể tự đặt mình vào vị trí học sinh và thấy được điều gì kích thích việc học tập và điều gì gây trở ngại cho học tập, thì bạn đã là thầy giáo giỏi hay chẳng bao lâu bạn sẽ là thế: người ta chỉ có thể yêu cầu ở bạn một số kinh nghiệm nào đó.

Ta còn phải khám phá một số hệ quả của các quy tắc trước, phần lớn liên quan đến quan điểm của thầy giáo toán ở trường phổ thông.

Mọi kiến thức bao gồm một phần là thông tin "kiến thức thuần tuý" và một phần là kĩ năng (know-how). Kĩ năng là một nghệ thuật, là khả năng vận dụng những hiểu biết có

được ở bạn để đạt được mục đích của mình; kĩ năng còn có thể đặc trưng như toàn bộ thói quen nhất định; cuối cùng, kĩ năng là khả năng làm việc có phương pháp.

Trong toán học, kĩ năng là khả năng giải các bài toán, thực hiện các chứng minh cũng như phân tích có phê phán các lời giải và chứng minh nhận được. Kĩ năng trong toán quan trọng hơn nhiều so với kiến thức thuần tuý, so với thông tin trơn. Vì vậy điều khuyên sau đây có một ý nghĩa quan trọng đối với thầy giáo toán: *Đừng có hạn chế chỉ ở sự thông báo các sự kiện. Hãy cố gắng rèn luyện cho học sinh những thói quen nhất định, tư chất cần thiết của trí tuệ và thói quen làm việc có phương pháp.*

Vì kĩ năng trong toán học quan trọng hơn kiến thức nên theo tôi trong việc dạy toán, việc dạy cách nào là quan trọng hơn nhiều, so với việc bạn dạy cái gì.

6. Trước hết hãy phán đoán rồi sau hãy chứng minh, thông thường sự phát minh là như vậy. Bạn cần phải biết điều đó (từ kinh nghiệm riêng là tốt nhất) và ngoài ra bạn cần phải hiểu rằng thầy giáo toán có nhiều khả năng ưu việt để thể hiện vai trò của phán đoán trong phát minh và như vậy tạo điều kiện cho việc phát triển ở học sinh tư chất trí tuệ đó, có một ý nghĩa cực kì quan trọng trong mọi công việc nghiên cứu. Điều đó không phải ai cũng thấy hết một cách đầy đủ, chính vì vậy nó đáng được chú ý đặc biệt. Tôi muốn rằng các bạn sẽ quan tâm tới các học sinh của mình về mặt này. *Hãy cố gắng dạy cho họ biết phán đoán.*

Những học sinh yếu và nông nổi có thể đưa ra những phán đoán và mệnh lệnh "vu vơ" nhất. Những gì chúng ta phải dạy cho các em, đó là sự phán đoán "có mục đích rõ ràng", "linh lợi", "hợp lí". Sự phán đoán hợp lí trên cơ sở áp dụng thận trọng các phép quy nạp và tương tự, nói tóm lại bao gồm mọi giai đoạn của những lập luận có lí giữ vai trò quan trọng trong mọi phương pháp khoa học.

7. "Toán học là một nhà trường tốt của các lập luận có lí". Khẳng định đó tổng kết các kết luận nằm trong cơ sở của quy tắc trước; nó có thể làm một vài người nào đó ngạc nhiên và nó mới phát sinh hoàn toàn gần đây; dường như tôi có vinh dự là tác giả của nó.

"Toán học là một nhà trường tốt của các suy luận diễn dịch (chứng minh)". Khẳng định này không làm một ai phân vân - có thể là một biến dạng nào đấy của nó đã có từ lâu như chính toán học. Thực ra ý nghĩa của nó còn lớn hơn nhiều: phạm vi của toán học là toàn bộ lĩnh vực các suy luận chứng minh thuộc mọi khoa học đã đạt tới trình độ phát triển, trong đó các khái niệm có thể được biểu thị dưới hình thức trừu tượng, lôgic toán. Thấp hơn trình độ đó không có chỗ cho suy luận chứng minh đúng (chẳng hạn trong cuộc sống hàng ngày của ta những suy luận có kèm theo "chứng minh" chặt chẽ rất ít gặp). Rõ ràng (và tôi thấy không cần thiết dẫn chứng một cách rộng rãi quan điểm đã được mọi người thừa nhận đó) rằng thầy giáo toán cần phải cho toàn thể học sinh của mình (có thể trừ ra học sinh lớp dưới) làm quen với các suy luận có chứng minh. *Hãy cố gắng dạy cho họ biết chứng minh.*

8. Kĩ năng, các thói quen là những bộ phận quan trọng nhất của toán học, quan trọng hơn nhiều so với các kiến thức đơn thuần, các sự kiện và định lí nhất định. Nhưng dạy kĩ

năng như thế nào? Học sinh có thể tiếp thu thói quen cần thiết chỉ bằng cách bắt chước và đặc biệt bằng thực hành.

Khi trình bày lời giải của bài toán, hãy nêu bật các khía cạnh bổ ích của nó. Một khía cạnh nhất định của lời giải có thể gọi là "bổ ích", nếu nó đang được bắt chước, tức là nếu có thể sử dụng nó không chỉ đối với việc giải một bài toán nào đó, mà cũng có thể sử dụng nó đối với việc giải các bài toán khác và đặc điểm đáng chú ý nào càng hay được sử dụng thì phải xem nó là càng bổ ích. Hãy nhấn mạnh những đặc điểm bổ ích của lời giải không chỉ bằng sự tán dương (điều này thậm chí có thể gây tác dụng ngược lại), mà chủ yếu•bằng bản lĩnh của mình. Có một chút đóng kịch thì rất tốt (người thầy giáo giỏi cần phải ít nhiều là một diễn viên). Khi nêu bật, có hiệu quả, một đặc điểm có thể biến lời giải của bạn thành lời giải có tính chất điển hình, thành phương pháp bổ ích mà khi bắt chước học sinh có thể giải được nhiều bài toán bổ ích khác. Từ đó rút ra quy tắc: *Hãy tìm trong bài toán của mình những gì có thể có ích khi giải các bài toán khác. Theo tình huống cụ thể đã cho, hãy cố gắng phát hiện phương pháp chung.*

9. Tôi muốn giới thiệu cho các bạn một thủ thuật nho nhỏ mà mỗi thầy giáo đều cần phải biết: khi bắt đầu thảo luận bài toán, hãy để cho học sinh phán đoán lời giải hay đáp số. Một học sinh nảy ra sự phán đoán nào đó và mạnh dạn nói to lên thì em đó sẽ có trách nhiệm về sau- Đừng sợ rằng sau đó sẽ mất tập trung: em đó sẽ theo dõi cách giải để biết được mình phán đoán có đúng không.

Thủ thuật nho nhỏ đó có thể xem như trường hợp rất đặc biệt của quy tắc sau đây, là một phần của các quy tắc 3 và 6. *Chớ có tiết lộ điều bí mật ngay từ đầu. Hãy để học sinh thử phán đoán trước khi bạn giải cho họ. Hãy để cho chính học sinh tìm được càng nhiều càng tốt.*

Thực ra vinh dự của sự phát minh quy tắc này thuộc về Vonte, ông phát biểu nó dưới dạng câu cách ngôn sau đây: "Le secret d'être ennuyeux, c'est de tout dire". Bí quyết để làm cho người ta chán là nói hết tất cả.

10. Một học sinh đưa cho tôi xem kết quả tính toán khá dài. Khi nhìn thoáng qua dòng cuối cùng, tôi thấy rằng kết quả tính toán không đúng, tuy nhiên tôi không vội báo cho học sinh biết về điều đó. Tôi thích "lướt" qua mọi tính toán, dòng tiếp dòng: "bước đầu anh ta làm tốt. Phép tính thứ nhất của anh đúng, phép tính tiếp theo cũng đúng; anh ta làm như thế và như thế. Và dòng tiếp theo cũng không có những chỗ sai. Thế anh nghĩ sao về dòng này? Chỗ sai bắt nguồn chính trong dòng này? và nếu cậu học sinh tự phát hiện mình phát hiện được điều đó thì anh ta có thể học được đôi chút; còn nếu như tôi nói ngay: "Điều đó không đúng", thì cậu học sinh có thể bực mình và không lắng nghe tôi nói. Còn nếu tôi tự cho phép luôn mồm nói: "Điều đó không đúng", thì học sinh sẽ căm thù tôi và mọi nỗ lực về sau của tôi liên quan đến chính học sinh đó đều trở nên vô ích.

Bạn đồng nghiệp thân mến! Hãy tránh nói "Em đã làm sai". Thay vào đó hãy nói: "Nói chung, em làm đúng, nhưng..." Hãy tin vào tôi - đó không phải là đạo đức giả mà chỉ là lòng nhân đạo. Có thể là quy tắc 4 gợi cho bạn phương pháp như thế. Tuy nhiên

điều khuyên đó có thể phát biểu hình thức rõ ràng hơn. *Hãy sử dụng những chỉ dẫn gợi ý, nhưng không ép buộc theo ý mình.*

Hai quy tắc cuối cùng của ta, 9 và 10, đều đi tới cùng một mục đích: chúng cho phép học sinh được tự do và phát huy sáng kiến hiện có tới mức tối đa trong các điều kiện học tập. Bị ràng buộc bởi thời gian eo hẹp, thầy giáo toán thường cố tình vi phạm các quy tắc đó, tức làm trái với nguyên tắc *học tập tích cực*. Thỉnh thoảng người thầy vội thu nhận lời giải. Người thầy có thể đưa ra khái niệm hay phát biểu quy tắc quá nhanh không có sự chuẩn bị đầy đủ để học sinh thấy được sự cần thiết của khái niệm hay của quy tắc như vậy. Đôi khi thầy giáo có thể hành động theo nguyên tắc *deus ex machina*, tức là dùng thủ thuật (chẳng hạn, kẻ một đường hỗ trợ khôn ngoan nào đó trên hình vẽ) dẫn ngay đến kết quả đòi hỏi, nhưng học sinh trong cuộc sống không bao giờ hiểu được bằng cách nào người ta có thể nghĩ được thủ thuật đã đổ lên họ giống như chuyện hoang đường.

Có nhiều điều quyến rũ người thầy vi phạm quy tắc đó. Vì vậy ta nên chú ý nhấn mạnh về một số khía cạnh khác của nó:

Hãy cố gắng để học sinh của bạn đặt các câu hỏi; hay chính bạn hãy đặt các câu hỏi có thể nảy sinh ở học sinh.

Hãy cố gắng sao cho học sinh của bạn biết trả lời các câu hỏi hay chính bạn trả lời các câu hỏi đó, nhưng ở mức độ học sinh của bạn có thể trả lời được.

Trong mọi tình huống, hãy cố gắng tránh trả lời các câu hỏi đôi khi không nảy ra ở một ai kể cả ở chính bạn.

BÀI TẬP VÀ CHÚ THÍCH BỔ SUNG CHO CHƯƠNG 14

PHẦN 1

1. Lấy kinh độ Xan-Franxicô bằng $122^0 25'41''$. Hãy trả lời câu hỏi d) mục nhỏ 1, §6.

2. *Các năm nhuận*. Năm thường có 365 ngày, năm nhuận có 366 ngày. Năm thứ n, n không chia hết cho 100 (xem dưới đây), là năm nhuận khi và chỉ khi n là bội số của 4. Năm thứ n, trong đó n là bội của 100, là năm nhuận khi (và chỉ khi) n là bội của 400. Chẳng hạn như các năm thứ 1968 và 2000 là các năm nhuận, còn các năm thứ 1969 và 1900, không phải là năm nhuận. Các quy tắc này đã được giáo hoàng Gri-gô-ri thiết lập ở thế kỉ XIII.

Cho đến giờ ta chỉ nói tới "năm thường", số này cần phải nguyên. Năm thiên văn là thời gian Trái Đất quay trọn một vòng xung quanh Mặt Trời. Giả thiết rằng: "Năm Gri-gô-ri" phù hợp hoàn toàn với năm thiên văn, hãy tìm thời gian của năm thiên văn.

3. Dùng các chỉ dẫn ở mục nhỏ 8^0, §6, hãy chứng minh mệnh đề rút ra từ hình 14.1c bằng phương pháp hình học không gian.

4. (Tiếp tục) Hãy chứng minh mệnh đề đó bằng phương pháp hình học phẳng.

5. Trong mục nhỏ 9, §6 có nhắc đến một số câu hỏi đã xét từ trước và được minh hoạ qua các bài toán trình bày trong các mục nhỏ 3 - 8, §6. Bạn có thể kể ra những câu hỏi khác thuộc loại như thế được không?

PHẦN 2

6. *Tại sao lại đúng là cách giải toán?*. Tôi giữ ý kiến cho rằng: việc dạy giải bài toán phải là một bộ phận quan trọng của nhiều giáo trình, rất khác nhau ngay cả về nội dung và nó phải là một phần không thể tách được của mọi giáo trình toán học có ích trong trường phổ thông. Lí do đó, như đã nhấn mạnh trước đây (xem mục nhỏ 5 lời nói đầu và §2 của chương này), là cơ sở của cuốn sách này và của các cuốn sách và công trình khác cùng loại của tôi. Nếu các chương trước chưa thuyết phục được bạn đọc tin vào sự đúng đắn của quan điểm đó, thì sau đây vị tất tôi có thể giúp được gì cho bạn. Tuy vậy, tôi tự cho phép đưa ra thêm một số nhận xét cho vấn đề vai trò của việc giải toán trong chương dạy học ở trường phổ thông.

1) Ở đây chúng tôi nói đến việc dạy toán ở trường phổ thông và về mục đích của nó. Cách tiếp cận chính và thực tế cho vấn đề này cần phải giả thiết khả năng vận dụng vào thực hành tài liệu học sinh sẽ học. Dĩ nhiên, các học sinh thường là khác nhau: Một số có khả năng vận dụng nhiều hơn những điều người ta dạy cho họ, còn một số khác có khả năng vận dụng ít hơn; các loại học sinh tương ứng có thể chiếm các tỉ lệ khác nhau trong tổng số học sinh. Điều rất mong muốn là có số liệu thống kê đáng tin cậy đối với vấn đề đó, tuy nhiên điều đó chưa chắc đạt được. Các ước lượng định lượng tôi sẽ dùng dưới đây đều thô thiển và chưa được bổ sung bằng một sự góp ý kiến nào, tôi đưa chúng vào bài chỉ để được cụ thể hơn.

2) Ta xem rằng các nhóm toán trong khối các trường phổ thông (đại số, hình học,...) phù hợp với viễn cảnh sử dụng toán vào nghề nghiệp trong tương lai được phân thành ba bộ phận: các nhà toán học, những người sử dụng toán học và những người không sử dụng nó trong tương lai.

Ta khoanh một cách tương đối tuỳ tiện các giới hạn của nhóm thứ nhất, xếp vào "các nhà toán học" hay xếp vào "các nhà chuyên toán" cả các nhà vật lí lí thuyết, các nhà thiên văn và các kĩ sư phải sử dụng toán vào mục đích nghiên cứu khoa học. Tổng cộng họ chiếm khoảng 1% số học sinh (số người về sau nhận học vị bác học trong lĩnh vực khoa học về toán xấp xỉ bằng 0,1%).

Các kĩ sư, các nhà khoa học không là nhà toán học (kể cả một số nghiên cứu khoa học xã hội), thầy giáo toán và một số các đối tượng khác... thuộc vào những người sử dụng toán vào nghề nghiệp của mình nhưng không phải là những nhà chuyên môn trong lĩnh vực đó; ta cũng xếp vào loại đó những người không phải sử dụng toán vào công tác chuyên môn của mình nhưng cũng cần một số kiến thức về toán để nghiên cứu có kết quả một số lĩnh vực khác, (chẳng hạn những người tốt nghiệp các trường đại học kĩ thuật, mà phần lớn sẽ trở thành những thương gia hay viên chức trong các cơ quan). Tổng cộng những người sử dụng toán có thể gồm khoảng 29% tổng số học sinh.

Nhiều người trong số học sinh còn lại về nguyên tắc có thể sử dụng toán học, nhưng thực ra họ không phải đụng tới quá chương trình toán học trường phổ thông cấp một. Có

thể xem là 70% - điều đó mặc dù là thô thiển, nhưng ước lượng số học sinh sẽ không sử dụng toán không phải không có cơ sở; loại này gồm hầu hết các nhà kinh doanh, các luật sư, những văn nghệ sĩ tương lai...(*)

3) Chúng ta không biết trước ai trở thành gì trong tương lai, vì vậy ta không thể xếp trước cho học sinh này hay học sinh khác vào một loại xác định. Từ đó suy ra rằng việc dạy toán nên tiến hành phù hợp với hai nguyên tắc:

Một là, mỗi học sinh cần phải có khả năng rút ra điều bổ ích nào đó từ những gì họ được học, không phụ thuộc vào công việc tương lai của em đó.

Hai là, cần phải làm cho những học sinh có khả năng nhất định về toán say mê môn khoa học đó mà không làm cho họ chán.

Tôi xuất phát từ giả định rằng độc giả nhất trí với các nguyên tắc đó, nếu không toàn bộ thì ít ra là một phần. Tôi tin chắc là việc đặt kế hoạch dạy học sẽ là thiếu trách nhiệm khi không chú ý thường xuyên và thận trọng đến các nguyên lí đó.

Các bạn hãy cho phép tôi miêu tả ngắn gọn lợi ích mà ba loại học sinh đã nhắc đến (xem mục nhỏ 2) có thể rút ra cho mình khi nghiên cứu cách giải các bài toán.

4) Việc biết cách giải bài toán dĩ nhiên giả thiết rằng học sinh đã quen thuộc với nội dung phi toán của bài toán, tuy nhiên nó còn đòi hỏi rất nhiều thói quen và tư chất nhất định của trí tuệ mà trong cuộc sống hàng ngày chúng ta gọi là sự khôn ngoan. Thầy giáo mong muốn mình có ích như nhau đối với mọi học sinh của mình, kể cả những người sẽ sử dụng nó. Cần phải dạy quá trình giải toán sao cho dường như có một phần ba là toán và hai phần là sự khôn ngoan thông thường. Có thể là việc rèn luyện sự khôn ngoan và thói quen tư duy có ích cho học sinh đã không đơn giản như vậy, nhưng nếu thầy giáo toán làm được điều đó thì chính là đã giúp đỡ thực sự học sinh bất kể sau này họ làm gì. Rõ ràng sự giúp đỡ đó là chủ yếu nhất vì đã giúp cho 70% số học sinh mà trong cuộc sống sau này sẽ không cần đến toán học ứng dụng.

29% số học sinh sẽ sử dụng toán cần phải có được thói quen nhất định (chẳng hạn, làm thạo các phép biến đổi đại số) cần thiết để kế tục sự giáo dục của họ; tuy nhiên chính những học sinh đó với tư chất trí tuệ thực hành, sẽ học một cách miễn cưỡng các kĩ năng, các biến đổi hình thức, nếu họ không tin rằng nó phục vụ cho mục đích cụ thể và có thể có ích cho họ ở một nơi nào đó. Thầy giáo có thể chứng minh sự cần thiết của việc học những kĩ năng toán học, tốt nhất bằng biểu thị hiệu quả của nó ở việc giải toán cụ thể, lí thú và nảy sinh một cách tự nhiên.

Các nhà chuyên toán tương lai gồm khoảng 1% tổng số học sinh nhưng việc phát hiện họ là một việc làm quan trọng bậc nhất, vì rằng nếu họ chọn không đúng nghề nghiệp thì tài năng của họ rất cần cho xã hội ngày nay, có thể trở nên vô ích. Quan trọng nhất trong những gì mà thầy giáo trường phổ thông có thể làm cho số 1% đó chính là gợi lên trong họ sự thích thú toán học (việc họ học trong trường phổ thông hơi nhiều hay ít tài liệu vị tất đã có ý nghĩa bởi vì trong mọi trường hợp đó chỉ là một phần rất nhỏ những gì

(*) Cuốn sách này viết vào năm 1962. Tình hình thay đổi nhiều: số người dùng toán đã tăng lên. Rõ ràng các nhà "kinh doanh" không thể không sử dụng toán kinh tế, trong đó có phần toán không phải ở cấp 1 phổ thông mà ở bậc đại học.

họ cần phải nắm được trong tương lai). Như vậy, việc giải toán là con đường rộng lớn đi vào toán học - tuy vậy, không phải là con đường duy nhất và không nhập vào các con đường quan trọng khác (nhận xét bổ sung 7). Ta chú ý rằng ngoài các bài toán bình thường, thầy giáo nhất thiết phải xét một số bài toán mặc dù khá khó và đòi hỏi thời gian nhiều hơn nhưng có vẻ đẹp của toán học ngày nay và nội dung sâu sắc (xem chương 15).

5) Tôi hi vọng, như đã nói về điều đó trước đây, rằng những lí lẽ có lợi cho việc dạy giải toán trong nhà trường phổ thông có thể tìm thấy trong cả hai phần của cuốn sách này và trong mọi công trình khác của tôi theo hướng đó. Một số vấn đề đặc biệt liên quan tới vấn đề này sẽ được chú ý một cách đặc biệt về sau.

7. *Giải toán và xây dựng lí thuyết.* Thầy giáo tận tâm và có sự chuẩn bị tốt có thể chọn bài nghiêm túc và đồng thời không phức tạp lắm, sau đó, khi giúp học sinh nghiên cứu nó, dẫn họ qua bài này, như qua cửa lớn mở rộng, tới một lí thuyết tổng quát. Việc chứng minh hằng số $\sqrt{2}$ là vô tỉ hay tồn tại một tập vô hạn các số nguyên tố là ví dụ về các bài toán mẫu mực như vậy. Nhờ bài toán thứ nhất có thể đi sâu vào thảo luận chính khái niệm số thực, nhờ bài toán thứ hai có thể đi sâu vào lĩnh vực lí thuyết số 2.

Có thể nhận thấy sự giống nhau quen thuộc giữa bài học, dẫn ra theo cách như thế và lịch sử khoa học cụ thể. Lời giải của một bài toán quan trọng, tốn nhiều công sức, việc đi sâu vào thực chất và lời giải đạt được có thể mở ra một con đường tới một khoa học mới hay thậm chí làm xuất hiện một dấu hiệu của một kỉ nguyên mới trong khoa học. Chúng ta không thể quên Ga-li-lê với bài toán của ông và quỹ đạo sao Hoả.

Trong một công trình của Mactin Vayhensainơ đã nêu lên một ý mà theo tôi đáng cho những người lập kế hoạch học tập quan tâm đến: để thay cho việc diễn đạt nhanh mọi chi tiết nhỏ của một giáo trình rườm rà quá mức, thầy giáo nên tập trung mọi sự chú ý vào một vài bài toán thực sự quan trọng được cân nhắc một cách thận trọng và không vội vàng. Học sinh cần phải nghiên cứu mọi khía cạnh của bài toán đã đặt ra tới mức độ hiểu chúng, họ cần phải tự lực tìm lời giải và cuối cùng, khi được thầy giáo hướng dẫn, họ cần phải đoán trước một số hệ quả có thể từ cách giải đó.

Như vậy, bài toán trở thành một vị trí điển hình. Một mẫu mực điển hình cho cả một ngành khoa học. Đó chỉ là bức phác hoạ ban đầu của tư tưởng dạy theo các điển hình mà mỗi giảng viên có quan hệ mật thiết với việc lập kế hoạch học tập và chương trình nên tìm hiểu chi tiết trong cuốn sách của Vayhensainơ (xem bài tập 12).

Một lần nữa ta nhận thấy rằng bài toán duy nhất được nghiên cứu một cách thích đáng có thể mở ra một con đường tới cả một ngành khoa học hay dùng làm mẫu mực cho nó. Khi chú ý tới, các điều đó và những nguyên nhân tương tự, tôi đánh bạo khẳng định trong §2 rằng "sự ngẫm nghĩ có hiệu quả có thể đồng nhất với việc giải được bài toán, ít ra theo sự xấp xỉ sơ bộ"

8. *Việc giải toán và trình độ văn hoá.*

Nhiều người (chính tôi thuộc trong số họ) nghĩ rằng một trong các mục đích quan trọng nhất của việc dạy học trong nhà trường phổ thông, thậm chí mục đích quan trọng nhất, là ở chỗ bồi dưỡng cho học sinh trình độ văn hoá. Bây giờ trở lại vấn đề đó, tuy nhiên không đề cập đến chính định nghĩa trình độ văn hoá, bởi vì nếu không ta lại sa vào vòng luẩn quẩn, có thể dẫn tới những tranh luận về nội dung của chính khái niệm đó.

Việc dạy nghệ thuật giải bài toán trong các bài học về toán cho ta một cơ hội rất thuận lợi để hình thành các tư chất nhất định của trí tuệ học sinh và làm quen với các khái niệm tương ứng, theo tôi, là yếu tố quan trọng nhất của trình độ văn hoá. Dưới đây trong cái khung nhỏ liệt kê danh sách một số điểm; nó không phải là đầy đủ mà chỉ đưa vào các điểm cốt yếu quan trọng nhất, như tôi hi vọng, một lớp học thông thường trong nhà trường của ta sẽ hiểu được. Nhiều yếu tố, có nói tới trong danh sách này được giải thích trên các trang của cuốn sách này và của các cuốn sách cũng như các công trình khác của tôi có nội dung tương tự (xem nhận xét bổ sung 9 và 11).

9. *Ngôn ngữ và hình ảnh*. Có những người cần thể hiện những ý của mình nhờ những hình hình học nào đó; ngay cả một số cách phát biểu thông thường có xu hướng trở thành các hình ảnh hình học trong đầu họ khi ngẫm nghĩ về các bài toán, những người đó thấy cần cả tờ giấy và bút chì và bắt đầu vẽ các đường khác nhau: có thể họ gắng sức trong việc thể hiện bằng ngôn ngữ hình ảnh hình học.

1) Có nhiều ý và sự kiện quan trọng, không liên quan trực tiếp đến hình học, được thể hiện tốt nhất nhờ hình ảnh hình học, đồ thị hay biểu đồ: chẳng hạn các kí hiệu nhạc, trong đó các điểm được đặt ở các mức tương ứng (cao hay thấp), thể hiện cao độ của âm thanh hay các kí hiệu hoá học cho phép biểu diễn cấu tạo thành phần hoá học của các chất nhờ kí hiệu hình học (các điểm và các gạch liên kết). Các hình ảnh hình học và sự liên quan giữa chúng cho nhiều phương pháp biểu diễn các số và các hệ thức số; công cụ chính quy cho điều đó là hình học giải tích, đó là từ điển hai ngôn ngữ đặc sắc để dịch từ ngôn ngữ các công thức thành ngôn ngữ hình ảnh hình học và ngược lại. Tư tưởng của hình học giải tích nằm trong cơ sở của toàn bộ các đồ thị, biểu đồ,... được sử dụng trong kinh tế, trong kĩ thuật, trong khoa học thuần tuý. Các minh hoạ hình học thuận lợi cho cả những phương pháp thuần tuý toán học và có thể minh hoạ ngay cả ở mức độ trường phổ thông; bài tập 10 là sự minh hoạ cho khẳng định này, không có trong các sách giáo khoa thông thường.

2) Về nguyên tắc, đồ thị và biểu đồ được áp dụng cho các khoa học khác nhau, được xác định một cách chính xác và đơn trị, bởi vì hình vẽ (được lí tưởng hoá) cần phản ánh một cách chính xác hệ thức số. Tuy nhiên cần thấy rằng đôi khi có thể cả những biểu diễn hình học còn có chỗ không rõ ràng cũng có ích, chẳng hạn tôi cho rằng hình 11.2 có giá trị nhận thức nhất định, mặc dù chưa chắc nó khác với sự miêu tả thông thường nào đấy được chuyển lên giấy hay khác với cách phát biểu được thay bằng hình ảnh rõ rệt. Các hình 11.3 và 11.4 thuộc cùng một loại "hình vẽ" đó. Ngược lại, các hình vẽ 15.1a và 15.1e §5, chương 15 có ý nghĩa toán học chính xác: chúng biểu diễn tập tất cả các tam giác và một số tập con của tập đó. Cái hay chủ yếu của chúng ta là ở chỗ chúng minh hoạ một cái gì nhiều hơn nữa, một quá trình mà lúc này ta không thể hình dung hoàn toàn rõ ràng: quá trình tư duy quy nạp.

Từ hai sơ đồ hay hình vẽ bề ngoài giống nhau, có thể gán cho cái này một nghĩa chính xác và cho cái kia, một nghĩa không xác định, bóng bẩy: giữa sự chính xác toán học và cách nói thi vị có vô số bậc thang, có thể lấy sơ đồ giao thông đường thuỷ làm những minh hoạ thú vị.

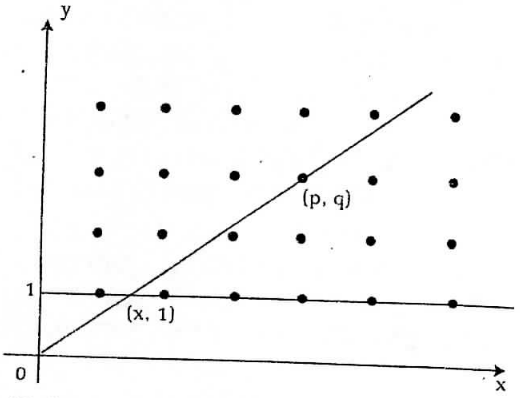
3) Hình học xem như là một khoa học về không gian và có một loạt khía cạnh. Có thể xem nó như một khoa học thuần tuý suy diễn dựa vào hệ tiên đề. Nhưng đồng thời

hình học cũng chính là thói quen quan sát, như một ngành thủ công. Cuối cùng, có thể hiểu hình học như là một bộ phận của vật lí, (mà các nhà vật lí thường xem là phần thô thiển nhất, còn các nhà toàn học phản đối lại xem nó là bộ phận lí thú nhất). Khi là một bộ phận của vật lí, hình học sẽ đồng thời là một lĩnh vực trong đó có thể làm các phát minh trực quan và các phép quy nạp, sau đó củng cố chúng bằng các lập luận. Các lập luận trước của ta bổ sung một khía cạnh nữa cho các khía cạnh vừa mới kể ra: hình học cũng chính là nguồn kí hiệu được sử dụng trong một biến thể nào đó của ngôn ngữ, có thể chỉ là theo thói quen hay là một cách chính xác, nhưng trong cả hai trường hợp đều bổ ích và giúp cho việc học giỏi.

Từ đó rút ra cho thầy giáo một bài học sau đây: nếu bạn muốn dạy một cách thực sự cho học sinh của mình, chứ không chỉ là lướt qua một cách vội vã hết điểm nọ sang điểm kia của chương trình, thì bạn chớ có bỏ qua một khía cạnh nào trong các khía cạnh đó. Hãy đặc biệt tránh nhấn mạnh sớm quá, hay kiên trì quá trên khía cạnh tiên đề của hình học nếu bạn không muốn làm cho các nhà khoa học và kĩ sư tương lai (hay các nhà nghệ sĩ và các nhà triết học tương lai) chán ghét môn hình học. Có thể là họ say mê nhiều hơn sự nhìn ngắm giản đơn các dạng hình học hay sự biểu diễn các vật thể không gian hay các phát minh bằng quy nạp, hay cuối cùng là các minh hoạ dưới dạng sơ đồ và hình vẽ, chúng kích thích mạnh mẽ tư duy.

10. *Số hữu tỉ và số vô tỉ*. Điều mà bây giờ tôi sẽ nói chỉ là phác hoạ sơ qua về đề tài phải được nghiên cứu kĩ lưỡng trong lớp học và chính ở đây chúng ta gặp phải vấn đề tế nhị nhất của chương trình toán ở phổ thông. Để ngắn gọn tôi sử dụng một số thuật ngữ và kí hiệu lấy từ hình học giải tích, mặc dù tôi không đòi hỏi bạn đọc phải làm quen thực sự với nó: bạn chỉ cần biết vẽ đồ thị là đủ.

Giả sử x và y, như thường lệ, là các toạ độ vuông góc Đề-các. Ta gọi đường thẳng có phương trình $y = 1$ là đường thẳng số (nó đóng vai trò "thước tỉ lệ lí tưởng hoá"). Bạn hãy nhìn vào hình 14.2, trên đó có vẽ nút của lưới số nguyên, tức là các điểm có toạ độ nguyên. Trên hình ta tách riêng ra các nút của lưới, rơi vào đường thẳng số của ta ("các cột cây số trên đường thẳng, như mũi tên chỉ, chạy mãi ra xa").



Hình 14.2. Đường thẳng số và các nút của lưới

Trên hình 14.2 số x được biểu diễn bởi điểm $(x, 1)$ của đường thẳng số của ta. Ta kẻ qua điểm $(x, 1)$ và gốc toạ độ $(0, 0)$ một đường thẳng. Để số x là hữu tỉ, cần và đủ là đường thẳng này đi qua nút (p, q) nào đó của lưới (khác gốc toạ độ!); thật vậy, trong trường hợp đó từ sự đồng dạng của các tam giác ta suy ra rằng:

$$\frac{x}{1} = \frac{p}{q}.$$

Trước học sinh thầy giáo cần phải nêu câu hỏi sau đây:

Điểm (0, 1) thuộc lưới: có nhất thiết mọi đường thẳng đi qua điểm đó lại đi qua một nút nào đó của lưới số nguyên không? - và ít ra là một lúc (thêm vào đó cũng khá lâu), bạn cần phải nén sự say sưa tự trả lời câu hỏi đó.

Tất nhiên, ở đây chỉ có thể xảy ra hai trường hợp: đường thẳng đi qua gốc toạ độ và đi qua hoặc không đi qua một nút nào đó của lưới khác gốc toạ độ; trường hợp nào trong hai trường hợp đó có thể xảy ra hơn?

Thầy giáo cần phải để cho câu hỏi này chín muồi, còn hình 14.2 thì " đọng lại" trong đầu học sinh chỉ sau khi học sinh nắm được toàn bộ sự quan trọng của vấn đề đặt ra trước cho họ (để có điều đó có thể đòi hỏi hàng giờ, hàng tuần hay thậm chí hàng tháng!).

Bạn cần phải bắt đầu thảo luận về tính vô tỉ của số 2, về sự xấp xỉ số vô tỉ bởi số hữu tỉ (theo Felicxơ Klain, hình 14.2 có thể dùng làm đà cho việc nghiên cứu các phân số liên tục)...

11. *Tính chặt chẽ của lập luận.* Trong nhà trường phổ thông có cần dạy tiến hành các chứng minh toán học không? Theo tôi, câu trả lời ít có khả năng gây ra sự ngờ vực. Vâng, cần thiết nếu các điều kiện bất lợi đặc biệt không buộc chúng ta vi phạm quy định. Các chứng minh chặt chẽ chính là dấu hiệu đặc sắc của toán học; nó là một phần cống hiến quan trọng của khoa toán học vào nền văn hoá chung. Một học sinh sẽ bỏ qua một trong những xúc động trí tuệ quan trọng nhất nếu như chứng minh toán học không gây được ấn tượng tới anh ta.

Nên giữ mức độ chặt chẽ thế nào khi tiến hành các chứng minh toán học? Và làm điều đó như thế nào? Trả lời câu hỏi đặt ra không đơn giản; hơn nữa, nó có nhiều khó khăn, Không để ý đến các khó khăn đó, trả lời thiếu sự cân nhắc cẩn thận, chỉ theo tập quán, theo thời thượng hay theo định kiến không phải là cách làm có thể được giới thiệu cho những người chính chắn trong việc lập kế hoạch và chương trình học tập cho trường phổ thông.

Có nhiều cách chứng minh; có thể chứng minh theo nhiều cách khác nhau. Và trước hết ở đây cần quán triệt như sau: có những cách chứng minh này thích hợp đối với lứa tuổi hay trình độ phát triển nhất định, trong khi những cách khác có thể là sơ đẳng hay quá thô thiển.

1) Đây là một trong các khía cạnh của quá trình chứng minh toán học như thế, đã được Đề-các chú ý tới và mô tả sáng sủa tuyệt vời. Tôi trích dẫn ba trong *các quy tắc chỉ đạo của lí trí* của ông: "Trong các đối tượng nghiên cứu của ta cần phải tìm thấy không phải là cái mà những người khác nghĩ về chúng, hay cái mà chúng ta giả định về chúng, mà là cái mà chúng ta có thể nhận thấy một cách rõ ràng và hiển nhiên, hay có hi vọng suy diễn được bởi kiến thức không thể đạt được theo một cách khác". Khi giải thích quy tắc này, Đề-các xét liên tiếp hai "cách nhận thức" trực quan về suy diễn. Đến đây ông bắt đầu lập luận và suy diễn: "Chính sự hiển nhiên và sự chính xác của trực quan cần phải có không những chỉ trong các khẳng định riêng biệt, mà đồng thời phải có trong các lập luận thuộc mọi loại. Chẳng hạn tổng của 2 và 2 cũng bằng tổng của 3 và 1; cần phải hiểu một

cách trực quan không những chỉ ở chỗ 2 và gộp 2 thành 4, 3 và 1 cũng gộp thành 4, mà thêm nữa là ở chỗ từ hai quy tắc đầu cần phải suy ra quy tắc thứ ba đó".

Đề-các trình bày suy diễn toán học bằng một dãy kết luận cùng với một loạt các bước liên tiếp. Đối với sự đúng đắn của phép suy diễn, chỉ đòi hỏi sự hiểu trực quan rằng kết luận thu được trong mỗi một bước hiển nhiên và cần phải suy ra từ các kiến thức từ trước (trực tiếp nhờ trực quan hay gián tiếp đưa vào các bước lập luận suy diễn có trước).

(Từ chương 7 chúng ta biết rằng sơ đồ phân nhánh giới thiệu kết cấu của một chứng minh thích hợp hơn so với một dây chuyền các mắt xích liên tiếp; tuy nhiên Đề-các muốn đề cập đến mắt xích. Nếu như Đề-các được làm quen với sự biểu diễn các chứng minh nhờ biểu đồ được nghiên cứu trong chương 7, thì ông đã yêu cầu mỗi một yếu tố của biểu đồ đó dựa vào sự hiển nhiên trực quan - chẳng hạn, dưới dạng mà ta có trên hình 7.8).

2) Nhưng toán học có nhiều khía cạnh. Có thể xem toán học, chẳng hạn như một "trò chơi" với các kí hiệu được tiến hành tuần tự theo các quy tắc tiên thiên, trong đó sự chú ý chủ yếu là sao cho các quy tắc đó không bị vi phạm. (Khía cạnh này khá hiện đại; 50 năm trước đây đa số các nhà toán học và đa số các nhà triết học đều có khuynh hướng xem nó là khía cạnh cách mạng. Tuy nhiên, khía cạnh này được đưa vào toán học do ảnh hưởng của Da-vit Hin-be vĩ đại, đã tỏ ra rất có ích trong một số nghiên cứu dành cho cơ sở của toán học).

Trong "trò chơi" đó, các kí hiệu không được gán cho một ý nghĩa nào (còn nếu như có một ý nghĩa như thế, thì ta sẽ không để ý đến nó). Trong "trò chơi" có nhiều chứng minh, đồng thời một "bước" trong một chứng minh như thế là sự mô tả một công thức "được xây dựng một cách đúng đắn" (tức là sự tổ hợp các kí hiệu ứng với các quy tắc). Một bước là đúng nếu công thức mới được viết tương ứng chặt chẽ với một số công thức ("tiên đề") ban đầu, tức là các công thức đã viết trong các bước trước và các quy tắc kết luận xác định được cố định ngay từ đầu. Các chứng minh cũng như các mệnh đề được chứng minh đồng thời phải được phân nhỏ tức là được chia nhỏ thành các bước rất ngắn và thành từng phần rất nhỏ.

3) Giữa hai quan hệ cực đoan về chứng minh được xét trong các mục nhỏ 1 và 2 còn có những quan niệm khác nữa. Thực vậy, quan niệm chứng minh toán học đã tiến triển thay đổi khi chuyển thời đại khoa học này tới thời đại khoa học khác. Lịch sử tiến triển này và các động lực của nó rất đáng quan tâm đối với chúng ta là các thầy giáo: sau khi đã biết rõ nhân loại đã đi tới quan niệm này hay quan niệm khác như thế nào, chúng ta có thể hiểu tốt hơn rằng học sinh phải lĩnh hội quan niệm đó ra sao (xem nhận xét bổ sung 14).

Nhà khoa học làm công tác nghiên cứu khoa học dĩ nhiên được tự do lựa chọn quan điểm để xem xét toán học; ông ta thích quan điểm nào phù hợp với công tác của ông nhiều hơn. Tuy nhiên ở trình độ trường phổ thông, ta không được tự do chọn và nếu nói về việc chọn giữa 1 và 2 (tức là giữa các quan điểm về chứng minh gần với quan niệm này hay quan niệm khác trong các quan niệm đó), thì ở đây vị tất có thể do dự. Tôi cho rằng mỗi người, kể cả người chuyên toán, thích cách hiểu trực quan đối tượng hơn là xây dựng lôgic một cách hình thức. Jac Hađama, nhà toán học lỗi lạc của thời đại chúng ta, nói lên ý đó như sau: "Mục đích của tính chặt chẽ toán học là ở chỗ thừa nhận và hợp pháp hoá

thành tựu của trực giác và đôi khi nó không có mục đích nào khác". Nếu gạt bỏ những người chuyên toán thì hầu như không còn ai là người có khả năng đánh giá đầy đủ ý nghĩa của các chứng minh hình thức. Trực giác đến với chúng ta một cách tự nhiên còn chứng minh hình thức thì không bao giờ. Trong mọi trường hợp, trực quan đến với ta sớm hơn nhiều và chịu tác động bên ngoài ít hơn nhiều so với chứng minh hình thức mà ngay chúng ta cũng không thể hiểu được thực sự, chừng nào chúng ta chưa làm quen nhiều với lôgic và phương pháp luận. Vì vậy tôi cho rằng khi dạy học sinh phổ thông, chúng ta cần phải chú trọng nhiều vào trực giác chứ không phải là chú trọng nhiều vào sự suy diễn và sử dụng trực quan sớm hơn nhiều so với suy diễn. Khi tiến hành các chứng minh, ta cần bám thật sát các tư tưởng của Đề-các hơn là tư tưởng của một nhà lôgic hiện đại nào đó (xem mục nhỏ 2).

Tôi đã gặp những thanh niên có hứng thú nhất định về khoa học và kĩ thuật, thậm chí có cả một số tài năng, nhưng từ chối nghiên cứu toán học - và tôi không tin rằng tôi có thể đoán được nguyên nhân của điều đó.

4) Hãy cho phép tôi đưa ra một ví dụ. Tôi xét mệnh đề: *"Trong ba điểm cho trước nằm trên một đường thẳng chỉ có một điểm nằm giữa hai điểm kia"*.

Hãy chú ý rằng mệnh đề này nói về tính chất đặc trưng cụ thể cho đường thẳng: nếu ba điểm thuộc đường tròn, thì không một điểm nào đóng vai trò đặc biệt nào và không thể dùng giới từ "ở giữa" cho một điểm nào đó để phân biệt với các điểm kia.

Mệnh đề về ba điểm trên đường thẳng đó có cần chứng minh không? Ở bài giảng trong trường đại học tổng hợp dành cho cơ sở hình học, phép chứng minh dựa vào hệ tiên đề của mệnh đề này có thể có ý nghĩa quan trọng. Tuy nhiên cung cấp sự chứng minh như vậy cho học sinh lớp 10 của trường phổ thông mới chỉ bắt đầu học hình học có hệ thống thật là phi lí.

Ý kiến của tôi là như vậy và bạn có thể không tán thành ý kiến đó. Để xác lập ý kiến của mình cho vấn đề đó, bạn cần hình dung sự phản ứng của lớp học đối với sự chứng minh tương tự. Tôi hình dung nó như sau. Đa số học sinh thấy buồn chán họ cũng chẳng suy nghĩ là tại sao. Thiểu số có khả năng hơn và không thờ ơ mấy sẽ cảm thấy một cách trực quan - có thể không hiểu đầy đủ sự chứng minh đó - rằng sự chứng minh là không cần thiết và không nên tiến hành nó. Có thể là trong lớp tìm được một hay hai cậu bé - có thể có khả năng nhất trong tất cả - nhớ lại và bày tỏ một cách cởi mở rằng đối với các em trước đó thì sự kiện là rõ ràng và sau khi chứng minh thì cũng không hơn gì. Trong mọi trường hợp có lẽ sự phản ứng riêng của tôi là như vậy, nếu như chứng minh tương tự được trình bày cho tôi ở thời học sinh. Tôi không muốn nhớ lại đúng quá trình diễn biến tư tưởng của thời thiếu niên (cách đây không lâu tôi vừa đúng 60 tuổi) và dĩ nhiên tôi không đòi hỏi rằng thời thiếu niên là luôn luôn đúng, tuy nhiên tôi có thể hình dung một cách dễ dàng sự phản ứng của mình đối với chứng minh như thế. Sự chứng minh đã làm tôi tin rằng thầy giáo của tôi đã trở nên lẩm cẩm hay tin rằng toán học là một khoa học lẩm cẩm cả thầy giáo lẫn toán học đều lẩm cẩm. Khi tôi đã có thái độ như vậy thì tôi ngừng nghe

những lời giải thích đó và nếu buộc phải nghe thì tôi nghe một cách miễn cưỡng với sự hoài nghi và coi thường.

Bất kì trong trường hợp nào tôi cho rằng sự phản ứng thù địch trên các chứng minh thuộc loại như thế tất nhiên là đúng đắn.

5) Có nhiều dạng chứng minh. Đối với tôi hình như vai trò của các chứng minh trong quá trình phát triển khoa học là phức tạp hơn so với điều thường được công nhận và tại đấy có thể tìm được những vấn đề đáng được quan tâm về mặt triết học. Tuy nhiên một khía cạnh khác làm chúng ta lưu ý, đó là: cần dạy những loại chứng minh nào cho người mới vào nghề? Vấn đề này dường như đối với tôi dễ dàng hơn và tôi đã có ý kiến nhất định. Ở đây tôi mạn phép trình bày ý kiến đó.

Trước hết học sinh cần phải tin rằng các chứng minh đáng để họ học là cần thiết là lí thú, chẳng hạn trong việc xử án các bằng chứng là cần thiết: người ta nghi ngờ rằng bị cáo có lỗi, nhưng điều đó chỉ là sự hoài nghi, không có cơ sở vững chắc cho điều đó. Thật ra bị cáo có lỗi hay không là điều còn phải chứng minh. Mục đích của bằng chứng về pháp lí là ở chỗ loại trừ sự hoài nghi. Nhưng điều đó chính là mục đích vừa hiển nhiên lại vừa tự nhiên của chứng minh toán học. Chúng ta có những nghi ngờ về tính đúng đắn của khẳng định toán học được diễn đạt một cách rõ ràng, chúng ta không biết nó đúng hay sai. Trong trường hợp đó, chúng ta cần phải chọn một trong hai khả năng giải quyết: để thủ tiêu mối hoài nghi, cần phải hoặc chứng minh khẳng định hoặc phủ nhận nó.

Bây giờ tôi có thể giải thích vì sao tôi tin rằng không thể chứng minh mệnh đề (về ba điểm trên đường thẳng) đã nhắc đến ở trên, trong trường phổ thông. Thanh niên ở lứa tuổi học sinh đã làm quen với mệnh đề về ba điểm nên không nghi ngờ nó. Ở đây ta không có nhiệm vụ làm tiêu tan mối ngờ vực và vì vậy chứng minh dường như không có ích, không cần thiết, là vô nghĩa. Tình huống còn trở nên căng thẳng hơn nếu chứng minh bắt đầu từ tiên đề, có chứa sự nghiên cứu một số trường hợp và chiếm 13 dòng trong sách giáo khoa. Nó có thể gây cho học sinh một ấn tượng là toán học nghiên cứu việc chứng minh những điều hoàn toàn rõ ràng, bằng những cách không hiển nhiên chút nào.

6) Ở mức độ thích hợp, chứng minh mệnh đề về ba điểm trên đường thẳng, như tôi đã nói ở trên, là hoàn toàn đúng chỗ. Khi chúng ta trình bày nó trong trường phổ thông, chúng ta mắc phải sai lầm nghiêm trọng và không thể tha thứ được về phương diện sư phạm: chúng ta lẫn lộn mức có độ trình độ (xem nhận xét bổ sung 16).

Ở mức độ nghiên cứu khoa học, chúng ta có thể gặp các mệnh đề mà về trực quan đối với ta là rõ ràng. Chúng ta có thể có các dẫn chứng rất có lí cho nó, nhưng chứng minh hình thức có thể không có. Trong tình huống như thế, tốt nhất là nhà toán học có thể cố gắng tìm phép chứng minh cần thiết. Bài tập 12 cũng như một số trong các bài tập của chương 15 có thể giúp làm quen với những tình huống tương tự ở mức độ trường phổ thông.

7) Trước khi kết thúc chủ đề này, tôi phải báo cho bạn còn một số sai lầm không thể tha thứ được: sự lạm dụng các chứng minh tầm thường. Việc làm dày sách giáo khoa bằng các chứng minh không cần thiết, trong đó được cái kết luận mong muốn đã rõ ràng ngay

từ đầu, còn luận cứ dựa vào những điều ai cũng biết, gây một ấn tượng không tốt cho những học sinh giỏi có năng khiếu, năng khiếu trực quan có thể đem lại lợi ích to lớn cho kĩ thuật và cho khoa học (đặc biệt, cho toán học).

Chúng ta nhận thấy rằng sai lầm nghiêm trọng đó có thể là hậu quả của tình trạng lẫn lộn các mức độ. Dẫn chứng hình thức của mỗi bước bằng một chuỗi dài các lập luận có thể gây lí thú cho nhà chuyên toán chứ hoàn toàn không cho các cậu bé học sinh. Tất nhiên việc kiểm tra như vậy là cần thiết, mặc dù nó không là một phần công việc hấp dẫn nhất của nhà toán học. Lôgic, đó là chị đứng ở lối ra của cửa hiệu tự phục vụ và kiểm tra giá mỗi mặt hàng trong một lẵng xách lớn, còn các mặt hàng bên trong lẵng không phải do chị ta chọn.

12. *Bản đồ địa lí có thể là hoàn toàn không?* Bản đồ địa lí chính là sự biểu diễn một phần mặt đất trên tờ giấy phẳng.

1) Để hiểu rõ hơn về vấn đề đặt ra, đầu tiên ta khái quát và nghiên cứu một cách tỉ mỉ hơn một loại bài toán mới và tổng quát (việc chuyển từ cái riêng đến cái chung và từ mức độ nghiên cứu trực quan đến mức độ nghiên cứu trừu tượng là rất quan trọng; ở đây ta nhấn mạnh có chủ ý; trong lớp học có thể tiến hành từ từ và thận trọng hơn).

Ta xét ánh xạ từ mặt S lên mặt S' khác. Đồng thời ta giả thiết rằng ánh xạ của ta là một-một, tức là một điểm p của mặt S tương ứng duy nhất một điểm p' của mặt S', ảnh của điểm p và ngược lại mỗi điểm p' của mặt S' tương ứng duy nhất một điểm p trên S, nghịch ảnh của điểm p'. Ngoài ra, ta giải thiết rằng ánh xạ của ta là "liên tục", tức là các điểm làm thành một đường "trơn" trên một mặt sẽ tương ứng với tập các điểm cũng lập thành một đường "trơn" mặt khác. Giả sử L_1 và L_2 là các đường trên mặt S cắt nhau tại p dưới một góc α, còn L_1 và L_2 là các đường tương ứng với chúng trên mặt S". Khi đó có các đường L_1' và L_2' cắt nhau tại điểm p' là ảnh của điểm p, đồng thời lập thành một góc α' nào đó. Ta sẽ gọi góc α' là ảnh của góc α, còn góc α là nghịch ảnh của α'.

(Trong trường hợp bản đồ địa lí, S là một phần mặt đất, còn S' là phần mặt phẳng tương ứng với nó. Ta sẽ xem các đường "chủ yếu" trên mặt đất là bờ biển và bờ đại dương, sông, biên giới các nước, đường nhựa và đường sắt - mỗi một đường như thế tương ứng với một đường xác định trên bản đồ).

2) Bây giờ ta có thể cho một định nghĩa chính xác. Ta gọi ánh xạ là hoàn toàn, nếu nó thoả mãn hai điều kiện:

I) Độ dài rút lại theo cùng một tỉ số

(gọi là tỉ lệ xích của bản đồ).

II) Mọi góc được bảo toàn

Ta phát biểu lần nữa các điều kiện này một cách chi tiết hơn.

I- Mỗi ánh xạ tương ứng với một tỉ lệ xích xác định hay tỉ số không đổi của hai số (chẳng hạn 1: 1000000). Điều đó hàm ý như sau: nếu đường L' trên mặt S' là ảnh của đường L trên mặt S thì tỉ số độ dài của đường L' với độ dài của đường L là một số không

đổi (1:1000000 trong ví dụ của ta) không phụ thuộc vào các kích thước của đường lẫn vị trí của nó trên mặt.

II- Mỗi góc α' trên *S*' bằng góc α trên *S*, α' là ảnh của α.

3) Ta hãy hình dung định nghĩa của một cách rõ ràng hơn, ta xét các chi tiết cụ thể của nó.

a) Giả sử trên bản đồ địa lí khá hoàn chỉnh cho tỉ lệ xích bằng 1:1000000, dĩ nhiên đó là tỉ lệ xích gần đúng. Còn có thể có tỉ lệ xích *đúng có cùng một giá trị cho mọi mở rộng của bản đồ địa lí* không? Và nếu có, thì khi đó các góc cũng sẽ được bảo toàn không? Đây là thực chất của vấn đề.

b) Nếu có thể ánh xạ mặt *S* lên mặt *S*' theo một tỉ lệ xích không đổi nào đó, thì rõ ràng có thể ánh xạ một mặt đồng dạng hình học với mặt *S* lên mặt *S*' theo tỉ lệ xích 1:1, tức là không tăng và không giảm nó. Để làm ví dụ ta giả sử rằng quả đất ta sống đúng là hình cầu. Nếu một phần mặt đất nào đó được ánh xạ hoàn toàn lên tờ giấy phẳng theo tỉ lệ 1:1000000, thì phần mặt cầu tương ứng có đường kính một phần triệu đường kính quả đất đã được ánh xạ lên chính cùng một tờ giấy sao cho các đường tương ứng - ảnh và nghịch ảnh - có độ dài như nhau, còn các góc tương ứng là bằng nhau.

c) Ta có thể cuộn tờ giấy lại thành mặt nón hay mặt trụ hoặc ngược lại mở mặt xung quanh của hình trụ hay hình nón thành mặt phẳng là một ánh xạ hoàn toàn (bạn hình dung trên giấy vẽ các đường bờ biển và sông): khi đó các độ dài và các góc rõ ràng được bảo toàn.

Nhưng có thể "mở" bằng cách tương tự lên mặt phẳng mặt cầu với sự bảo toàn mọi độ dài và mọi góc được không? Ta ngờ rằng điều đó không thể có; có sự hoài nghi dựa vào kinh nghiệm, các quan sát ta đã làm khi gọt táo hay gọt khoai tây.

4) Bây giờ ta có thể hiểu rõ hơn cái gì là cốt lõi của bài toán. Có thể ánh xạ (bằng cách giả thiết sự tương ứng giữa các điểm của hai mặt là một - một) phần *S* của mặt cầu lên phần *S*' của mặt phẳng sao cho bảo toàn mọi độ dài và mọi góc được không?

Ta giả thiết (trái với sự mong muốn của ta) rằng ánh xạ như thế là có thể; các hệ quả ta suy ra từ giả thiết đó thu được trong các mục nhỏ 5 và 6.

5) *Bảo toàn độ dài*. Giả sử *p* và *q* là hai điểm khác nhau thuộc phần *S* của mặt cầu (hay của toàn mặt cầu), còn *l* là đường nào đó trên *S* nối *p* và *q*; hơn nữa; giả sử *p*', *q*' và *L*' là các ảnh của *p*, *q* và *L* trên phần *S*' của mặt phẳng (hay đơn giản trên mặt phẳng). Theo giả thiết; các đường *L* và *L*' có độ dài như nhau. Nếu *L* ngẫu nhiên là đường ngắn nhất trên mặt cầu nối *p* và *q*, tức đường ngắn hơn mọi đường khác nối các điểm mày, thì vì ánh xạ của ta bảo toàn độ dài nên đường *L*' cũng ngắn hơn mọi đường nối khác nối *p*' và *q*'; tức là đường ngắn nhất nối hai điểm đó của mặt phẳng. Ta biết (độc giả phải biết điều này) rằng đường ngắn nhất trên mặt phẳng chính là đường thẳng, còn trên mặt cầu chính là cung của đường tròn lớn. Kết quả lập luận của ta như sau: cung của đường tròn lớn của mặt cầu *S* được ánh xạ thành đoạn của đường thẳng thuộc miền phẳng *S*''. Đặc biệt; các cạnh của tam giác cầu là các cung của các đường tròn lớn, được ánh xạ thành các cạnh của tam giác thường là các đoạn của các đường thẳng.

6) *Bảo toàn góc*. Vì vậy mỗi góc của tam giác cầu vừa nhắc đến phải bằng góc tương ứng của tam giác thường. Nhưng điều đó là không thể có, vì tổng các góc của tam giác thường bằng 180^0, trong khi đó (độc giả cần biết điều này) tổng các góc của tam giác cầu lớn hơn 180^0.

Như vậy, không tồn tại ánh xạ hoàn toàn từ mặt cầu lên mặt phẳng.

7) Bài toán ta giải vừa rồi có thể mở ra một con đường cho việc áp dụng thực hành (khoa bản đồ) cũng như cho một lí thuyết chặt chẽ (phần hình học vi phân tập trung quanh "theorema egregium" của Gao-xơ và dẫn tới lí thuyết tương đối tổng quát). Đây là một số vấn đề không vượt quá trình độ của trường phổ thông và liên quan mật thiết với những cái vừa nói; bạn hãy nhớ lấy chúng.

a) Tam giác phẳng (thường, Ơ-clít) và tam giác cầu liên quan với nhau sao cho mỗi cạnh của tam giác này bằng cạnh tương ứng của tam giác kia. Hãy chứng minh rằng với các điều kiện như thế (ta đã xét trong các mục nhỏ 5 và 6) mỗi góc của tam giác cầu lớn hơn góc tương ứng của tam giác phẳng. (Ta nhớ lại rằng nhận xét về phần dư của tổng các góc của tam giác thứ nhất so với tổng các góc của tam giác thứ hai đóng vai trò quyết định trong mục nhỏ 6).

b) Các điều kiện phát biểu trong mục nhỏ 2 là không độc lập. Từ điều kiện thứ nhất suy ra điều kiện thứ hai, tức là điều kiện I) thoả mãn thì điều kiện II) cũng phải thoả mãn.

c) Tuy nhiên từ điều kiện II) không suy ra điều kiện I), có nhiều ánh xạ từ mặt cầu lên mặt phẳng bảo toàn mọi góc, mặc dù tỉ số các độ dài đường cong trên mặt cầu với độ dài ảnh của nó trên mặt phẳng không còn là hằng số. (Nó không thể như vậy do định lí đã chứng minh trong các mục nhỏ 5 và 6).

d) Có các ánh xạ từ mặt cầu lên mặt phẳng bảo toàn các đường ngắn nhất. Tức là các ánh xạ chuyển cung đường tròn lớn thành đoạn của đường thẳng (trong khi các góc không được bảo toàn).

8)Tôi hoàn toàn không đề cập đến vấn đề về vai trò của tính liên tục trong các lập luận trước; có thể bổ sung cho chúng những kiến thức chính xác, xong tôi nghĩ rằng nội dung đó vượt quá khả năng của trường phổ thông.

13. *Chúng ta phải dạy cái gì?* Nhà nước giao cho bạn, là người thầy giáo, việc dạy dỗ thanh niên trong lớp học của bạn. Vì vậy nhiệm vụ của bạn chính là dạy những gì có ích cho xã hội cũng như cho chính học sinh.

Lời khuyên này có thể là ít quá; tuy nhiên nó sâu sắc hơn bạn nghĩ. Vì vậy bạn hãy thường xuyên nhớ tới nhiệm vụ của mình, không bỏ rơi nó trong phạm vi bao quát cả khi lập kế hoạch ngắn hạn lẫn dài hạn, tức là cả khi phác thảo bài giảng sắp tới lẫn khi lập chương trình cho cả giáo trình. Bạn hình dung trong lớp học của bạn, có một cậu bé đáng yêu và thông minh còn chưa bị nhà trường làm hư hỏng và chưa được thử thách trước bạn về cảm giác sợ sệt, lúc nào cũng có thể hỏi bạn một cách cởi mở và hồn nhiên: "Thưa thầy, điều đó có thể có ích ở đâu?" Như vậy, nếu bạn thường xuyên chú ý tới cậu bé đáng yêu này và đặt kế hoạch giảng dạy sao cho luôn luôn có khả năng trả lời câu hỏi của em,

hoặc hơn nữa có thể để cho em say mê và thích thú, mà không cần đưa ra câu hỏi đó, thì bạn có thể trở thành thầy giáo giỏi.

Tôi cho rằng cuộc sống và công việc của thầy giáo là hoàn toàn hấp dẫn. Chẳng hạn, ý định trình bày cái gì dễ học, cái gì "ngon ăn" đều có thể hấp dẫn ta. Tuy nhiên phải chăng ta chỉ phải dạy những gì để học sinh dễ tiếp thu? Cái gì dễ học phải chăng bao giờ cũng có ích? Người dạy thú giỏi có thể dạy một con hải báo giữ quả bóng ở thế cân bằng trên mũi. Nhưng về sau con hải báo đó sẽ bắt cá tốt hơn chăng?

14. *Nguyên lí kế thừa.* Xây dựng giáo trình giảng dạy chính là ở một cái gì nhiều hơn so với việc chọn đơn giản các sự kiện và lí thuyết phải học. Ở đây một điều quan trọng nữa là các sự kiện và lí thuyết này sẽ được học theo thứ tự nào bằng các phương pháp nào. Về phương diện ngày nguyên lí thừa có thể giúp ích nhiều.

1) Nguyên lí kế thừa trong dạy học có thể tiến hành bằng những cách khác nhau. Chẳng hạn khi trình bày một ngành khoa học (hay một lí thuyết, một quan niệm) nào đó, chúng ta cần phải cung cấp cho đứa bé khả năng theo dõi các giai đoạn quan trọng nhất của sự tiến triển trí tuệ của nhân loại. Dĩ nhiên, đồng thời không được phép để cho em bé lặp lại một nghìn sai lầm mà nhân loại đã mắc phải; ở đây chúng ta chỉ đề cập tới các giai đoạn quan trọng nhất.

Nguyên lí này không xác lập một quy tắc cứng rắn, không thay đổi được; trái lại nó để cho được tự do lựa chọn. Xem các giai đoạn nào là quan trọng nhất và các sai lầm nào là bỏ qua được, đó là cách lí giải. Nguyên lí kế thừa chính và sự phán đoán của người hướng dẫn, chứ không phải để thay thế anh ta.

Cụ thể, để nhấn mạnh điều sau cùng đó, có lẽ cần một sự diễn đạt nguyên lí kế thừa một cách thận trọng hơn (và rộng rãi hơn). Điều đó có ích nếu sau khi đã tìm hiểu xem loài người nói chung tiếp thu các kiến thức và khái niệm nhất định như thế nào, chúng ta có thể phán đoán tốt hơn xem đứa bé có thể tiếp thu như thế nào các kiến thức đó. (Trong mục nhỏ 3, của nhận xét bổ sung 11, chúng ta đi rất gần tới sự diễn đạt đó).

2) Nguyên lí kế thừa được sự ủng hộ của một nguyên lí tương tự rút ra từ sinh vật học. Sự phát triển cá thể của mỗi động vật lặp lại lịch tiến hoá của loài động vật này. Điều đó có nghĩa là bào thai của động vật này trải qua các giai đoạn liên tiếp của sự tiến hoá, bắt đầu từ trứng thụ tinh và cho đến động và thành hình, nhớ được ở mỗi giai đoạn một cái gì đó của tổ tiên từ xa xưa của mình, còn tính liên tục của giai đoạn phát triển phản ánh sự phát triển của một loạt dạng là tổ tiên của dạng sinh vật này. Nếu thay cho các từ "sự phát triển cá thể của mỗi động vật", chúng ta dùng thuật ngữ khoa học "di truyền chủng loại" và thay cho các từ "lịch sử tiến hoá các dạng sinh vật" bằng thuật ngữ "di truyền sinh học", thì chúng ta đi đến diễn đạt vắn tắt "quy luật di truyền học cơ bản" của nhà sinh vật học người Đức Éc-nect Hê-ken: "di truyền chủng loại lặp lại di truyền sinh học".

Dĩ nhiên, sự tương tự như thế chỉ có thể là nguồn gợi ý lí thú chứ không phải dẫn chứng về sự cần thiết của nguyên lí kế thừa trong việc dạy học; vì vậy nguyên lí này không được xem như "nguyên lí cưỡng bách', mà chỉ như là nguồn gợi ý hay.

3) Nguyên lí kế thừa có thể gợi ý, chẳng hạn, nguyên lí các giai đoạn liên tục mà chúng ta thảo luận trong mục nhỏ 3, §4 và mục nhỏ 3, §5. Quả vậy, trong sự phát triển lịch sử của các ngành khoa học (lí thuyết, quan niệm) có thể nhận thấy ba giai đoạn. Trong giai đoạn đầu là *giai đoạn khảo sát,* nhờ sự tiếp xúc với các tư liệu thực nghiệm nảy sinh các ý ban đầu có triển vọng, nhưng theo *giai đoạn hình thức hoá,* các tư liệu thực nghiệm được hệ thống hoá, đưa vào các thuật ngữ thích hợp, tính quy luật được nhận thức. Trong giai đoạn cuối, *giai đoạn vận dụng,* các quy luật tìm thấy được xét theo quan điểm tổng quát hơn, được khái quát hoá và tìm được các ứng dụng trong thực tế.

Chỉ có đọc các tác phẩm đặc sắc của các tác giả lớn mới thực sự làm cho chúng ta tin vào sự cần thiết của nguyên lí kế thừa trong dạy học. Có thể so sánh nó với cuộc dạo mát ngoài trời đầy sinh khí sau khi phải thở bầu không khí ngột ngạt của các giáo trình. Như Đ. K. Mắc-xoen đã viết trong lời tựa cho "Luận văn về điện và điện từ" lớn của mình: "Đối với ai nghiên cứu một vấn đề nào đó thì việc đọc hồi kí đặc sắc về vấn đề đó là rất có lợi, vì rằng kiến thức được thấm nhuần đầy đủ nhất chỉ khi thấy được quá trình ra đời của nó".

4) Theo nguyên lí kế thừa, ta nên đi theo con đường mà những người phát minh đầu tiên đã đi. Cũng theo nguyên lí dạy học tích cực, bạn phải tự khám phá đến mức tối đa, sự kết hợp hai nguyên lí này nói lên rằng người nghiên cứu cần phải khám phá một lần nữa những gì mà người đó cần phải nghiên cứu. Ở đây chúng ta chỉ lướt qua một trong các khía cạnh quan trọng nhất của quá trình dạy học.

15. *Những lời nói trống không.* "Trình độ văn hoá", là một từ ngữ thông thường và như mọi câu nói như thế, người ta thường dùng theo nghĩa không chính xác. Không có gì dễ hơn là nói về "trình độ văn hoá". Trong trường phổ thông có thể gặp những điều vu vơ nhất được bao biện ở chỗ chúng "phát triển trình độ văn hoá".

"Bồi dưỡng trình độ văn hoá ", "dạy tư duy", "dạy giải toán" đều là những câu nói thường dùng dù là có cơ bản, có nghĩa chính xác, dễ giải thích. Cũng là không chính xác và dùng theo nghĩa không đúng. Tuy nhiên giữa ba câu nói này có sự khác nhau, nhờ đó câu cuối trong chúng có vị trí tốt hơn hai câu kia.

Câu "dạy giải toán" có thể giải thích không chỉ nhờ các thuật ngữ chung khác những thuật ngữ này (cũng có thể được giải thích không đúng), mà còn nhờ các ví dụ cụ thể bổ ích (trong cuốn sách này cũng như trong các cuốn sách và công trình khác của tôi, gần với nó về nội dung, tôi cố gắng đưa nhiều vào ví dụ như thế).

Tôi chú ý rằng có thể dễ phân tích câu nói có vẻ không được lưu hành: cần phải giải bài toán như thế nào. "À, bạn dạy rằng cần phải giải bài toán như thế đó, hay lắm ! Thế nhưng bạn phân tích trong lớp học của bạn cụ thể những bài toán nào? Các mặt có ích của trí tuệ phát triển ở học sinh qua các bài toán của bạn như thế nào? Và điều đó xảy ra như thế nào?...".

16. *Tình trạng lẫn lộn về mức độ.* Các nhà toán học hiện đại làm toán với các tập hợp, các toán tử, các nhóm, các trường... nhiều hơn so với hình học và đại số cổ điển. Vì

vậy, trước khi học các môn học cổ điển trong nhà trường, chúng ta cần học các tập hợp, các toán tử, các nhóm và các trường…

"Thiếu niên Mĩ hiện thời ngồi ở ô tô nhiều hơn là đi bộ. Vì vậy chúng ta phải dạy đứa trẻ biết lái xe hơi trước khi nó học đi".

17. Ai-xe-đô-ra Đun-can là một nữ diễn viên múa nổi tiếng. Me-ri-lin Môn-rô(*) gần đây nổi tiếng chừng nào thì Ai-xe-đô-ra Đun-can đã nổi tiếng chừng ấy vào những năm trai trẻ của tôi. Đúng, nhưng liên quan giữa nữ diễn viên đó và môn chúng ta thích thú như thế nào? Bạn xem, có thể nảy sinh một ý nghĩ suất sắc nào đó: phải chăng có thể giao việc xây dựng chương trình và biên soạn sách giáo khoa cho một "tập thể" gồm giáo sư trường đại học tổng hợp và thầy giáo trường phổ thông. Có thể hi vọng rằng sự kết hợp kiến thức toán học của giáo sư với kinh nghiệm giảng dạy của thầy giáo cho kết quả đẹp đẽ. Đúng, toàn bộ điều đó đúng, dĩ nhiên là như vậy, nhưng…

Vào những năm trai trẻ của tôi, mọi người đều biết một câu chuyện liên quan tới Ai-xe-đô-ra Đun-can, hình như Ai-xe-đô-ra đã nói ra đại thể với Bec-na Sô: "Chẳng lẽ chúng mình không nghĩ gì về đứa con của chúng mình, với cái thông minh của anh và sắc đẹp của em, sẽ như thế ư? "Đúng, đúng, dĩ nhiên - Bec-na Sô trả lời - nhưng chẳng lẽ em không nghĩ trước điều gì sẽ xảy ra, nếu như đứa bé thừa hưởng vẻ đẹp của anh và trí tuệ của em".

Có thể là bạn cũng đã gặp phải những cuốn sách kết hợp kiến thức của một thầy giáo toán bình thường với kinh nghiệm giảng dạy trong trường phổ thông của một giáo sư trường đại học tổng hợp.

18. *Mức độ hiểu biết.* Trong "Luận văn về sự hoàn hảo về trí tuệ" (Tractatus de Intellectus) nhà triết học Be-nê-đic Xpi-nô-da phân biệt bốn mức độ hiểu biết. Ông đã minh hoạ bốn mức độ hiểu biết bằng sự hiểu biết quy tắc tam xuất.

Trong các mục nhỏ 1 - 4 dưới đây, "quy tắc", được hiểu là một quy tắc toán tuỳ ý, mà độc giả đã có một lúc nào đó nghiên cứu, đồng thời có thể theo giai đoạn, với mỗi bước mới lại hiểu quy tắc của mình tốt hơn.

1). Học sinh thuộc lòng quy tắc, tin vào nó; tuy nhiên học sinh có thể sử dụng nó khi áp dụng đúng đắn nó vào thực hành. Chúng ta gọi giai đoàn này là giai đoạn *quán triệt máy móc quy tắc.*

2). Học sinh thử quy tắc vào các trường hợp riêng đơn giản nhất, trong đó, như học sinh tin chắc, nó luôn luôn cho kết quả đúng. Đó là giai đoạn hiểu quy tắc theo quy nạp.

3) Học sinh hiểu chứng minh của quy tắc. Đó là giai đoạn *hiểu có lí trí quy tắc.*

4) Học sinh hoàn toàn nắm vững quy tắc và tin chắc trong nó không còn chút hoài nghi nào về tính đúng đắn của nó. Đó là đoạn *hiểu thực chất quy tắc.*

(*) Nữ diễn viên điện ảnh nổi tiếng của Mỹ.

5). Tôi không biết các ý nghĩa của Xpi-nô-da đã được nêu trong các tài liệu sư phạm hay chưa. Dù thế nào đi nữa, thầy giáo cần phải hiểu được sự khác nhau giữa các mức độ hiểu biết đó. Chương trình đòi hỏi thầy giáo cùng với học sinh đi qua hết phần này phần khác của toán học với khối lượng nhất định, tuy nhiên trong điều kiện học sinh cần phải đạt mức độ hiểu biết nào? Hiểu máy móc đã đủ chưa? Hay thầy giáo cần phải cố gắng đưa họ đến giai đoạn hiểu thực chất? Ở đây, trước chúng ta có hai mục đích hoàn toàn khác nhau và nhắm vào mục đích nào là một việc hoàn toàn không bàng quan đối với thầy cũng như đối với cả học sinh.

6) Khi nghiên cứu, theo quan điểm thầy giáo, các mức độ hiểu biết khác nhau được Xpi-nô-da đưa ra, đối với chúng ta nảy sinh một loạt các câu hỏi. Đưa học sinh tới mức độ này hay mức độ khác như thế nào? Khó nhất trong việc trả lời các câu hỏi đó là vấn đề mức độ hiểu.

7) Dĩ nhiên, không nhất thiết chỉ dựng lại ở bốn mức độ hiểu biết; có một mức độ chắc chắn đáng được thầy giáo (cũng như cả học sinh, trước tiên là các em muốn trở thành các nhà khoa học) chú ý; đó là giai đoạn kiến thức được củng cố, được liên kết vững chắc, tóm lại là giai đoạn kiến thức được *tổ chức chặt chẽ*.

Thầy giáo muốn kiến thức học sinh được tổ chức chặt chẽ trước hết cần phải thận trọng cho học sinh làm quen với các sự kiện mới. Sự kiện mới không phải nảy sinh từ con số không: nó cần phải liên quan với thế giới quanh ta, với kiến thức đã có, với kinh nghiệm hàng ngày, dựa vào chúng, tìm trong chúng sự giải thích cho nó; nó phải phù hợp với tính ham hiểu biết tự nhiên của học sinh.

Hơn nữa, ngay sau khi sự kiện mới được quán triệt, nên sử dụng nó để giải các bài toán khác, để giải chúng bằng phương pháp đơn giản hơn, để chiếu sáng cho các sự kiện đã biết, để mở ra những triển vọng mới.

Cậu học sinh có mục đích nhất định phải chăm chú nghiên cứu mỗi sự kiện mới. Phải xoay nó đủ phía, xét sự kiện đó theo các quan điểm khác nhau, nghiên cứu kĩ lưỡng mọi khía cạnh của nó, cố gắng tìm cho nó một vị trí thuận lợi nhất trong hệ thống kiến thức có từ trước, sao cho nó liên kết một cách tự nhiên với các sự kiện cùng loại với nó. Với các điều kiện đó, học sinh dựa vào trực giác của mình. Có thể bao quát kiến thức mới của mình ít khó khăn nhất và đầy đủ nhất. Hơn nữa họ phải cố gắng mở rộng và phát triển các kiến thức vừa mới thu được, bằng cách nghiên cứu chúng để áp dụng, bằng cách vận dụng tổng quát hoá, đặc biệt hoá và tương tự hoá cũng như mọi phương pháp khác mà học sinh hiểu được.

8) Là thầy giáo tận tâm với nhiệm vụ của mình, chúng ta có thể tìm các phương pháp nhằm củng cố sự kiện mới trong các kiến thức toán học của học sinh, liên kiết với các sự nghiên cứu từ trước, làm vững chắc cho chúng bằng thực hành. Nhưng chúng ta chỉ có thể hi vọng rằng các kiến thức được củng cố, được kết hợp, được làm vững chắc, được tổ chức đó, rốt cuộc, trở thành kiến thức thực chất.

19. *Sự nhắc lại và sự tương phản*. Nếu bạn thích thú công tác sư phạm của mình, cũng như say mê âm nhạc, thì bạn có thể nhận thấy giữa cái này cái kia có nhiều điểm

giống nhau. Sự quan sát đó với toàn bộ "tính không khoa học" của nó có thể giúp bạn, một thầy giáo, sắp xếp tư liệu giảng dạy một cách khéo léo và có hiệu quả hơn.

Tôi làm điều đó dụng ý gì? Ôn tập và tương phản giữ vai trò quan trọng trong mọi ngành nghệ thuật, không loại trừ nghệ thuật dạy học, tuy nhiên trong âm nhạc vai trò của chúng biểu hiện rõ nhất. Vì vậy những đặc tính của tác phẩm nghệ thuật như sự báo trước chủ đề, sự phát triển nó, sự lặp lại và biến điệu, luân phiên của các chủ đề có thể gợi ý tốt về việc sử dụng những đặc điểm tương tự trong các chủ đề của các buổi lên lớp hay các tác phẩm văn học.

20. *Từ bên trong và từ bên ngoài.* Khi tôi dự tính và viết cuốn sách này, tôi chú ý tới những cái cần thiết đối với thầy giáo toán các trường phổ thông và đặc biệt chú ý tới tình hình sau đây: Thầy giáo giới thiệu bài toán cho lớp học, học sinh cần phải tự phân tích, sau đó trao đổi nó trong toàn lớp. Tình hình đó đòi hỏi cách tiếp cận có cân nhắc. Nếu thầy giáo thụ động quá thì công việc chậm tiến triển, nhưng nếu thầy giáo chủ động quá thì có nguy cơ bóp nghẹt sáng kiến của học sinh. Ở đây, bằng cách nào thầy giáo có thể tránh được những hóc búa? Thầy giáo vẫn phải giúp học sinh mình ở mức độ nào?

Tốt nhất là đặt vấn đề một cách khác. Không nên hỏi "ở mức độ nào" mà cần hỏi "như thế nào". Thầy giáo cần phải giúp đỡ học sinh của mình như thế nào? Đối với điều đó có nhiều cách:

1) Thường thì thầy giáo nêu ra cho học sinh một số câu hỏi, lại phải lặp lại một số lần cho đến khi học sinh bắt đầu được công việc. Trong đối thoại dẫn ra dưới đây các chấm biểu thị sự im lặng của học sinh. Thầy giáo nói, sau một hồi lí giải!.

"Hãy cho tôi biết một lần nữa: ẩn là gì?"

- Độ dài đoạn *AB*.

"Bằng cách nào có thể tìm được ẩn tương tự?"

....

"Có thể tìm độ dài của đoạn như thế nào?"

....

"Các dữ kiện nào cần để tìm độ dài của đoạn thẳng?"

....

"Phải chăng trước đây chúng ta không giải các bài toán như thế? Tôi đã từng đề cập đến các bài toán trong đó độ dài đoạn thẳng là ẩn số và đòi hỏi phải xác định nó chưa? "

- Tôi thấy dường như chúng ta đã giải nhiều bài toán như vậy.

"Chúng tôi đã làm như thế nào trong trường hợp đó? Theo dữ kiện nào ta đã tính độ dài chưa biết?"

....

"Hãy nhìn hình vẽ. Trên đó các em có nhìn thấy đoạn *AB* không? Độ dài đoạn *AB* chính là ẩn của ta. Còn các đoạn nào đã cho?"

- Đã cho đoạn *AC*.

"Đúng, còn cho đoạn nào nữa?''

- Cho một đoạn BC nữa.

"Hãy xem các đoạn AB, AC và cạnh BC. Vị trí tương đối của chúng như thế nào? Em có thể mô tả nó như thế nào?'

- AB, AC và BC chính là cạnh của tam giác ABC.

"Tam giác đó như thế nào?"

....

Đúng là có những trường hợp tính kiên nhẫn của thầy giáo là phải vô hạn.

2) Thầy giáo ít kiên nhẫn hơn có thể tiến hành theo cách hoàn toàn khác và nói trực tiếp cho học sinh: "Hãy áp dụng định lí Pi-ta-go cho tam giác vuông ABC".

3) Các quá trình mô tả trong các danh mục nhỏ 1 và 2 khác nhau cái gì?

Trước hết là ở chỗ quá trình thứ nhất dài, còn quá trình thứ hai ngắn. Đó là sự khác nhau rõ ràng nhất.

Một điều khác nhau nữa ta nên nhận thấy là ở chỗ quá trình 1 mở cho học sinh khả năng thể hiện sáng kiến riêng lớn hơn quá trình 2.

Tuy nhiên giữa chúng còn có cả sự khác nhau tinh vi hơn.

Các câu hỏi và chỉ dẫn gợi ý mà thầy giáo dùng trong quá trình 1 đều có thể ở trong đầu của chính học sinh. Xem xét chúng kĩ hơn, bạn sẽ nhận thấy rằng nhiều câu hỏi và chỉ dẫn đó có thể là công cụ để giải không những chỉ giải loại bài toán này mà có nhiều bài toán khác, thậm chí có thể không những chỉ giải bài toán này mà có nhiều loại bài toán khác, thậm chí có thể nói: cho nhiều loại bài toán. Và công cụ đó mọi người đều sử dụng được. Thực ra những người giàu kinh nghiệm hơn, có "sự chuẩn bị phương pháp tốt hơn" có thể sử dụng chúng thành thạo và khéo léo hơn.

Trong khi đó, sự giới thiệu của thầy giáo trình bày trong quá trình 2 không phải là công cụ để giải các bài toán khác. Có thể xem nó chỉ như hành động cụ thể tiến hành ở bên ngoài mọi mối quan hệ với bất kì mọi mục đích tổng quát nào.

Ta gọi sự *giúp đỡ từ trong* là sự giúp đỡ sao cho mọi người giải toán, quan tâm thực sự tới bài toán của mình và quen thuộc với các vấn đề phương pháp luận, có thể giúp cho chính mình. Ta gọi *sự giúp đỡ bên ngoài* là sự giúp đỡ có quan hệ không đáng kể với các vấn đề phương pháp luận - Người giải toán ít hi vọng vào sự giúp đỡ đó. Tôi cho rằng sự khác nhau quan trọng nhất giữa các quá trình 1 và 2 là ở chỗ trong trường hợp thứ nhất thầy giáo chú ý giúp đỡ bên trong cho học sinh, còn trong trường hợp thứ hai - chỉ là sự giúp đỡ bên ngoài.

4) Phân tích nguyên lí học tập tích cực, chúng ta cần sự giúp đỡ bên trong hơn sự giúp đỡ bên ngoài. Thầy giáo cần tới sự giúp đỡ bên ngoài chỉ như thủ thuật cuối cùng sau khi mọi thủ thuật bên trong được dùng hết mà chưa đạt kết quả (hoặc - than ôi! - trong trường hợp thời gian quá ít ỏi).

Ít có khả năng sự giúp đỡ bên ngoài là có ích - nó xuất hiện như của trời cho và dễ làm cho người ta ngán. Sự giúp đỡ bên trong có khả năng là cái có ích nhất mà thầy giáo có thể làm. Học sinh có thể dễ lợi dụng nó và có thể hiểu rằng các câu hỏi giúp mình và cuối cùng học sinh có thể tự đặt câu hỏi cho mình. Như vậy, học sinh học sử dụng có hiệu lực các câu hỏi, đối với em đó giọng của thầy giáo biến thành giọng nội tâm giúp cho các em trong các tình huống tương tự.

Để tiến hành sự giúp đỡ bên trong, thầy giáo có thể dùng "các câu hỏi chuẩn" và các giới thiệu được tuyển lựa trong chương 7, là chương trung tâm của cuốn sách. Đối với thầy giáo cần phải làm quen được với các tình huống trong đó các câu hỏi và giới thiệu trong chương 7 phải được áp dụng. Dự kiến viết cuốn sách này là nhằm giúp thầy giáo trong công việc của mình.

21. Khi tôi có ấn tượng rằng chính tôi nói quá dài và đã đến lúc tôi phải nêu câu hỏi cho người nghe, tôi nhớ lại một câu thơ tiếng Đức, tạm dịch như sau:

"Cả lớp thiếp đi chỉ một mình nói;

Trình bày như thế mới gọi là giảng". (*)

22. *Điều đó khó đến chừng nào?* Nhà khoa học cũng như thầy giáo đều có thể gặp câu hỏi như thế: nhà khoa học khi lao vào giải bài toán, thầy giáo khi đưa ra bài toán cho lớp học. Để trả lời câu hỏi đó cần sự "nhạy cảm" hơn là những lí lẽ minh xác. Tuy vậy, đôi khi có thể đánh giá được cái khó của bài toán khá chính xác, vì rằng ấn tượng của nhà khoa học có thể được kiểm nghiệm theo kết quả của việc nghiên cứu, còn ấn tượng của thầy giáo thì theo kết quả của kì thi.

Khi đánh giá mức độ khó của bài toán, các lí lẽ trực tiếp thường có thể không đem lại nhiều kết quả, tuy nhiên, cái ít đó cũng đáng được nghiên cứu kĩ lưỡng.

1) *Khối lượng, phạm vi nghiên cứu.* Giả sử có người phạm phải một lỗi nào đó (chẳng hạn, một ai đó trong lũ trẻ đập vỡ cửa kính) và một trong n học sinh có thể là người phạm lỗi. Rõ ràng rằng, với các điều kiện khác như nhau, khó khăn của việc phát hiện người phạm lỗi tăng lên cùng với sự gia tăng của n. Nói chung có thể hi vọng rằng với việc tăng khối lượng, phạm vi nghiên cứu, mức độ khó của bài toán tăng lên (xem §6 chương 11).

2) *Số các yếu tố được xét đồng thời.* Giả sử rằng học sinh cần phải giải bài toán đòi hỏi áp dụng n quy tắc khác nhau gặp trong chương mới học của giáo trình và các em hiểu chương này kém hơn nhiều so với chương trước. Trong tình huống như vậy, với các điều kiện khác nhau, mức độ khó của bài toán rõ ràng tăng nên cùng với n: có thể hi vọng rằng mức độ khó của bài toán tăng lên cùng với sự tăng số các yếu tố, cho đến giờ không được xét đồng thời và cần được kết hợp lại để giải bài toán.

3). Các lập luận có thể giúp ta rút ra được một kết luận sơ lược về mức độ khó của bài toán trước khi chúng ta bắt đầu và giải bài toán đó. Còn phần kết luận về mức độ khó của bài toán, tức là kết luận được rút ra sau khi tiến hành thử giải bài toán, thì liên quan ít

---

(*) Alles Schlãft, nur einer spricht;

"Der Vorgang nennt sich Unterricht".

nhiều với các phương pháp thống kê một cách rõ ràng. Đây là một ví dụ sơ lược: trong hai bài toán cho 100 học sinh ở một kì thi, thì 82 học sinh giải được bài toán thứ nhất và 39 học sinh giải được bài toán thứ hai. Rõ ràng rằng bài toán thứ hai khó hơn đối với nhóm học sinh đó. Nó có khó hơn đối với nhóm học sinh khác không? Có, nhà thống kê trả lời: điều đó có thể hi vọng tới mức độ tin chắc như vậy với điều kiện là không có sự khác biệt không ngẫu nhiên giữa hai nhóm cho trước. Tại đây ta gặp phải vấn đề không đơn thuần. Trong các vấn đề giáo dục người ta gặp quá nhiều yếu tố không được xét tới nhưng giữ vai trò quan trọng, nên sự khác biệt, "ngẫu nhiên" với "không ngẫu nhiên" trở nên hoàn toàn khó nhận thấy. Chẳng hạn, tính cách trình bày một đoạn giáo trình nào đó của thầy giáo: giọng ông ta nhấn mạnh vấn đề đó, tâm trạng của ông ta và nhiều sự kiện khác không thể tính được tới kết quả các kì thi, nhưng cái đó lớn hơn nhiều so với các sự kiện mà ta có thể nhận được thông tin xuất phát từ các tư liệu thống kê. Ở đây ta vừa đề cập đến, đề cập rất sơ sài, một trong nhiều nguyên nhân khiến ta cần rất thận trọng và thậm chí khả nghi khi có những ước lượng thống kê trong các vấn đề đề cập đến giáo dục.

Cuối cùng, khi nhà toán học gặp bài toán đã đưa ra cách đây 200 năm hay 2000 năm và cho đến bây giờ chưa ai giải được thì ông ta có các cơ sở "thống kê" tương đối tốt để nghi rằng bài toán là khó (lí thuyết số có nhiều bài toán như thế).

23. *Mức độ khó của bài toán và giá trị về mặt giáo dục của nó.* Không dễ dàng xét đoán về mức độ khó của một bài toán, nhưng khó hơn nữa là xác lập giá trị giáo dục của nó, tuy vậy thầy giáo có ý định giới thiệu bài toán cho lớp học, cần cố gắng cân nhắc mọi nhân tố đó.

Ở đây, sự phân loại các bài toán thích hợp với trình độ của trường phổ thông có thể giúp đỡ thầy giáo. Công lao thành lập sự phân loại như thế là của Frank Denk. Sự phân loại đưa ra dưới đây, theo đó các bài toán được phân làm 4 loại, có khác đi chút ít.

1) Bạn có quy tắc (ví dụ mẫu) trước mắt. Bài toán được giải quyết bằng cách áp dụng trực tiếp (máy móc) quy tắc hay bằng cách sao chép trực tiếp (máy móc) lại ví dụ mẫu. Hơn nữa, quy tắc cần áp dụng hay ví dụ mẫu cần theo có ngay trước mắt học sinh, thầy giáo thường cho các học sinh bài toán như thế vào cuối buổi học, trong đó giải thích quy tắc tương ứng hay thủ tục giải. Bài toán tương tự đòi hỏi thực hành và không đòi hỏi gì hơn. Ông thầy dạy học sinh vận dụng quy tắc cá biệt này hay quy tắc cá biệt khác hoặc thủ tục này khác, nhưng không nhất thiết còn gì thêm nữa (đồng thời có nguy cơ là học sinh chỉ quán triệt một cách máy móc quy tắc duy nhất đó mà không đạt tới sự hiểu "thực chất" như vậy).

2) Việc áp dụng quy tắc (ví dụ mẫu) có chọn lọc sơ bộ trước. Cũng như trong trường hợp trước, bài toán được giải quyết bằng cách áp dụng những quy tắc đã học trong lớp hay bằng cách sao chép lại những ví dụ mẫu thầy giáo đã chỉ dẫn, tuy nhiên hiện giờ học sinh chưa hiểu rõ ngay nên chọn cụ thể quy tắc hay ví dụ mẫu nào. Trường hợp đó đòi hỏi học sinh phải có bản lĩnh áp dụng thực hành những tài liệu đã học trong thời gian trước cũng như khả năng tìm quy tắc cần thiết hay ví dụ mẫu trong một phạm vi tìm kiếm nào đó.

3) Việc chọn phối hợp các quy tắc (các ví dụ mẫu). Để giải bài toán học sinh cần phải kết hợp hai hoặc nhiều quy tắc hay ví dụ mẫu đã đưa ra trong lớp học. Giả sử rằng bài toán không khó quá, vì đó chỉ là sự phối hợp (nhưng không đúng như vậy!) những cái

học sinh đã xét. Dĩ nhiên, nếu sự phối hợp hoàn toàn mới, hay nếu cần kết hợp quá nhiều yếu tố kiến thức (hay các yếu tố kiến thức thuộc lĩnh vực xa nhau quá) thì bài toán có thể đòi hỏi sáng kiến nghiêm chỉnh là rất khó.

4) Các bài toán về mức độ gần với các bài toán có tính chất nghiên cứu khoa học. Chưa chắc có thể vạch một đường phân ranh rõ rệt giữa các bài toán đã nói trong mục nhỏ 3 và các bài toán có tính chất nghiên cứu khoa học.

Hơn nữa, trong chương 15 tôi sẽ cố gắng mô tả đại thể và phân tích trên các ví dụ một số đặc điểm của "các bài toán có tính chất nghiên cứu khoa học ở trình độ phổ thông".

Nói chung, có hi vọng là ở khi mức độ khó của bài toán tăng lên theo hướng đã nói trong các mục nhỏ 1 và 2 của nhận xét bổ sung 22, thì giá trị giáo dục của nó được tăng thêm, đặc biệt nếu xem rằng mục đích giáo dục là ở chỗ "dạy tư duy"; chính nhằm vào mục đích này mà chúng ta đã phán định về giá trị của bài toán.

24. *Một số loại bài toán.* Đôi khi để cho thầy giáo được dứt khỏi dãy đơn điệu các bài toán thủ cựu dành cho thầy giáo trong các sách giáo khoa hiện đại, tôi thu lượm từ các nguồn khác nhau một số loại bài toán không mẫu mực (xem Toán học và những suy luận có lí). Ở đây tôi muốn bổ sung một bài toán nữa thuộc loại "phỏng đoán của bạn là sai" (bài tập 26) và một loại mới các bài toán về "cá mòi xông khói" các bài toán thuộc loại sau được thiết lập sao cho nhờ vào một đặc điểm của bài toán đập mạnh vào mắt, nhưng không có quan hệ đáng kể nào làm lạc sự chú ý của người giải toán khỏi cái chính che lấp cách giải có hiệu quả nhất. Nên sử dụng các bài toán thuộc loại "cá mòi xông khói" với sự thận trọng lớn: có thể chỉ ra cho những học sinh khá thông minh để đánh giá được sự pha trò và đi sâu vào các sự việc có liên quan bằng cách gạt bỏ mọi cái không cần thiết (xem bài 25).

25. Tìm phần dư của phép chia đa thức $x^3 + x^5 + x^7 + x^{11} + x^{13} + x^{17} + x^{19}$ cho nhị thức $x^2 - 1$.

26. *Hai mặt cầu tiếp xúc nhau.* Chúng được phân cách bởi mặt phẳng tiếp xúc chung chính đi qua điểm tiếp xúc. Ngoài ra, chúng còn có vô số mặt phẳng tiếp xúc chung khác bao quanh mặt nón tiếp xúc chung của chúng. Mặt nón này tiếp xúc với mỗi một trong các mặt cầu theo một đường tròn còn phần mặt nón bao gồm giữa hai đường tròn này thành lập mặt xung quanh của hình nón cụt.

Giả sử cho đường sinh t của hình nón cụt, hãy tính:

1) Diện tích xung quanh của hình nón cụt.

2) Diện tích phần mặt phẳng tiếp xúc "chính" nằm bên trong mặt nón tiếp xúc.

(Những dữ kiện đã cho đủ để tìm những cái chưa biết không?)

27. *Công việc một học kì.* Thuật ngữ và kí hiệu xem "Toán học và những suy luận có lí", bài tập 33, bạn cũng có thể sử dụng các bài tập 34 - 35 và các lời giải của chúng.

Ta xét ba vật thể:

I) Hình lăng trụ đều n góc;

II) Hình chóp đều n góc;

III) Hình lưỡng chóp đều n góc. (*)

trong đó mọi hình đều ngoại tiếp một mặt cầu sao cho điểm tiếp xúc của bất kì một trong các mặt bên của vật thể với mặt cầu là trọng tâm của mặt.

Đối với mỗi một trong các vật thể I), II) và III).

1) Tìm tỉ số diện tích đáy s với diện tích toàn phần S.

2) Tính tỉ số $\frac{S^3}{V^2}$; trong đó V là thể tích của vật thể.

3) Lập bảng các giá trị bằng số của tỉ số tính được trong mục nhỏ 2 với $n = 2, 4, 5$ và 6.

4) Mô tả trường hợp giới hạn $n \to \infty$, tìm giới hạn của tỉ số tính được trong mục nhỏ 2 và hoàn thành bảng của mục nhỏ 3 một cách tương ứng.

5) Nghiên cứu (khi không giả thiết lời giải đã biết) bài toán. "Tìm hình đa diện với diện tích bé nhất, có số mặt đã cho Γ và thể tích đã cho V".

Đối với các trường hợp $\Gamma = 4, 6, 8, 12$ và 20, hãy phát biểu mệnh đề "có lí" và giải thích tính có lí của nó căn cứ vào đâu, tức là căn cứ vào công việc ta đã làm trước đây tìm các dẫn chứng tán thành hay bác bỏ các mệnh đề đó.

6) Cố gắng tìm trong các bài toán bạn đã biết một bài toán có thể dùng ở trường phổ thông không khi chuyển qua giáo trình hình học không gian.

Hãy diễn đạt bài toán một cách mạch lạc.

Hãy chú ý đến những vấn đề "bên trong" và các lời khuyên (chẳng hạn, theo thư mục đã kê trong cuốn sách của tôi "Giải một bài toán như thế nào?", cũng xem chương 12 của cuốn sách này), thì có thể thành công khi giải các bài toán bạn đã chọn.

Hãy hình dung quá trình giải của các bài toán bạn đã chọn nhờ biểu đồ (giống như điều đã làm với bạn khi tìm thể tích hình chóp cụt, xem chương 7).

7) Bạn "nêu" (tức là có căn cứ để chọn, để giải thích ý nghĩa) đề tài các bài giảng của bạn cho nhóm học sinh có khả năng hay cho thầy giáo đến dự các giáo trình nâng cao chuyên môn như thế nào? (Bạn chú ý vào ai - học sinh hay thầy giáo - xin hãy trả lời một cách ngắn gọn và thực chất).

8) Đường chéo của hình đa diện lồi là đoạn nối hai đỉnh của nó và nằm hoàn toàn (không kể hai đầu mút) ở miền trong của hình đa diện đó (mà không nằm trên mặt của nó). Giả sử D là số các đường chéo của hình đa diện.

Hãy tìm D:

a) Đối với một trong năm hình đa diện đều.

b) Đối với hình đa diện có tất cả các mặt đều là tam giác.

c) Đối với hình đa diện dạng tổng quát, nếu biết rằng nó có T_n mặt n góc, trong đó $n = 3, 4, 5, \ldots$ và $\Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_5 \ldots = \Gamma$.

(*) Hình lưỡng chóp là hình đa diện lập thành bởi hai hình chóp chung các đáy như nhau: hình lưỡng chóp đều n góc gồm hai hình chóp đều n góc như nhau.

9) (Không nhất thiết). Nếu các mục trước gợi cho bạn một ý toán nào đó mà theo như bạn hình như thuộc chủ đề của ta, mặc dù lúc này bạn có thể hình dung nó không hoàn toàn mạch lạc cũng như tường tận, thì ở đây bạn hãy mô tả nó, cố gắng sao cho rõ ràng và ngắn gọn.

(Điều đã nói trên kia chính là ví dụ điển hình về "sự phân tích đến cùng" thường được tôi tiến hành trong các bài giảng cho các thầy giáo trường phổ thông. Mục 5 được xét sâu hơn trong bài tập 36 của chương 15, mục 8, trong bài tập 14 của cùng chương đó. Trả lời các câu hỏi mục 6 và 7 của một số người nghe có hình thức đối thoại giữa thầy giáo và học sinh, tương tự một số đối thoại của chương này và nhiều hơn nữa - đối thoại trong "Giải một bài toán như thế nào? ". Một trong các đối thoại đó được sắp đặt rất tốt (các chỉ dẫn trong bài mục 6 cho cuốn sách này, tất nhiên, là được bổ sung cho sự mô tả cuộc toạ đàm thực tế khi chuẩn bị cuốn sách)).

28. Về các bài phát biểu trong hội nghị toán học: quy tắc Zéc-mê-lô. Vai trò của báo cáo viên trong hội nghị khoa học các nhà toán học ít giống vai trò của thầy giáo trong lớp học: sự khác nhau ở đây nhiều hơn sự giống nhau. Báo cáo viên cũng như thầy giáo đều muốn thông báo một cái gì mới cho người nghe. Tuy nhiên có sự khác nhau đặc trưng của người nghe bao gồm các bạn đồng nghiệp của báo cáo viên, ngay cả đến nhà nghiên cứu có vị trí trong khoa học thế giới cao hơn chính báo cáo viên, nhưng không có một ai trong số học sinh của báo cáo viên. Vị trí của báo cáo viên không thuận lợi và cả bài phát biểu của báo cáo viên không phải lúc nào cũng có kết quả. Lí do ở đây không bắt nguồn từ các thiếu sót cụ thể mà là ở sự quá bao la của toán học. Mỗi nhà toán học có thể nghiên cứu được kĩ chỉ một phạm vi nhỏ của khoa học hiện đại và thường đánh giá kém trong các lĩnh vực thuộc phạm vi nghiên cứu của các nhà toán học khác.

1) Ecnet Zéc-mê-lô - tên tuổi luôn luôn gắn với "tiên đề chọn" của lí thuyết tập hợp đại cương - đã mất nhiều thời gian ở quán cà phê. Các câu chuyện của ông với các bạn đồng nghiệp xoay quanh các nhận xét châm biếm về các nhà toán học khác. Khi bình luận một bài phát biểu có kết quả lớn trong hội nghị toán học gần đây, ông phê phán cách hành văn của báo cáo viên và rốt cuộc ông biểu thị sự không tán thành của mình ở hai nguyên tắc - ông khẳng định một cách giễu cợt - mà mỗi báo cáo viên phải theo.

I - Không bao giờ bạn có thể cường điệu sự dốt nát của người nghe.

II - Hãy nhấn mạnh vào điều hiển nhiên và lướt nhanh qua điều chủ yếu.

Những lời phán đoán của Zéc-mê-lô thường là hóm hỉnh; nói chung rất thiên vị, về chi tiết chúng rất khéo và rất có khả năng thuyết phục. Sự phê phán của ông là như vậy, bao gồm "hai nguyên tắc". Khi nghe nói, dĩ nhiên tôi cười ồ lên, nhưng đã không thể quên được các nguyên tắc đó. Những năm qua tôi hiểu rằng các nguyên tắc này nếu chỉ giải thích một cách thích hợp thì thường có thể xem như lời răn lành mạnh khi thực hành.

2) Báo cáo viên trong hội nghị toán học thường coi nhẹ người nghe như là mỗi người đều biết vấn đề đang thảo luận và đặc biệt biết mọi chi tiết của công trình mới nhất của chính báo cáo viên. Thật ra lại hoàn toàn ngược lại và báo cáo viên nên hiểu điều đó. Đối với ông ta thà đánh giá thấp sự chuẩn nghị của người nghe còn hơn là đánh giá cao nó. Báo cáo viên có thể rút ra nhiều điều bổ ích từ sự giải thích sau đây và nguyên lí thứ nhất của Zéc-mê-lô. "Đừng sợ là hạ thấp kiến thức của người nghe - hãy sợ là quá đề cao nó".

3) Cái gì chủ yếu nhất trong công trình của nhà toán học? Nói chung, mỗi chi tiết chứng minh là chủ yếu, tuy nhiên trong hội nghị toán học hầu như không thể dừng lại ở mọi chi tiết trong mọi điểm nhỏ của lập luận rắc rối và phức tạp. Ngay cả nếu báo cáo viên đề cập đến được mọi chi tiết thì không ai đủ sức theo dõi được nó. Do đó, hãy cố gắng "lướt nhanh qua điều chủ yếu", tức là bỏ qua các chứng minh chặt chẽ.

Đôi khi ngay cả chứng minh dài có thể căn cứ vào điểm trung tâm nào đó vào trực quan đơn giản và dễ hiểu. Báo cáo viên tốt cần phải biết nêu bật trong chứng minh chỗ cơ bản và làm cho nó rõ ràng, hiển nhiên tới mức mỗi người nghe có thể hiểu nó, "xếp thành ngăn thích hợp" và giữ lại để có sử dụng về sau. Khi tiến hành như vậy, báo cáo viên thông báo thực sự cho người nghe nguồn thông tin bổ ích, đồng thời, về thực chất, ông ta theo đúng nguyên tắc Zéc-mê-lô thứ hai: "Hãy nhấn mạnh vào điều hiển nhiên".

29. *Đoạn kết.* Vào những ngày của tuổi thanh niên, tôi đã say mê tiểu thuyết của A-na-tôn Fran-xơ . Hơn nữa, chính văn phòng của nhà văn đã lôi cuốn tôi hơn là nội dung câu văn của nhà hiền triết ngó tới công việc của nhân loại với chút ít mỉa mai lẫn lòng thương. A-na-tôn Fran-xơ cũng nói vấn đề chúng ta đã trao đổi: "Đừng cố gắng làm thoả mãn tính hiếu danh của mình bằng cách dạy cho họ quá nhiều. Hãy chỉ khơi gợi sự tò mò. Hãy mở mắt cho người nghe, nhưng đừng chất quá đầy bộ óc của họ. Chỉ cần gây tia lửa trong đó. Chính ngọn lửa sẽ bùng cháy ở nơi có nhiên liệu cho nó" "Vườn E-pi-kua".

Có thể thuật lại rất hấp dẫn đoạn văn như sau: "Đừng cố gắng làm thoả mãn tính hiếu danh của mình bằng cách dạy cho học sinh phổ thông nhiều điều… chỉ vì bạn muốn buộc họ tin rằng bạn hiểu tường tận về chính điều đó…". Nhưng cả chúng ta không để bị quyến rũ.

CHƯƠNG 15. PHỎNG ĐOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP KHOA HỌC

Phép quy nạp phi toán đóng một vai trò cốt yếu trong nghiên cứu khoa học.

IXAI SUA - Luận văn

Trong mọi lĩnh vực của trí thức, khó mà mô tả được phương pháp của nhà phát minh với một sự gần đủ sát tới chân lí... Tuy nhiên vì điều đó có liên quan tới quá trình sáng tạo toán học, nên có thể nêu ra một nhận xét đơn giản, đã nhiều lần được lịch sử khoa học xác nhận: quan sát chiếm một vị trí quan trọng và đóng một vai trò lớn lao trong quá trình đó.

SÁC-LƠ EC-MÍT - Tác phẩm

Các quan sát là nguồn phát minh phong phú cả trong thế giới các hiện tượng chủ quan cũng như trong thế giới các hiện tượng thực được cảm thụ bởi các giác quan của ta.

SÁC-LƠ EC-MÍT

Thư từ trao đổi với Stinfes

§1. CÔNG TÁC NGHIÊN CỨU Ở TRÌNH ĐỘ PHỔ THÔNG

Việc giảng dạy toán cần phải nhìn thấy trước cả việc cho học sinh làm quen với mọi mặt của hoạt động toán học (đương nhiên trong những giới hạn cho phép). Đặc biệt quan trọng là sao cho việc giảng dạy mở ra con đường đi tới công việc sáng tạo độc lập, đương nhiên, trong các giới hạn có thể.

Tuy nhiên hoạt động của nhà toán học về nhiều mặt khác xa với giờ lên lớp cho học sinh. Trong số khác biệt đó cần đặc biệt chú ý tới gì? Chúng tôi sẽ trả lời câu hỏi đó sau khi làm quen với một số ví dụ. Những ví dụ này sẽ chứng tỏ rằng một thầy giáo giỏi, khi chọn được những bài tập thích hợp và biết chỉnh bày thoả đáng, có thể giới thiệu với ngay cả học sinh phổ thông một cái gì đó rất gần với việc nghiên cứu độc lập.

§2. VÍ DỤ

"Hãy tính diện tích S của một tam giác vuông cân theo chu vi P của nó". Những bài toán như thế thường thấy trong các sách bài tập kinh điển. Nói chung, đó không phải là một bài tập tồi; chỉ có điều nó không thật lí thú nếu chỉ xét riêng nó, tách rời khỏi các bài toán gần gũi với nó. Hãy so sánh cách dẫn dắt dưới đây với cách dẫn dắt thông thường và chú ý tới sự khác nhau:

Thầy giáo nói: "Xưa kia vào thời khẩn hoang các đồng cỏ mênh mông(*), khi mà đất đai rất nhiều, trong khi những thứ khác còn khan hiếm, mỗi người dân ở miền Trung Tây có hàng trăm acrơ(**) đồng cỏ nhưng chỉ có 100ya(***) dây sắt. Anh ta định dùng toàn bộ chỗ dây sắt để rào mảnh đất. Khi cân nhắc các hình thức khác nhau, anh ta ngạc nhiên thấy là chỉ rào được một mảnh đất nhỏ bé.

Vậy thì bây giờ các em thích miếng đất đấy hình gì? Nhưng đừng có quên là các em phải tính diện tích của nó nên tốt hơn là chọn một hình đơn giản".

- Hình vuông.
- Hình chữ nhật với các cạnh 20 và 30ya.
- Hình tam giác đều.
- Hình tam giác vuông cân.
- Hình tròn.

"Rất tốt. Tôi có thể thêm một số hình: hình chữ nhật với các cạnh 10 và 40ya; hình tam giác cân với các cạnh 42, 29 và 29ya; hình thang cân với cạnh 42, 13, 32 và 13ya; hình lục giác đều; nửa hình tròn"

"Tất cả các hình đó đều *đẳng chu*; tức có chu vi bằng nhau; trong bài toán của ta, số đó bằng 100ya. Hãy tính diện tích các hình kể trên ra ya vuông và sắp xếp theo diện tích giảm dần. Trước khi bắt tay vào tính toán, các em có thể đoán xem diện tích nào lớn nhất, diện tích nào nhỏ nhất".

Bài toán này có thể ra cho lớp giữa cấp phổ thông nếu như kiến thức của học sinh cho phép. Danh sách sau đây là lời giải bài toán:

Hình	Diện tích (trong một số trường hợp là gần đúng).
Hình tròn	795
Hình lục giác đều	722
Hình vuông	625
Hình chữ nhật 30 × 20	600
Nửa hình tròn	594
Hình tam giác đều	481
Hình thang 42, 13, 32, 13	444
Hình tam giác vuông cân	430
Hình tam giác 42, 29, 29	420
Hình chữ nhật 40 x 10	400

"Có ai còn hỏi gì không?"

(*) Ở Bắc Mỹ (N. D).

(**) Đơn vị đo diện tích ở Anh và ở Mỹ bằng 4047 m^2 (N.D).

(***) Đơn vị đo chiều dài ở Anh, bằng 0,91m (N.D).

§3. THẢO LUẬN

Mục đích cơ bản của ta nhằm làm học sinh chú ý tới danh sách các hình và diện tích của chúng được thiết lập quá trình giải bài toán. Việc xem xét danh sách đó phải gọi cho học sinh hàng loạt nhận xét. Ở đây thầy giáo gợi ý càng ít càng tốt. Nếu như có khó khăn, thì thầy giáo có thể khuấy động sự tranh luận, bằng cách thận trọng đưa ra đúng lúc những câu hỏi gợi ý, chẳng hạn như:

"Các em có thể nói gì về danh sách đó?"

"Đứng đầu danh sách là hình tròn. Các em nghĩ gì về điều đó?'

"Trong danh sách có một số tam giác và tứ giác. Trong số các tứ giác thì tứ giác nào đứng trên nhất? Đối với các tam giác thì sao?"

"Có thể là các em nói đúng. Nhưng các em đã chứng minh được điều đó chưa?"

"Nếu như các em chứng minh được điều đó thì các em có cơ sở gì xem nó là đúng?"

"Có thể xem hình tam giác như một tứ giác suy biến với một cạnh có độ dài bằng không (hay với một góc có độ lớn 180^0). Nhận xét đó giúp gì cho em không?".

Cuối cùng, sớm hay muộn và trong chừng mực cho phép, học sinh phải tự đi tới các kết luận sau:

Danh sách của ta gợi ý rằng:

Trong số tất cả các hình phẳng có cùng chu vi, hình tròn có diện tích lớn nhất.

Trong số tất cả các đa giác có cùng số cạnh n và cố cùng chu vi, đa giác đều có diện tích lớn nhất.

Nghiên cứu danh sách trên, còn có thể đi tới một kết luận: *nếu hai đa giác đều có cùng chu vi, đa giác nào có số cạnh lớn hơn sẽ có diện tích lớn hơn.* (Đa giác nào càng gần vời hình tròn thì hiển nhiên diện tích càng lớn).

Không một điều khẳng định nào ở trên được chứng minh chỉ bằng danh sách của ta. Tuy nhiên danh sách đó có thể dùng làm một cơ sở để tin được vào những khẳng định đó (đương nhiên trong chừng mực nhiều ít nào đó).

Kinh nghiệm có thể gợi ý cả những hiểu biết rộng lớn hơn về những khẳng định đó, chẳng hạn như điều này: tính hợp lí của khẳng định trong một số lớn trường hợp là một bằng chứng chắc chắn cho tính đúng đắn của nó.

Từ danh sách của ta còn có thể rút ra hàng loạt những kết luận tương tự, đồng thời việc tăng số các ví dụ sẽ thúc đẩy việc xuất hiện các giả thiết mới.

§4. THÊM MỘT VÍ DỤ NỮA

Thầy giáo nói: "Người cổ Hi Lạp đã biết mệnh đề nổi tiếng về diện tích tam giác, mà bây giờ ta gọi là công thức Hê-rôn, được biểu thị bằng đẳng thức $S^2 = p(p - a)(p - b)(p - c)$

trong đó S là diện tích tam giác, a, b, c độ dài ba cạnh của tam giác còn $p = \frac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi.

Chứng minh công thức Hê-rôn không đơn giản và hôm nay tôi không có ý định làm việc đó. Tuy nhiên không có chứng minh, ta không thể tin chắc là đẳng thức được viết đúng. Trí nhớ có thể có sai sót khi tôi viết công thức đó. Các em có thể thử lại công thức đó được không? Phải làm thế nào?

- Hãy thử công thức đó cho hình tam giác đều.

Trong trường hợp này $a = b = c$, $p = \frac{3a}{2}$ công thức cho kết quả đúng. "Ta có thể làm gì được nữa?"

- Hãy thử nó cho tam giác vuông.

- Hãy thử nó cho tam giác cân.

Trong trường hợp thứ nhất $c^2 = a^2 + b^2$, trong trường hợp thứ hai $a = b$ và cả hai trường hợp (ở đây ta cần tới một số phép biến đổi đại số!), công thức đều cho kết quả đúng (độc giả nên thực hiện các phép biến đổi đó).

"Sao, em thấy thích thú chứ?"

"Vâng, công thức đáng được tin cậy."

"Em có thể còn nghĩ được một trường hợp riêng nào để làm ví dụ không?"

"Em nghĩ sao về tam giác suy biến? Tôi gợi ý về trường hợp giới hạn của tam giác suy biến thành đoạn thẳng".

Trong trường hợp này $p = c$ (hay a, hay b) và rõ ràng công thức cho kết quả đúng.

- Xin thầy nói cho biết phải cần bao phép thử để tin chắc được công thức là đúng?

Độc giả có thể hình dung ra cuộc thảo luận bắt đầu từ câu hỏi vừa rồi.

§5. BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ CỦA PHÉP SUY LUẬN QUY NẠP

Sau một số phép thử liên tiếp công thức Hê-rôn làm ở §4, ta đã đạt được điều gì và còn chưa đạt được điều gì? Mỗi phép thử của ta có liên quan tới một tam giác có hình dạng nhất định. Do đó việc xem xét tất cả các dạng tam giác có thể làm sáng tỏ vấn đề.

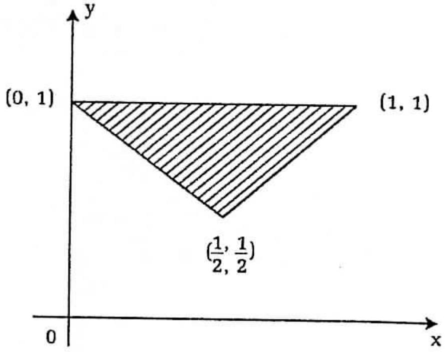
Giả sử x, y, z là các cạnh của tam giác được viết theo thứ tự độ dài giảm dần, tức là: $0 < x \le y \le z$. Thêm vào đó, nhất thiết phải có $x + y > z$.

Hơn nữa, vì chỉ có dạng của tam giác là quan trọng, mà không phải kích thước của chúng, nên ta có thể đặt $z = 1$. Như vậy ta có ba bất đẳng thức: $x < y$, $y < 1$, $x + y > 1$.

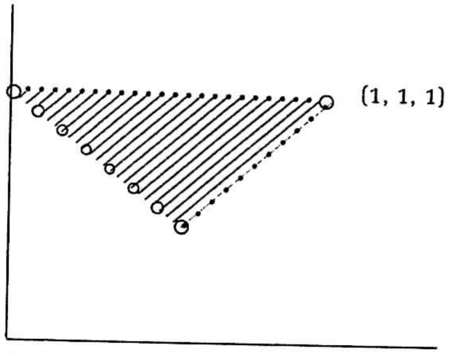
Bây giờ ta biểu diễn tam giác với các cạnh x, y, 1 hay nói cho gọn, tam giác $(x, y, 1)$ bởi điểm (x, y) của mặt phẳng (trong đó x, y các toạ độ Đề-các vuông góc). Mỗi bất đẳng thức của (1) giới hạn những vị trí có thể có của điểm (x, y) bởi một mặt phẳng nào đó (trong hai trường hợp đầu bao gồm cả đường biên của mặt phẳng, còn trường hợp thứ ba

loại trừ nó). Ba đẳng thức (1), được xét đồng thời, đặc trưng cho tập hợp điểm, là phần chung hay giao của ba nữa mặt phẳng. Giao đó là một tam giác(hình 15.1a) với các đỉnh (1, 1), (0, 1) và $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$(bao gồm đỉnh (1, 1) và hai cạnh xuất phát từ đỉnh đó, nhưng không bao gồm hai đỉnh kia và cạnh thứ ba). Giao đó là tập hợp những dạng khác nhau của tam giác, còn điểm riêng biệt (x, y) thì ứng với tam giác cá biệt $(x, y, 1)$, đồng thời các điểm khác nhau là các tam giác dạng khác nhau.

Những điểm nào trên hình 15.1a ứng với các trường hợp riêng của tam giác xét trong §4



Hình 15.1a. Tập hợp các dạng tam giác



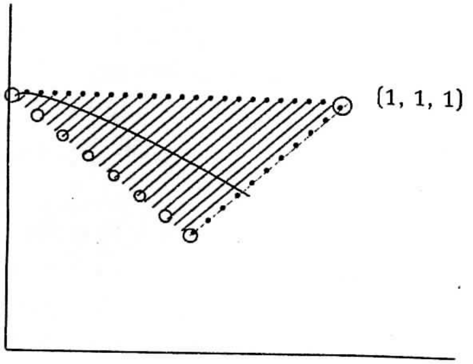
Hình 15.1b. Kiểm tra đối với tam giác đều

Trước hết ta đã kiểm tra công thức Hê-rôn cho tam giác đều. Tam giác này ứng với kí hiệu (1, 1, 1), trên hình 15.1b được biểu diễn bởi điểm đó toạ độ (1, 1).

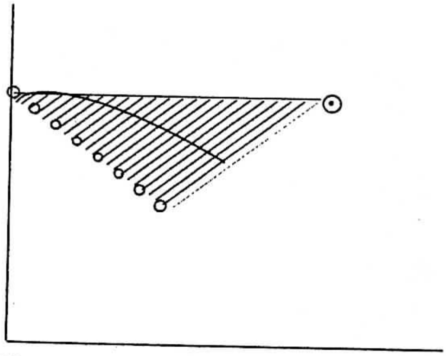
Sau đó ta đã kiểm tra công thức cho tam giác vuông. Nếu $(x, y, 1)$ là tam giác vuông thì cạnh lớn nhất bằng 1 của nó là cạnh huyền và do đó $x^2 + y^2 = 1$.

Từ đó suy ra các tam giác vuông được biểu thị bởi cung tròn (đơn vị) trên hình 15.1c.

Tiếp đó ta đã xét các tam giác cân. Ở đây cần phân biệt hai trường hợp: trường hợp thứ nhất khi tam giác có hai cạnh lớn bằng nhau và do đó $y = 1$ và trường hợp thứ hai khi tam giác có hai cạnh nhỏ bằng nhau, tức khi $x = y$.



Hình 15.1c..... và đối với các tam giác vuông



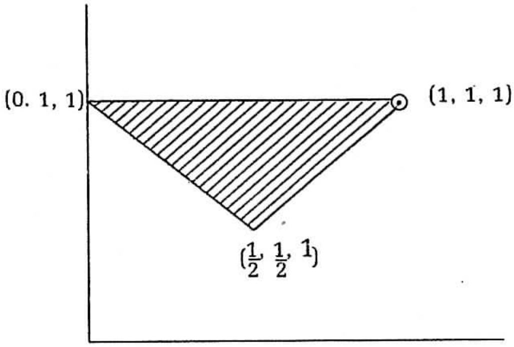
Hình 15.1d.... và đối với các tam giác cân

Từ đó suy ra các điểm, biểu thị tam giác có hai cạnh nhỏ bằng nhau, tức khi $x = y$. Từ đó suy ra các điểm, biểu thị các tam giác cân, lấp đầy hai đoạn biên (xem các đường liền trên hình 15.1d, những đường mà trên hình 15.1b và 15.1c được biểu diễn bởi các điểm đen).

Sau hết, đối với các tam giác "suy biến" $(x, y, 1)$ (tức là các "tam giác có diện tích bằng không") $x + y = 1$.

Những "tam giác" này được biểu diễn bởi đoạn biên thứ ba, biểu thị bởi đường biên trên hình 15.1e (trên các hình 15.1b, 15.1c và 15.1d nó được biểu thị bằng các điểm sáng).

Khi nghiên cứu dãy các hình 1b – 1e, ta có thể hình dung thấy quá trình phát triển của suy luận trực quan. Trước tiên (xem hình 1b), để biểu hiện mức độ kiểm tra điều khẳng định, chỉ cần một điểm duy nhất. Sau đó trên hình vẽ xuất hiện ngày càng nhiều các đường phức tạp, biểu diễn các lớp trường hợp ngày càng lớn được bao trùm bởi phép thử.



Hình 15.1. e..... và đối với các tam giác suy biến

Các điểm biểu diễn các tam giác dạng đặc biệt, trên đó công thức Hê-rôn đã được kiểm tra, nằm theo dọc các đường. Tuy nhiên, công thức vẫn chưa được kiểm tra đối với "khối lượng cơ bản" các tam giác có dạng chung, được biểu diễn bởi các điểm trong của các miền giới hạn bởi các đường đó. Tuy nhiên, ở đây có thể nhận xét như sau: vì công thức đã đúng đối với các điểm biên của miền tam giác cũng như đối với tất cả các điểm thuộc một trong các đường cong cắt miền đó, nên đương nhiên có thể hi vọng là công thức đó vẫn đúng trong các trường hợp còn lại. Bộ phận gợi ý toàn thể và gợi ý một sức thuyết phục đủ.

§6. MỘT VÍ DỤ TRONG LỊCH SỬ

Ở đây, ta xét một bài toán không gian. Đồng thời, ta sẽ đi theo bước chân của hai nhà toán học lớn mà tên tuổi sẽ nói sau, vì nếu không tác dụng câu chuyện của tôi có thể bị giảm sút.

1. *Sự tương tự gợi ý vấn đề.* Đa diện giới hạn bởi các mặt biên phẳng tương tự với đa giác giới hạn bởi các đoạn thẳng. Sự tương tự giữa các đa diện trong không gian và các đa giác trên mặt phẳng là rõ ràng. Tuy nhiên nghiên cứu các đa giác đơn giản và dễ hơn các đa diện; có thể hi vọng là mọi vấn đề có liên quan tới đa giác sẽ dễ hơn nhiều so với vấn đề tương ứng liên quan tới các tính chất của đa diện. Khi đã phát hiện được một sự kiện nào đó có liên quan tới các đa giác, ta cần phải cố gắng thiết lập một sự kiện tương tự đối với các đa diện: như vậy ta sẽ có nhiều may mắn tìm thấy một điều gì đó bổ ích.

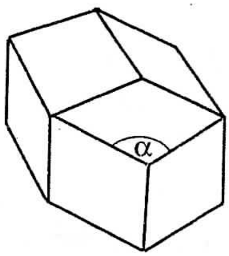
Chẳng hạn, như đã biết tổng các góc của tam giác là như nhau đối với mọi tam giác – nó không phụ thuộc dạng và kích thước tam giác và bằng 180^0, hay hai góc vuông, hay π (đo theo radian; sau này ta sẽ dùng độ đo này). Công thức tổng quát hơn, khẳng định *tổng các góc của một đa giác n cạnh bằng (n-2)π*. Trong lí thuyết các đa diện có gì tương tự như vậy không?

2. *Ta cố gắng xét tất cả các khả năng có thể.* Cho đến nay mục đích của ta còn chưa hoàn toàn rõ ràng. Ta muốn biết một cái gì đó về tổng các góc của một đa diện, nhưng những góc ở đây là gì?

Mỗi cạnh của đa diện ứng với góc nhị diện, tạo thành bởi các mặt, cắt nhau theo cạnh đó. Mỗi đỉnh của đa giác ứng với một góc khối tạo thành bởi các mặt (ba hay nhiều hơn) cắt nhau tại đỉnh đó. Vậy ta phải xét những góc nào? Phải chăng tổng những góc này khác có một tính chất đơn giản nào đó? Chẳng hạn tổng của sáu góc nhị diện của tứ diện có tính chất gì? Và có thể nói gì về bốn góc khối của nó?

Nhưng trong các tổng đó không một tổng nào không phụ thuộc vào dạng của tứ diện (xem bài tập 15). Thật vỡ mộng biết chừng nào! Ta không hề chờ đợi là tứ diện lại "xấu chơi" như vậy, vì ta nghĩ rằng tứ diện tương tự như tam giác.

Tuy nhiên có thể chưa phải đã hết vì chưa phải đã vét cạn mọi khả năng có thể. Ngoài những loại góc kể trên, đa diện còn có những góc thuộc loại khác (những góc mà, tiện đây cũng nói luôn, dễ thấy hơn là những góc khác; mỗi mặt bên đa giác *n* cạnh có *n* góc phẳng trong. Ta sẽ gọi những góc đó là *những góc phẳng* của đa diện và thử tìm tổng các góc phẳng của đa diện. Ta kí hiệu tổng đó là $\Sigma\alpha$ (xem hình 15.2).



Hình 15.2. Góc phẳng của đa diện

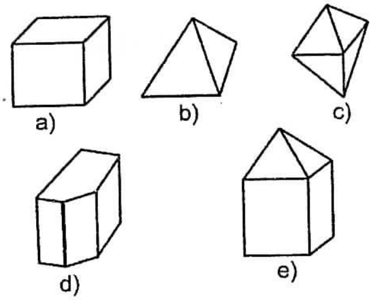
3. *Tiến hành quan sát.* Nếu ta chưa thấy có cách nào có triển vọng để tiếp cận bài toán, ta hãy tiếp cận bài toán như những nhà thực nghiệm: ta hãy lấy một số đa diện và với mỗi đa diện hãy tính $\Sigma\alpha$ (tổng các góc phẳng). Ta có thể bắt đầu từ hình lập phương (hình 15.3a). Vì tất cả có sáu mặt bên, nên tổng các góc phẳng trong trường hợp hình lập phương bằng: $\Sigma\alpha = 6.2\pi = 12\pi$.

Đối với tứ diện và bát diện, cũng giải quyết đúng như vậy (xem hình 15.3b và 3c), không có gì khó khăn.

Cho tới giờ, ba đa diện được xét đều là các đa diện đều. Để cho đa dạng, bây giờ ta xét hình lăng trụ ngũ giác chẳng hạn (lăng trụ có đáy là một ngũ giác, xem hình 15.2b). Đa diện này có hai mặt bên: năm hình chữ nhật và hai ngũ giác. Do đó, trong trường hợp này: $\Sigma\alpha = 5.2\pi + 2.3\pi = 16\pi$.

Sau đây, ta lấy một đa diện rất ít gặp trong các buổi lên lớp, là hình lập phương có chóp (hình 15.3e). Hình "tháp" này có chín mặt bên: năm hình vuông và bốn tam giác. Tổng các góc phẳng của nó bằng: $\Sigma\alpha = 5.2\pi + 4\pi = 14\pi$.

Các kết quả quan sát được cho trong bảng I; để dễ nhận ra các đa diện đã xét, ta chỉ ra với mỗi đa diện số mặt bên Γ của nó.



Hình 15.3. Các đa diện

Bảng I

Dạng của đa diện	Γ	$\Sigma\alpha$
Lập phương	6	12π
Tứ diện	4	4π
Bát diện	8	8π
Lăng trụ ngũ giác	7	16π
Tháp	9	14π

Các em có thấy điều gì đáng chú ý, điều gì có tính quy luật hay tính đều đặn không?

4. *Chúng ta quan sát, với sự chỉ đạo một tư tưởng nhất định.* Cho tới giờ ta vẫn chưa phát hiện ra được điều gì đặc biệt. Điều đó không có gì đáng ngạc nhiên: sự quan sát thuần tuý, không được chỉ đạo bởi một tư tưởng nào, rất ít khi dẫn tới các kết quả đáng chú ý.

Suy nghĩ một chút về những việc làm của ta, ta có thể tìm ra lối thoát. Trong mục 3 ta nhiều lần tính tổng các góc phẳng $\Sigma\alpha$, sau khi đã tính tổng các góc thuộc cùng một mặt bên mà tổng này ta đã biết chính xác và, về thực chất, nó dùng làm điểm xuất phát cho toàn bộ sự nghiên cứu. Để cho đa dạng, bây giờ ta xét tổng các góc phẳng tại cùng một đỉnh của đa diện. Tổng này ta không biết chính xác, nhưng ta biết rằng nó phải nhỏ hơn 2π, vì 2π là số đo của góc đầy (đương nhiên ta giới hạn ở các đa diện lồi). Sự kiện ta vừa nêu về trực quan là rõ ràng, còn về phép chứng minh chặt chẽ có thể tìm thấy trong Ơ-clít, xem XI, 21(*). Gọi B là số đỉnh của đa diện đang xét. Khi đó tổng của các góc phẳng $\Sigma\alpha < 2\pi B$.

Ta hãy kiểm tra hệ thức đó trên các tài liệu "thực nghiệm" hiện có. Ta lập bảng II là mở rộng của bảng I.

(*) Mệnh đề này có chứng minh trong các giáo trình hình học không gian.

Bảng II

Dạng của đa diện	Γ	$\Sigma\alpha$	B	$2\pi B$
Lập phương	6	12π	8	16π
Tứ diện	4	4π	4	8π
Bát diện	8	8π	6	12π
Lăng trụ ngũ giác	7	16π	10	20π
Tháp	9	14π	9	18π

Theo bảng đó, ta thấy là đối với tất cả các đa diện, số $2\pi B$ lớn hơn $\Sigma\alpha$. Khi xem xét bảng đó một cách kĩ càng, các em có lẽ sẽ nhận thấy là hiệu giữa các số là không đổi: $2\pi B - \Sigma\alpha = 4\pi$. Đó là một sự trùng hợp đơn giản? Và như vậy, ta muốn nghĩ rằng mối quan hệ phát hiện được không nhưng chỉ đúng cho các trường hợp đã được xét, mà nói chung còn đúng cho tất cả các đa diện lồi. Thành thử ta đi tới giả thiết cho rằng

$$\Sigma\alpha = 2\pi B - 4\pi. \qquad (?)$$

Dấu hỏi trong ngoặc có trong hệ thức vừa viết phải được hiểu là hệ thức đó chưa được chứng minh. Đó là một giả thiết chứ không phải một định lí.

5. *Kiểm tra giải thiết.* Sự quan sát của ta, được chỉ đạo bởi một tư tưởng rất đạt, đã cho phép phát triển một giả thiết đặc sắc. Nhưng phải chăng ta không phạm sai lầm? Ta hãy kiểm tra giả thiết thêm cho một ví dụ. Ngoài hình lập phương, tứ diện và bát diện đã xét, còn có hai đa diện đều nữa: khối 12 mặt và khối 20 mặt. Ta sẽ xét những đa diện đó. Ngoài ra có thể xét hình lăng trụ tổng quát đáy là đa giác n cạnh, rồi đến hình chóp đáy là đa giác n cạnh rồi đến hình lưỡng chóp đa giác n cạnh, là có thể tạo thành bởi hai hình chóp có đáy là đa giác n cạnh, chồng lên nhau theo đáy chung bằng nhau (thành thử các đáy không là mặt bên của lưỡng chóp). Độc giả có thể dễ dàng tiếp tục điền thông tin bảng II, thêm vào những vật thể vừa kể trên.

Hoan hô!- Hệ thức giả định (?) được nghiệm đúng trong mọi trường hợp được xét. Tuy nhiên sự kiện vừa nói chỉ là không bác bỏ giả định mà ta chưa chứng minh được.

Bảng II (tiếp theo)

Dạng của đa diện	Γ	$\Sigma\alpha$	$Đ$	$2\pi Đ$
Hình 12 mặt	12	36π	20	40π
Hình 20 mặt	20	20π	12	24π
Lăng trụ n giác	$n + 2$	$(4n - 4)\pi$	$2n$	$4n\pi$
Hình chóp n giác	$n + 1$	$(2n - 2)\pi$	$n + 1$	$(2n + 2)\pi$
Lưỡng chóp n giác	$2n$	$2n\pi$	$n + 2$	$(2n + 4)\pi$

6. *Một số suy nghĩ tiếp tục*. Khi tính $\Sigma\alpha$, ta nhiều lần sử dụng cùng một cách: bao giờ ta cũng bắt đầu với việc tính tổng các góc thuộc cùng một mặt bên. Tại sao trong trường hợp tổng quát lại không dùng thủ tục đó?

Để thực hiện kế hoạch đó, ta cần đưa vào những kí hiệu mới.

Giả sử $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_\Gamma$ theo thứ tự kí hiệu số cạnh thuộc mặt bên thứ nhất, thứ hai,..., thứ Γ (mặt bên cuối cùng). Theo các kí hiệu đó

$$\Sigma\alpha = \pi(s_1 - 2) + \pi(s_2 - 2) + \ldots + \pi(s_\Gamma - 2) = \pi(s_1 + s_2 + \ldots + s_\Gamma - 2\Gamma).$$

Hơn nữa, số cạnh của tất cả Γ mặt bên bằng $s_1 + s_2 + \ldots + s_\Gamma$. Trong tổng số đó mỗi cạnh của đa giác được tính *đúng* hai lần (vì mỗi cạnh thuộc đúng hai mặt bên) và do đó

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_\Gamma = 2C,$$

trong đó C là số cạnh của đa diện. Từ đó ta có:

$$\Sigma\alpha = 2\pi(C - \Gamma). \qquad (!)$$

Ta đã tìm được một biểu thức thứ hai cho tổng $\Sigma\alpha$, nhưng giữa chúng có một sự khác nhau cốt yếu: ta mới chỉ giả thiết là công thức (?) đúng, trong khi đó ta hãy chứng minh được công thức (!) là đúng. Khử $\Sigma\alpha$ khỏi (?) và (!), ta thu được hệ thức:

$$\Gamma + B = C + 2. \qquad (??)$$

Hệ thức này còn chưa được chứng minh và do đó được đánh dấu (??). Về thực chất biểu thức (??) cũng đáng nghĩ ngại như biểu thức (?). Khi tính tới mối liên hệ của những biểu thức đó với công thức (!) đã được chứng minh chặt chẽ, thì một trong hai biểu thức đó có thể được suy ra từ công thức kia và do đó hoặc là chúng cùng đúng hoặc là chúng cùng không đúng. Có nghĩa hai biểu thức đó là *tương đương*.

7. *Kiểm tra*. Hệ thức nổi tiếng (??) cũng như hệ thức (?) ít nổi tiếng hơn là đều do Ơ-le tìm ra. Ông này không biết là trước đó nhà toán học Đề-các cũng đã đi tới chính những hệ thức đó. Chúng ta biết về công trình của Đề-các về vấn đề này theo một vài câu ngắn trong số những bản thảo chưa công bố của ông, được ấn hành một trăm năm sau khi Ơ-le mất.

Nhà toán học Ơ-le đã dành cho vấn đề này hai bài báo đặc biệt và cũng có đả động tới trong một bài thứ ba. Bài thứ ba này liên quan tới vấn đề tổng các góc khối của tứ diện (như ta đã nói tới ở điểm 2 phụ thuộc vào dạng của tứ diện).

Khi nghiên cứu vấn đề đang xét, trong các điểm trên, nói chung đã dựa theo bài báo thứ nhất của Ơ-le trong đó ông kể cho biết đã có được phát minh đó như thế nào, nhưng không đưa ra những chứng minh chính thức, mà chỉ giới hạn ở rất nhiều phép kiểm tra. Cả về mặt này ta cũng muốn đi theo Ơ-le. Kết hợp các bảng trên và đưa vào đại lượng C, ta có bảng III.

Hệ thức giả định (??) được xác nhận với mỗi hàng của bảng III. Điều đó khiến cho hệ thức chắc chắn đúng nhưng đương nhiên điều đó không thể xem là tương đương với một phép chứng minh.

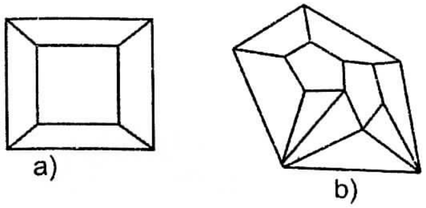
Bảng III

Dạng của đa diện	Γ	B	C
Lập phương	6	8	12
Bát diện	8	6	12
Khối 12 mặt	12	20	30
Khối 20 mặt	20	12	30
Hình tháp	9	9	16
Lăng trụ n giác	$n + 2$	$2n$	$3n$
Chóp n giác	$n + 1$	$n + 1$	$2n$
Lưỡng chóp n giác	$2n$	$n + 2$	$3n$

8. *Chúng ta cân nhắc các kết quả thu được*. Trong bài báo thứ hai của mình, Ơ-le đã thử cố chứng minh hệ thức (??), nhưng ý đồ của ông chưa có kết quả. Thế mà, về thực chất, các lập luận ở trên đã dẫn ta tới gần phép chứng minh. Chỉ cần hình dung được rõ ràng là ta đã tiến được xa có kết quả như thế nào.

Hãy thử phân tích xem kết quả (!) có ý nghĩa gì. Đặc biệt hãy chú ý xem điều gì xảy ra khi đa diện thay đổi hình dạng. Ta sẽ xem sự thay đổi đó là liên tục, tức giả thiết rằng độ nghiêng của các mặt bên được thực hiện từ từ, hiểu theo nghĩa là sự biến đổi do nó gây ra đối với các giao tuyến và giao điểm của các mặt bên (các cạnh và đỉnh của đa diện) không dẫn tới một sự thay đổi "cấu hình" hay "cấu trúc hình thái" của đa diện. Nói cách khác là giữ nguyên các quan hệ qua lại giữa các cạnh và đỉnh. Với những giả thiết như vậy số Γ, C và B (theo thứ tự là số các mặt bên, số cạnh và số đỉnh) cũng không đổi. Phép biến đổi như vậy của đa diện có thể thay đổi từng góc phẳng riêng biệt α; tuy nhiên theo hệ thức (!) mà hệ thức ! thì ta đã chứng minh), nó không thể ảnh hưởng tới toàn bộ các góc phẳng, tức tổng $\Sigma\alpha$ của tất cả các góc phẳng cũng không đổi. Sự kiện đó cho phép thấy được những khả năng mà sự kiện biến đổi hình dạng ban đầu của đa diện mở ra trước mắt chúng ta; phải cho đa diện một hình dạng thuận tiện cho phép ta tính được dễ dàng tổng (không đổi) $\Sigma\alpha$.

Thực vậy, hãy lấy một trong các mặt bên của đa diện làm đáy. Đặt mặt đáy đã chọn nằm ngang và "căng" nó ra (đồng thời "nén" các mặt khác xuống) sao cho có thể chiếu vuông góc toàn bộ đa diện lên đáy đó. Hình 15.4a có được theo cách đó từ hình lập phương, còn hình 4b ứng với trường hợp đa diện tổng quát. Cả hai trường hợp đều là đa diện được làm bẹt, hợp nhất lại chồng lên nhau (có cùng chu tuyến), trong đó đa giác trên được chia làm Γ - 1 đa giác thành hai tấm đa giác nhỏ (trong đó Γ là số mặt bên của đa diện ban đầu), còn đa giác dưới (đáy được kéo căng ra) không chia thành các phần nhỏ hơn.



Hình 15.4. Các đa diện được làm bẹp

Ta gọi r là số cạnh của đa giác "rìa" ngoài.

Ta tính tổng $\Sigma\alpha$ cho đa diện bẹt (ta biết rằng tổng số đó đối với đa diện xuất phát cũng chính từ một). Tổng đó gồm ba phần:

- Tổng các góc của tấm dưới (của đáy dưới "căng") bằng $(r - 2)\pi$;

- Tổng các góc của đa giác "rìa" ngoài, là chu tuyến của tấm ở trên, cũng bằng $(r - 2)\pi$;

- Tổng các góc "trong' của tấm trên - tất cả những góc này tập trung quanh $B - r$ đỉnh trong và đo đó bằng $(B - r)2\pi$;

Lấy tổng của ba phần đó ta có: $\Sigma\alpha = 2(r - 2)\pi + (B - r)2\pi = 2\pi B - 4\pi$.

Điều đó chứng tỏ giả định (?) và do đó cả giả định (??) đã được chứng minh.

§7. PHƯƠNG PHÁP KHOA HỌC: HÃY PHỎNG ĐOÁN VÀ HÃY THỬ XEM

Những ví dụ trên sẽ cho phát biểu một số suy nghĩ chung. Đương nhiên những suy nghĩ này sẽ xuất hiện một cách tự nhiên hơn và sẽ được dẫn chứng tốt hơn nếu như những ví dụ của chúng ta được biện luận chi tiết hơn và số ví dụ nhiều hơn (xem các bài tập và các nhận xét bổ sung ở cuối chương). Tuy nhiên ngay trên cơ sở những điều đã xét, cũng có thể nói một cái gì đó.

Quan sát có thể dẫn tới phát minh.

Quan sát có mục đích phát hiện một sự kiện lặp lại đều đặn, một lược đồ hay quy luật nào đó.

Quan sát có nhiều may mắn dẫn tới những kết quả đáng chú ý, nếu như nó được chỉ đạo bởi một ý hay tư tưởng đạt (xem điểm 4, §6).

Quan sát có thể dùng làm bàn đạp cho những suy rộng và những giả định, nhưng nó không là chứng minh.

Hãy kiểm tra lại điều giả định của bạn trong các trường hợp riêng và trên những sự kiện được suy ra từ giả định đó.

Mỗi trường hợp riêng được xác nhận hay một hệ quả đúng đắn lại củng cố thêm sự phỏng đoán của bạn.

Tiến hành phân biệt kĩ càng giữa gợi ý cho phép chứng minh với chính bản thân phép chứng minh, giữa phỏng đoán và sự kiện.

Đừng xem thường những sự tương tự; chúng có thể dẫn tới sự phát hiện những sự kiện mới (ta đã minh hoạ điều đó về sự tương tự giữa các đa giác và đa diện; xem điểm 1, §6).

Hãy nghiên cứu những trường hợp giới hạn, (tương tự các tam giác và đa diện suy biến; xem §4 và điểm 8, §6). Những nhận xét vừa nêu trên cần được phát biểu chính xác hơn, chi tiết hơn và hệ thống hơn và cần nhiều tài liệu minh hoạ hơn (xem toán học và những suy luận có lí). Tuy nhiên, ngay ở dưới dạng sẽ được trình bày trong sách này và trong một dạng nào chúng có thể xuất hiện từ các ví dụ, giống như các ví dụ xét ở trên, hay từ một cuộc tranh luận được hướng dẫn tốt ở trong lớp, chúng đều có thể tạo ra cho học sinh trung học (hay học sinh thuộc cấp khác) một ý niệm khá rõ ràng về công việc nghiên cứu khoa học. Các nhà triết học - trước kia cũng như hiện nay - đã và còn đang phát biểu những quan điểm rất khác nhau về những khái niệm: "nghiên cứu khoa học", "phương pháp khoa học", "phép quy nạp",... Nhưng, về thực chất, họ nghiên cứu gì? Họ đề ra các giả thuyết và sau đó đem kiểm nghiệm chúng. Nếu như các em muốn có được đặc trưng của phương pháp khoa học trong 5 chữ, thì theo ý tôi, đó là

PHỎNG ĐOÁN VÀ KIỂM NGHIỆM

§8. MỘT SỐ ĐẶC ĐIỂM CỦA CÁC BÀI TOÁN "CÓ TÍNH CHẤT NGHIÊN CỨU KHOA HỌC"

Những bài toán ta xét có khác với những bài toán thông thường quen thuộc. Ở đây tôi đặc biệt muốn nhấn mạnh ba giai đoạn:

1. Người học sinh nhận được bài toán dưới dạng đã được chuẩn bị sẵn sàng của thầy giáo hay từ sách giáo khoa và thường là thầy giáo không quan tâm nhiều tới việc học sinh có thích thú với bài toán được chọn không (về sách giáo khoa thì còn có thể nói về điều đó một cách tin chắc hơn! Tuy nhiên, đối với nhà toán học có thể nói việc chọn bài toán là bước quan trọng nhất; phải nghĩ, phải tìm ra bài toán có sức hấp dẫn học sinh, khiến học sinh phải gắng sức đồng thời cũng không phải là quá sức. Trong §2 và §4, thầy giáo đã hành động để học sinh *có thể tham gia vào việc thiết lập bài toán* (xem điểm 1, §5 chương 14).

2. Phần lớn các bài toán trong các sách bài tập và giáo khoa ít có liên quan với nhau: chúng nhằm minh hoạ một quy tắc cụ thể nào đó và chỉ cho khả năng thực hành trong việc áp dụng quy tắc đó. Sau khi những bài tập đó đã làm hết nhiệm vụ của chúng thì có thể (và cần phải) được quên đi. Ngược lại, các bài toán trong §2 và §6 là những bài toán có *nội dung sâu sắc* chúng đẻ ra những câu hỏi bổ ích và từ đó lại sinh những bài toán lí thú và cứ tiếp tục như thế cho tới khi sự phân nhánh của bài toán ban đầu che phủ một lĩnh vực rộng lớn (những sự phân nhánh tương tự được xét chi tiết trong các bài tập và nhận xét bổ sung ở cuối chương này).

3. Ở nhiều trường học có cấm không cho "phỏng đoán", trong khi mà trong mọi nghiên cứu khoa học (kể cả toán học) thì "trước tiên hãy phỏng đoán và sau đó hãy chứng minh" lại hầu như là quy tắc.

Trong các bài toán ta xét thì quan sát, phỏng đoán, kết luận quy nạp, nói tóm lại *những suy luận có lí* đóng một vai trò xuất sắc.

4. Mặc dù điểm 1 (tham gia vào việc thiết lập bài toán) không là thứ yếu, hai điểm sau có nghĩa quan trọng hơn. Các bài toán có nội dung sâu sắc, có liên quan với thực tại quanh ta hay những lĩnh vực tư duy khác, cũng như những bài toán dựa vào việc áp dụng các *kết luận có lí,* phát triển khiếu suy luận ở học sinh, đều có thể thúc đẩy sự trưởng thành về mặt trí tuệ nhanh hơn các bài toán có nhiều trong sách giáo khoa và chỉ thích hợp để quen áp dụng cho một quy tắc riêng lẻ.

§9. KẾT LUẬN

Những ví dụ và nhận xét tương tự như ở chương này, theo tôi có thể được nghiên cứu ở trình độ phổ thông. Chúng có thể có ích cho học sinh về ba phương diện:

Trước hết, chúng có thể làm cho học sinh thích thú toán học, vì rằng chúng mở ra khả năng cho công việc sáng tạo, độc lập.

Hai là (thậm chí điều này còn quan trọng hơn vì nó đụng chạm tới quyền lợi của số lớn học sinh), chúng giúp để hiểu không những lĩnh vực toán học mà cả những lĩnh vực khoa học khác, chúng cho một khái niệm ban đầu, nhưng hoàn toàn thoả đáng về "việc nghiên cứu có tính quy nạp" và về "phương pháp khoa học".

Thứ ba là chúng mở ra trước học sinh một trong những hình thái của toán học rất quan trọng cũng như ít được nói tới: toán học, trong các bài toán đó, là một khoa học có liên quan chặt chẽ với các khoa học tự nhiên khác, là biến dạng của "khoa học thực nghiệm" trong đó quan sát (thực nghiệm) và sự tương tự có thể dẫn tới những phát minh (khía cạnh đó của toán học cần phải đặc biệt lôi cuốn các " khách hàng" tương lai của toán học: các nhà tự nhiên học và kĩ sư).

Tôi hi vọng là trong các trường phổ thông sau này sự phát minh toán học, phương pháp khoa học và phép quy nạp - một khía cạnh của toán học - sẽ không bị xem nhẹ, như ta thấy ngày nay.

BÀI TẬP VÀ CHÚ THÍCH BỔ SUNG CHO CHƯƠNG 15

PHẦN 1

1. Trong số những phỏng đoán được gợi ý trong danh sách ở §2 và được phát biểu trong §3, có những phỏng đoán nào mà bạn có thể tự chứng minh được không? Hãy chọn ta một mệnh đề dễ và chứng minh nó.

2. (Xem §4). Hãy tìm ra những phương pháp khác kiểm tra công thức Hê-rôn.

3. (Xem §5). Gọi a, b, c là các cạnh của tam giác, d là chiều dài của phân giác đối diện với cạnh c.

1) Tính d theo a, b, c.

2) Hãy kiểm tra công thức thu được trong bốn trường hợp được minh hoạ bởi các hình 15.1b - 15.1d.

4. (Xem §5). Trên hình 15.1d cung tròn bán kính đơn vị chia tam giác (các điểm của cung đó biểu thị các tam giác dạng khác nhau) làm hai phần, một phần ở trên và một phần ở dưới cung đó. Các tam giác ứng với từng phần đó có hình dạng thế nào?

5. (Xem điểm 8, §6). Hãy mô tả chính xác hơn việc chuyển từ đa diện "dạng tổng quát" tới đa diện " bẹt".

6. Xét đa diện lồi với Γ mặt bên, B đỉnh và C cạnh. Gọi Γ_n (trong đó $n = 3, 4\ldots$) là số các mặt n giác và B_n - số các đỉnh của các n giác của nó. Các tổng $\Sigma\Gamma_n$ và ΣB_n bằng bao nhiêu trong đó Σ kí hiệu $\sum_{n=3}^{\infty}$ (Tất nhiên, trong số các số Γ_n chỉ có một số hữu hạn khác không; đối với các B_n cũng vậy). Thành thử, thực tế Σ kí hiệu một tổng hữu hạn. Trong một số bài tập sau này, có liên quan tới bài tập đang xét, kí hiệu Σ cũng có ý nghĩa như vậy.

7. (Tiếp theo). Hãy biểu diễn theo một số cách khác nhau, số các góc phẳng.

8. (Tiếp theo). Khi vẽ các đường chéo không cắt nhau của các mặt bên ("các đường chéo bề mặt"), ta đã chia mỗi mặt bên của đa diện thành các tam giác. Hãy biểu diễn theo một số cách khác nhau số các tam giác mà diện tích toàn phần của đa diện được chia ra.

9. Chứng minh rằng: $C \geq \frac{3\Gamma}{2}, C \geq \frac{3B}{2}$.

Trong hệ thức thứ nhất có thể đạt được dấu đẳng thức không, trong những trường hợp nào? Cũng câu hỏi đó đối với hệ thực thứ hai?

10. Chứng minh rằng trong một đa diện lồi bất kì, trị số trung bình của góc phẳng không nhỏ thua $\frac{\pi}{3}$ nhưng bao giờ cũng nhỏ hơn $\frac{2\pi}{3}$.

11. Chứng minh rằng trong một đa diện lồi bất kì, bao giờ cũng tồn tại một mặt bên có số cạnh nhỏ hơn 6.

12. Cho biết số đỉnh B của một đa diện lồi bất kì, tìm giá trị lớn nhất có thể của số mặt bên Γ và số cạnh C. Những giá trị này đạt được trong điều kiện nào?

13. Cho biết số mặt bên Γ của một đa diện lồi, tìm giá trị lớn nhất của số đỉnh B và số cạnh C. Những giá trị này đạt được trong điều kiện nào?

14. Nếu một đoạn thẳng nối hai đỉnh nào đó của một đa diện lồi thì đoạn thẳng đó là cạnh, hay là đường chéo của mặt bên, hay là đường chéo của đa diện. Ta có đường chéo trong trường hợp không có điểm nào của đoạn thẳng, trừ ra hai đầu mút, thuộc mặt bên

của đa diện. Kí hiệu $Đ$ là số đường chéo của đa diện còn C, Γ; B; Γ_n và B_n vẫn được dùng với các ý nghĩa như trước.

1) Tính $Đ$ đối với năm đa diện đều.

2) Tính $Đ$ đối với hình lăng trụ n giác, hình chóp n giác và hình lưỡng chóp n giác.

3) Biểu thị $Đ$ theo Γ trong trường hợp tất cả các mặt trên của đa diện đều là đa giác với cùng một số cạnh $n = 3, 4, 5\ldots$

4) Biểu thị $Đ$ trong trường hợp tổng quát.

Hãy minh hoạ trường hợp tổng quát bằng các ví dụ. Hãy thận trọng, có thể là các vấn đề được đặt ra không đúng đắn.

15. (Xem điểm 2, §6) kí hiệu $\Sigma\delta$ là tổng sáu góc nhị diện của tứ diện và $\Sigma\varpi$ là bốn góc tam diện của nó.

Hãy tính hai tổng đối với ba trường hợp giới hạn sau:

1) Tứ diện được nén thành tam giác sao cho ba cạnh của nó trở thành các cạnh của tam giác còn ba cạnh kia thành các đoạn thẳng nối một điểm trong của tam giác với các đỉnh của nó.

2) Tứ diện được nén thành một tứ giác sao cho sáu cạnh của nó trở thành bốn cạnh và hai đường chéo của tứ diện.

3) Một trong các đỉnh của tứ giác chạy ra xa vô cùng, còn ba cạnh hội tụ tới đỉnh đó trở thành ba tia song song và vuông góc với mặt đối diện.

(Xét hình cầu đơn vị có tâm tại đỉnh của góc đa diện. Phần mặt ngoài của nó, rơi vào trong góc đa diện là đa giác cầu. Diện tích của đa giác cầu là số đo của "góc đặc").

16. (Tiếp theo). Hãy nghiên cứu đáp số của bài tập 15. Hãy so sánh hai tổng tìm thấy. Sự biến đổi của chúng có mang cùng một tính chất gì không? Chúng biến đổi có phù hợp với nhau không?

17. Giả sử đa diện có Γ mặt bên, B đỉnh và C cạnh. Kí hiệu $\Sigma\delta$ là tổng C góc nhị diện và $\Sigma\omega$ là tổng $Đ$ góc đặc của nó. Hãy tính hai tổng đó đối với hình lập phương.

18. (Tiếp theo). Tính các tổng $\Sigma\delta$ và $\Sigma\omega$ đối với hai trường hợp suy biến đơn giản nhất đã được nghiên cứu của hình chóp n giác.

19. (Tiếp theo). Tính các tổng $\Sigma\delta$ và $\Sigma\omega$ đối với hai trường hợp giới hạn đã được nghiên cứu của hình lăng trụ n giác và hình lưỡng chóp n giác.

20. (Tiếp theo). Đối với tất cả các trường hợp đã xét, hãy so sánh các tổng $\Sigma\delta$ và $\Sigma\omega$ với các số Γ, B, C. Theo dõi xem các đại lượng được so sánh đó đã biến đổi như thế nào. Trong số đó, những biến đổi của những đại lượng nào có liên hệ mật thiết với nhau.

21. (Tiếp theo). Nếu như bạn tìm ra được quy tắc, được củng cố bởi những kết quả *quan sát của bạn, thì hãy cố chứng minh nó.*

PHẦN 2

22. Hãy thử cố đoán trước các câu trả lời cho những câu hỏi sau:

Trong số tất cả các tam giác, nối tiếp trong một đường tròn cho trước, tam giác nào có diện tích lớn nhất?

Trong số tất cả các tứ giác, nội tiếp trong một đường tròn đã cho, tứ giác nào có diện tích lớn nhất? Trong số tất cả các n giác, nội tiếp trong một đường tròn cho trước, hình n giác nào có diện tích lớn nhất?

23. Hãy thử đoán câu trả lời cho những câu hỏi sau: Trong số tất cả các tam giác, ngoại tiếp một đường tròn cho trước, tam giác nào có diện tích nhỏ nhất?

Trong số tất cả các tứ giác, ngoại tiếp một đường tròn cho trước, tứ giác nào có diện tích nhỏ nhất?

Trong số tất cả các n giác, ngoại tiếp một đường tròn cho trước, n giác nào có diện tích nhỏ nhất?

24. *Nguyên lí thiếu các cơ sở đủ*. Các câu trả lời "tự nhiên" cho các tam giác 22 và 23 là đúng (*). Ở đây ta không thảo luận về những chứng minh của chúng. Ta muốn hiểu xem tại sao trong những trường hợp tương tự như vậy, con người thường có những phỏng đoán đúng đắn.

Đương nhiên không nên hi vọng là ta sẽ tìm được câu trả lời chính xác cho câu hỏi đó. Tuy nhiên tôi nghĩ rằng sự mô tả dưới đây biểu thị khá tốt những cảm giác vốn có của nhiều người.

Tại sao ta lại quen thuộc với những đa giác đều như vậy? Hình phẳng " hoàn chỉnh" nhất, đối xứng nhất là đường tròn. Nó có vô số trục đối xứng bởi vì nó đối xứng đối với một đường kính bất kì. Trong số tất cả các đa giác với số cạnh n cho trước thì n giác đều "gần với hình hoàn chỉnh nhất" (tức hình tròn!). Trong số các n giác, nó đối xứng nhất vì nó có nhiều trục đối xứng hơn bất kì một n giác nào khác. Do đó có thể hi vọng đa giác đều nội tiếp sẽ "lấp đầy" hình tròn tốt hơn (còn đa giác đều ngoại tiếp sẽ "bao" hình tròn sát hơn) so với bất kì một đa giác nào có cùng một số cạnh. Sự tương tự cũng đóng một vai trò. Chính vì đa giác đều thực hiện cực trị trong bài toán đẳng chu (xem §3 và bài tập 1), giống với các bài toán vừa phát biểu trên.

Còn có cả những bằng chứng có lí khác. Bây giờ ta phân tích một lập luận trong số đó, khá tinh vi và rất đáng chú ý. Ta phải nói về các bài toán chứa một số ẩn. Một ẩn thoả mãn một điều kiện chung cho mọi ẩn; không một đỉnh nào của đa diện ở vào vị trí thuận lợi hơn những đỉnh khác đối với điều khiển đó và điều đó cũng đúng với các cạnh của đa diện. Trong trường hợp này có thể giả thiết các cạnh cũng như các góc của đa diện thoả mãn điều kiện đã nói trên và do đó các nghiệm bài toán của ta phải bằng nhau. Như vậy, có thể hi vọng rằng đa diện đều sẽ là nghiệm bài toán.

(*) Đối với bài tập 22 xem Toán học và những suy luận có lí.

Giả thiết đó nằm trong cơ sở của *Nguyên lí kết luận* có lí mà ta thử phát biểu như sau:

"Trong số tất cả những khả năng chấp nhận được, không xem một khả năng nào là ưu tiên hơn, nếu như điều đó chưa có cơ sở đủ".

Có thể gọi nguyên lí đó là *Nguyên lí thiếu các cơ sở* đủ để chọn một cái này hay ưu tiên một cái khác. Nó đóng một vai trò nhất định khi giải toán, thường nó cho phép tiên đoán lời giải hay lựa chọn thủ tục dẫn tới lời giải. Trong sách toán, cách phát biểu đặc biệt sau đây thuận tiện hơn:

"Có thể hi vọng rằng các ẩn, đóng vai trò như nhau trong điều kiện bài toán, sẽ đóng một vai trò như nhau cả trong lời giải của bài toán". Hay ngắn gọn hơn: "không có những khác biệt trong điều kiện có nghĩa là sẽ không có những khác biệt cả trong các kết quả". Hay: "Có thể hi vọng là các ẩn chịu cùng những điều kiện như nhau sẽ có các giá trị như nhau".

Trong các bài toán hình học, nguyên lí đó, như ta đã thấy, dẫn tới giả thiết về tính đối xứng của hình phải tìm. Do đó, những phát biểu sau đây của nguyên lí thiếu các cơ sở đủ thường là dễ thấy hơn (mặc dù thực ra chúng lại mơ hồ hơn):

"Có thể hi vọng là một phép đối xứng bất kì, phát hiện được trong các dữ kiện và điều kiện của bài toán, sẽ được phản ánh trong lời giải".

"Phép đối xứng sinh ra sự đối xứng".

"Sự đối xứng, được phát hiện trong các dữ liệu và điều kiện của bài toán, cần phải được phản ánh không chỉ ở "đối tượng của lời giải" mà còn ở "thủ tục giải". [(*)]

Đương nhiên không được quên rằng, ở đây ta nói về các nguyên lí suy đoán và không thể thay sức mạnh của phép chứng minh bằng tính hợp lí của suy luận [(**)].

Nguyên lí thiếu cơ sở đủ đóng một vai trò nhất định không chỉ trong các vấn đề thuần tuý toán học.

Có thể đưa ra một ví dụ đặc sắc, mâu thuẫn với nguyên lí đó (để ngắn gọn, ta dùng thuật ngữ đại số). Đó là bài toán: cho giá trị n đa thức đối xứng cơ bản của n số; cần tìm những số đó. Nguyên lí thiếu cơ sở đủ buộc ta nghĩ rằng n số đó phải như nhau - nhưng tuy nhiên cần phải hi vọng là n nghiệm của phương trình đại số với các hệ số được cho trước "một cách hú hoạ" sẽ khác nhau.

25. *Con lừa Bu-ri-đa-nôp*. Một con lừa rất đói tìm thấy hai đống cỏ giống hệt nhau (và rất ngon!) - một đống bên phải, một đống bên trái - còn con lừa thì đứng ở chính giữa, ở vị trí đối xứng đối với hai đống cỏ. Lực kéo con lừa tới hai đống cỏ là cân bằng và con lừa không thể chọn được đống cỏ nào và đã chết đói.

Con lừa khốn khổ - nó trở thành vật hi sinh của nguyên lí thiếu cơ sở đủ (để ưu tiên đống cỏ này hay đống cỏ kia).

(*) Xem Giải một bài toán như thế nào? (sự đối xứng) và nhận xét bổ sung 13 của chương 5 (thuật ngữ).

(**) Xem Toán học và những suy luận có lí.

26. Trong tất cả các đa diện cho B đỉnh cho trước nội tiếp trong một hình cầu cho trước, đa diện nào có thể tích lớn nhất?

Hãy phỏng đoán kết quả khi xem $B = 4, 6, 8$.

27. Trong tất cả các đa diện Γ mặt bên ngoài tiếp một hình cầu cho trước, đa diện nào có thể tích lớn nhất? Hãy phỏng đoán câu trả lời khi xét $\Gamma = 4, 6$ và 8.

28. Cho hình cầu bán kính r. Hãy tính thể tích lập phương nội tiếp trong nó.

29. Ta xem hình cầu bán kính r như quả địa cầu. Cho nội tiếp với xích đạo một hình lục giác đều. Khi đó sáu đỉnh của lục giác, cực Bắc và cực Nam có thể xem như tám đỉnh của một lưỡng chóp. Tính thể tích của lưỡng chóp đó.

Bạn có nhận xét gì không?

30. Cho hình cầu bán kính r. Tính thể tích khối bát diện (đều) ngoại tiếp nó.

31. Một lăng trụ thẳng lục giác ngoại tiếp một hình cầu bán kính r mà ta xem là quả địa cầu. Mặt ngoài của lăng trụ tiếp xúc với hình cầu tại sáu điểm nằm dọc theo xích đạo cách đều nhau. Hãy tính thể tích lăng trụ.

Bạn có nhận xét gì không?

32. Hãy so sánh các khối hình học xét trong các bài tập 28 và 29 cũng như trong các bài tập 30 và 31 và thử tìm sự giải thích có lí các kết quả thu được trong các bài tập đó.

33. Đây là một phỏng đoán có lí: trong hai đa diện với cùng số đỉnh B, nội tiếp trong cùng một hình cầu, thì đa diện có số mặt bên và cạnh lớn hơn sẽ lấp đầy hình cầu hơn. Giả sử là như vậy. Bạn sẽ nghĩ đa diện có dạng nào có thể là lời giải của bài tập 26.

34. Đây cũng là một phỏng đoán có lí: trong hai đa diện có cùng số mặt bên Γ, ngoại tiếp cùng một hình cầu, thì đa diện có số đỉnh và cạnh lớn hơn sẽ bao hình cầu sát hơn. Giả sử là như vậy. Bạn sẽ nghĩ đa diện có dạng nào có thể là lời giải của bài tập 27?

35. Bạn không nhận xét gì thêm đối với bài tập 32 sao?

36. Trong số các đa diện với diện tích mặt ngoài và số mặt bên cho trước, đa diện nào có thể tích lớn nhất?

Hãy dự đoán câu trả lời đặt $\Gamma = 4, 6$ và 8.

37. Hãy tìm tất cả các nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x^2 - 4xy + 3y^2 = 36, \\ 3x - 4xy + 2y^2 = 36. \end{cases}$$

Ở đây có thể vận dụng nguyên lí thiếu cơ sở đủ như thế nào?

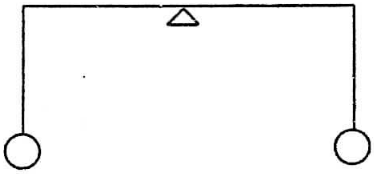
38. Hãy tìm tất cả các nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 6x^2 - 3y^2 + 3z^2 + 8(yz + zx + xy) = 36, \\ 3x^2 - 6y^2 + 3z^2 + 8(yz + zx + xy) = 36, \\ 3x^2 - 3y^2 + 6z^2 + 8(yz + zx + xy) = 36. \end{cases}$$

39. Tìm mọi nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x^2 - 5y^2 + 6z^2 + 8(yz + zx + xy) = 36, \\ 6x^2 - y^2 + 5z^2 + 8(yz + zx + xy) = 36, \\ 5x^2 - 6y^2 + z^2 + 8(yz + zx + xy) = 36. \end{cases}$$

40. *Nguyên lí thiếu cơ sở đủ trong vật lí hay là "thiên nhiên không dám để không được dự đoán".* Ở đầu công trình của Ac-si-mét" về sự cân bằng của các hình phẳng hay về trọng tâm của các hình phẳng" có xét vấn đề về sự cân bằng của các đòn bẩy (đòn bẩy là một dầm cứng nằm ngang có một điểm tựa; ta bỏ qua trọng lượng của bản thân dầm). Ac-si-mét xét trường hợp điểm tựa ở chính giữa đòn bẩy, còn các trọng lượng treo ở hai đầu dầm bằng nhau (hình 15.5). Ông cho rằng trong trường hợp hoàn toàn đối xứng như vậy, hiển nhiên có vị trí cân bằng. Tiên đề thứ nhất của Ac-si-mét nói rằng "các trọng lượng bằng nhau nằm cách đều nhau ở trong trạng thái cân bằng". Về thực chất, đòn bẩy ở tình trạng của con lừa Bu-ri-đa-nôp: không có cơ sở đủ để nghiêng về phía này hay phía kia.



Hình 15.5. Các trọng lượng bằng nhau ở cách đều nhau

Ta thử đi sâu thêm vào bản chất của vấn đề. Nếu có một người nào đó, đối lập với tiên đề Ac-si-mét, đề ra một quy tắc khác chẳng hạn: Ở vị trí như trong hình 15.5, quả cân bên phải trĩu xuống, thì tình hình sẽ ra sao? Giả sử là như vậy. Khi đó nếu như quy tắc đó đúng với tôi đang đứng nhìn đòn bẩy, thì nó sẽ là sai đối với bạn tôi, đứng đối diện với tôi ở phía bên kia và cũng nhìn vào đòn bẩy.

Như vậy quy tắc, mâu thuẫn với tiên đề Ac-si-mét, không thể đúng trong trường hợp tổng quát. Lập luận đó giúp phát hiện nguồn gốc sâu kín làm cơ sở cho sự trung thành của ta đối với tiên đề Ac-si-mét: ta không muốn chấp nhận rằng các quy luật của thiên nhiên không cho phép tiên đoán vị trí của đòn bẩy sẽ như thế nào.

41. *n điểm của hình cầu.* Ta lại nhớ lại các bài tập 26 và 27 như hai trong một loạt các bài toán tương tự.

Hãy sắp xếp trên mặt của hình cầu *n* điểm sao cho:

1) *Đa diện nối tiếp trong hình cầu* có đỉnh là các điểm đó có *thể tích lớn nhất có thể.*

2) *Đa diện ngoại tiếp có n* mặt bên tiếp xúc với hình cầu tại các điểm đó, có *thể tích nhỏ nhất có thể.*

3) Khoảng cách ngắn nhất trong số $\frac{n(n-1)}{2}$ khoảng cách giữa n điểm đó là lớn nhất có thể (bài toán cực đại của các cực tiểu đó được gọi là *"bài toán về n kẻ yếm thế"*).

4) n diện tích đơn vị tương tác nhau, đặt tại những điểm đó, làm thành một hệ thống ở trạng *thái cân bằng tĩnh điện.*

5) Trên mặt hình cầu cho trước một sự phân bố trọng lượng nào đó, mà mật độ thay đổi tại n điểm. Cần chọn những điểm đó sao cho, theo kết quả của các phép đo, có thể đánh giá khối lượng chung một cách tốt nhất. (Đó là "*bài toán về n kí giả*" của hãng thông tấn báo chí hay *bài toán về nội suy* tốt nhất. Gao-xơ đã giải bài toán tương tự đối với đoạn thẳng theo nghĩa quen thuộc nhờ vào phép cầu phương nổi tiếng của ông).

Trong cả năm bài toán đó, trong các trường hợp khi n = 4, 6, 8, 12 và 20, đáng chú ý là những điểm là đỉnh của các đa diện đều nội tiếp, mặc dù là, như đã chỉ ra trong một số ví dụ đã xét ở trên, chúng có thể không cho nghiệm bài toán.

Nếu n điểm được chọn hú hoạ (khi n không quá lớn, chúng ta có thể chẳng hạn là n định tinh sáng nhất trên bầu trời) thì phải tính *giá trị trung bình* từ một điểm tới điểm gần nó nhất, rồi tới điểm thứ ba...

PHẦN 3

42. *Những bài toán khác:* Ta xét thêm một số bài toán nghiên cứu khoa học, khác với những bài toán được phân tích trong chương này, nhưng tương tự với chúng. Ta đặc biệt chú ý tới những câu hỏi sau (hay những câu hỏi tương tự): Bài toán có tương ứng với chương trình không và ứng với điểm nào? Bài toán có bổ ích không? Bài toán có nội dung sâu xa không? Có minh hoạ một tư tưởng quan trọng nào không? Khi giải bài toán đó có thể áp dụng lập luận quy nạp hay lập luận có lí được không? Có thể đưa ra lớp cho học sinh chứng minh được không? Phải đưa bài toán ra lớp dưới hình thức nào?

43. Trong §4 ta đã tiến hành kiểm tra một công thức tổng quát, bằng cách xét nó trong những trường hợp riêng. Em đã gặp ở đâu những trường hợp tương tự? Hãy tiến hành lập luận tương tự thêm cho một số trường hợp. Những lập luận tương tự đó có lợi gì?

44. Trong §5, mục đích chính của ta là *cố gắng minh hoạ* bằng đồ thị một trong những khía cạnh của lập luận quy nạp. Học sinh có thể rút ra thêm điều gì bổ ích từ mục đích đó không?

45. *Các phân số tuần hoàn.* Các phân số

$\frac{1}{6}$ = 0,1666666666...,

$\frac{1}{7}$ = 0,142857142...,

$\frac{1}{8} = 0{,}125.$

Thuộc ba loại phân số thập phân khác nhau. Phân số thập phân biểu diễn số $\frac{1}{8}$ là hữu hạn; hai phân số còn lại là *vô hạn*. Thực vậy đó là các phân số thập phân truy hồi, lặp lại hay *tuần hoàn*. Theo kí hiệu tiêu chuẩn, chúng được viết là:

$\frac{1}{6} = 0{,}1\,(6),$

$\frac{1}{7} = 0,\,(142857).$

Phần lặp lại của phân số thập phân, tức dãy các chữ số được lặp lại theo cùng một trình tự một số vô hạn lần, hay *chu kì* của phân số, được viết trong ngoặc. Chu kì của phân số $\frac{1}{6}$ gồm một chữ số, còn chu kì của phân số $\frac{1}{7}$ gồm 6 chữ số. Một cách tổng quát, số chữ số trong chu kì gọi là *độ dài* của nó. Biểu diễn thập phân của số $\frac{1}{7}$ là *phân số tuần hoàn thuần tuý,* trong khi biểu diễn thập phân của số $\frac{1}{6}$ là *phân số tuần hoàn hỗn hợp.* Trong phân số thứ nhất trước chu kì không có số nào khác, trong phân số thứ hai trước chu kì còn có một dãy các chữ số nào đó, không có mặt trong chu kì. Đây là một ví dụ khác về ba loại phân số thập phân:

$\frac{39}{44} = 0{,}88(63),\ \frac{19}{27} = 0,(703),\ \frac{19}{20} = 0{,}95.$

Khi nghiên cứu ba loại phân số đó, hãy cố gắng tìm hiểu càng nhiều càng tốt về độ dài chu kì, về sự phân bố các chữ số trong chu kì và về tất cả những gì khác mà bạn thấy đáng chú ý. Hãy cố chứng minh hay bác bỏ những phỏng đoán có được từ những quan sát.

Hãy tự chọn các phân số bạn muốn lấy làm đối tượng quan sát, hay hãy xét các phân số thập phân biểu diễn các nhóm số từ 1 tới 7 dưới đây:

1) $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}, \frac{7}{7};$

2) $\frac{1}{7}, \frac{10}{7}, \frac{100}{7}, \ldots;$

3) Tất cả các phân số thực(*) tối giản với mẫu số nhỏ hơn 14;

(*) Phân số thực (hay thực sự) là phân số có tử số nhỏ hơn mẫu số.

4) Tất cả các phân số thực tối giản có mẫu số bằng 27;

5) $\frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \frac{1}{37}, \frac{1}{41}, \frac{1}{73}, \frac{1}{101}, \frac{1}{239}$;

6) $\frac{1}{9}, \frac{1}{99}, \frac{1}{999}, \frac{1}{9999}$;

7) $\frac{1}{11}, \frac{1}{101}, \frac{1}{1001}, \frac{1}{10001}$.

Chớ bỏ qua các hệ thức có ích sau đây:

7,00000…= 6, 9999…;

0, 50000…= 0, 49999…;

Hãy thử phân tích kĩ xem.

46. (Tiếp theo). Hãy chú ý là

$$\frac{1}{9} = 0{,}11111..., \quad \frac{1}{11} = 0{,}090909....,$$

$$\frac{1}{27} = 0{,}037037..., \quad \frac{1}{37} = 0{,}027027...,$$

$$\frac{1}{99} = 0{,}01010101..., \quad \frac{1}{101} = 0{,}00990099...,$$

$$\frac{1}{271} = 0{,}0036900369..., \quad \frac{1}{369} = 0{,}0027100271...,$$

và hãy giải thích tính quy luật được nhận xét.

47. (Tiếp theo). Xuất phát từ các phân số thập phân và chuyển từ cơ số 10 tới cơ số 2, có thể đi tới các phân số nhị phân. Đây là ví dụ:

$$\frac{1}{3} = 0{,}01010101...;$$

Đẳng thức này đúng nếu như xem vế phải là phân *số nhị phân tuần hoàn,* tức xem đẳng thức trên như:

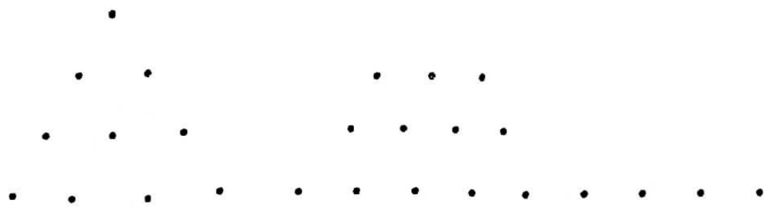
$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8} + ...,$$

Hãy nghiên cứu các phân số nhị phân giống như trong các bài tập 45 và 46 ta đã khảo sát các phân số thập phân.

48. (Tiếp theo). Hãy đánh giá ưu điểm và nhược điểm (theo quan điểm sư phạm) của chương trình nghiên cứu đề ra trong các bài tập 45, 46 và 47.

49. *Các số hình thang.* Hình 15.6a là số tam giác 1 + 2 + 3 + 4 = 10 (xem bài tập 39, chương 3 và hình 15...). Tương tự số 3 + 4 + 5 = 12 được biểu diễn trên hình 52b, có thể gọi số "hình thang".

Nếu như ta muốn gộp cả vào trong định nghĩa của ta những trường hợp giới hạn (đó thường là điều mong muốn) thì ta cần phải xem các số được biểu diễn trên hình 15.6a và 6c cũng là các số "hình thang".



a) b) c)

Hình 15.6. Các số tam giác và các số hình thang

Nhưng khi đó mọi số dương đều là "hình thang" (vì có thể biểu diễn nó dưới dạng một chuỗi điểm; xem hình *b*, *c*) và định nghĩa xem như không có nội dung. Tuy nhiên tình hình còn có thể cứu vãn được.

Gọi *(n)* là số các biểu diễn hình thang của số nguyên dương *n*, tức các số biểu diễn của số *n* dưới dạng tổng các số nguyên dương liên tiếp. Đây là một ví dụ:

6 = 1+ 2 + 3.

15 = 7 + 8 = 4 +5 + 6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5.

Nếu n = 1, 2, 3, 6, 15, 81, 105.

Thì $t(n)$ = 1, 1, 2, 2, 4, 5, 8.

Hãy tìm từ những quan sát đó "biểu thức đơn giản" cho $t(n)$ và tiếp theo là chứng minh các biểu diễn đó.

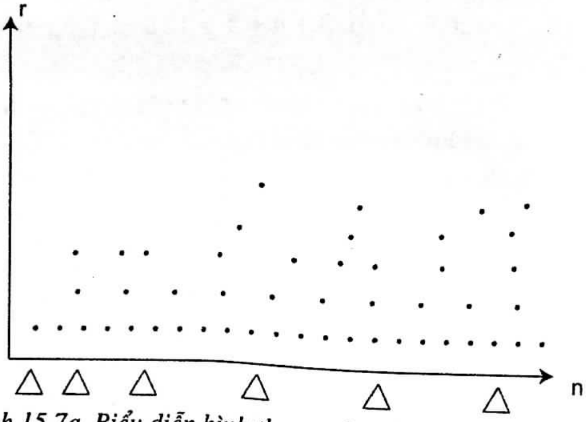
50. (Tiếp theo). Các hình 15.7a và 15.7b là minh hoạ bổ sung cho phép nhìn bao quát các kết quả những quan sát của ta. Ta gọi biểu diễn n dưới dạng.

$n = a + (a + 1) + (a + 2) + \dots + (a + r - 1).$

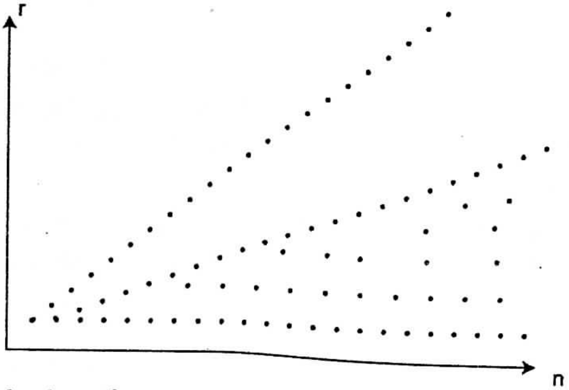
(tổng của r số hạng) là biểu diễn hình thang thứ r của số n. Trong (và chỉ trong) trường hợp số n có biểu diễn thứ r, ta sẽ đánh dấu trên hình 15.7a điểm có hoành độ n và tung độ r, bằng một chấm tròn đen.

Nếu $t(n)$ = 1 thì biểu diễn hình thang duy nhất của số n là biểu diễn tầm thường của nó (với nó r = 1). Hãy chỉ ra trên hình 15.7a các số n với $t(n)$ = 1.

Hỏi $t(p)$ bằng bao nhiêu nếu p là số nguyên tố ?



Hình 15.7a. Biểu diễn hình thang của số n nhờ vào r số



Hình 15.7b. Dành cho độc giả có suy nghĩ chín chắn (hình vẽ của Laibơnit): r là ước của n

51. (Tiếp theo). Gọi $s(n)$ là số các biểu diễn của số nguyên dương n dưới dạng tổng của các số dương lẻ. Hãy tìm biểu thức cho $s(n)$.

Ví dụ:

$15 = 3 + 5 + 7$,

$45 = 13 + 15 + 17 = 5 + 7 + 9 + 11 + 13$,

$48 = 23 + 25 = 9 + 11 + 13 + 15 = 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13$,

Nếu $n = 2, 3, 4, 15, 45, 48, 105$ thì $s(n) = 0, 1, 1, 2, 3, 3, 4$.

52. Đánh giá chương trình nghiên cứu, được đề ra trong các bài tập 49 và 50.

53. Hãy xét ba hình phẳng:

1) Hình vuông với đường chéo thẳng đứng;

2) Hình tròn (bán kính r) ngoại tiếp hình vuông trên;

3) Hình vuông với cạnh thẳng đứng, ngoại tiếp hình tròn đó.

Đường chéo thẳng đứng của hình 1) chia mỗi một trong ba hình trên thành hai nửa đối xứng. Khi quay những hình phẳng đó quanh các trục đối xứng thẳng đứng, chúng sẽ vạch ra ba cố thể:

1) Lưỡng nón (tương tự như lưỡng chóp xem bài tập 27, chương 14);

2) Hình cầu;

3) Hình trụ.

Hãy tính đối với cả ba vật thể đó:

- Thể tích V.

- Diện tích mặt ngoài S.

Diện tích A của hình phẳng mà khi quay sinh ra cố thể đang xét.

Chu vi P của hình phẳng đó.

Khoảng cách X_A từ trọng tâm của nửa hình phẳng tới trục quay.

Khoảng cách X_P từ trọng tâm của nửa chu vi hình phẳng tới trục quay.

Hãy sắp xếp 18 đại lượng tìm được dưới dạng một bảng 3 x 6. Hãy quan sát và thử giải thích những kết quả quan sát được.

54. Thêm một bài toán có tính chất nghiên cứu, ở trình độ phổ thông. Nên xem là một phần việc cùng làm với thầy giáo.

Điểm (x, y, z) của không gian ba chiều thường được đặc trưng bởi ba toạ độ (vuông) x, y, z. Xét bốn tập hợp điểm K, O, P, Q trong đó mỗi tập được đặc trưng bởi một hệ bất đẳng thức (hệ có thể chỉ gồm một bất đẳng thức). Mỗi tập hợp như vậy chỉ chứa các điểm có toạ độ thoả mãn đồng thời tất cả các bất đẳng thức của hệ tương ứng.

Đây là bốn hệ bất đẳng thức.

$|x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1,$ (K)

$|x| + |y| + |z| \leq 2,$ (O)

tất cả các bất đẳng thức (K) và (O) đặc trưng tập hợp các điểm chung của hai tập (K) và (O); đó là tập (P)

$|y| + |z| \leq 2, |z| + |x| \leq 2,$

$|x| + |y| \leq 2.$ (Q)

Hãy mô tả chi tiết bản chất hình học của bốn tập hợp đó và chỉ ra tất cả những đặc trưng của chúng (chớ có quên tính đối xứng!). Hãy sắp xếp những đặc điểm đó cho dễ thấy vào các bảng thích hợp.

Cũng mô tả xem các cố thể tìm được có mối quan hệ qua lại với nhau như thế nào.

Hãy tìm thể tích V và diện tích mặt ngoài S của mỗi vật thể đó.

Bài toán này có thể được mở rộng như thế nào? (Ở đây dùng những mô hình bằng bìa cứng cũng có ích. Xem các bài tập 55 chương 2 và "Giải một bài toán như thế nào?" bài tập 8, chương 9).

55. Hãy chú ý là

$\sqrt{2}-1=\sqrt{2}-\sqrt{1},$

$(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}=\sqrt{9}-\sqrt{8},$

$(\sqrt{2}-1)^3=5\sqrt{2}-7=\sqrt{50}-\sqrt{49},$

$(\sqrt{2}-1)^4=17+12\sqrt{2}=\sqrt{289}-\sqrt{288};$

Hãy thử khái quát kết quả quan sát được và sau đó chứng minh điều phỏng đoán của bạn.

56. Cũng chú ý là

$2-\sqrt{3}=\sqrt{4}-\sqrt{3},$

$(2-\sqrt{3})^2=\sqrt{49}-\sqrt{48},$

$(2-\sqrt{3})^3=\sqrt{676}-\sqrt{675},$

$(2-\sqrt{3})^4=\sqrt{9409}-\sqrt{9408}.$

Hãy khái quát những quan sát và chứng minh điều phỏng đoán.

57. Thường xảy ra là điều phỏng đoán bản thân nó không thật quan trọng lắm, nhưng điều bao giờ cũng rất quan trọng là bạn kiểm tra điều phỏng đoán đó như thế nào.

58. *Giả thiết và sự kiện.* Trong lịch sử mà tôi sắp kể đây và tôi không chịu trách nhiệm về tính chính xác của nó, có nói về tôn ông Giôn và người gác cổng. Có thể giả thiết là tôn ông Giôn, người của Hoàng Gia, biết phân biệt giả thiết với sự kiện được thiết lập chặt chẽ. Tuy nhiên, trong trường hợp sắp được kể ra ở đây, người hiểu được sự khác biệt đó không phải là tôn ông Giôn mà là người gác cổng.

Một lần tôn ông Giôn đi dự họp ở Hoàng Gia hơi muộn, nên mất bình tĩnh và rất vội vàng. Ông cần gửi mũ ở phòng gửi mũ áo và lấy số. Người gác cửa, thường trực hôm đó ở phòng gửi mũ áo niềm nở nói: "Tôn ông có thể đi ngay không cần lấy số và khi tôi trả mũ cũng vậy". Tôn ông Giôn đã vào phòng họp mà không lấy số. Tuy là ông đã cảm ơn người gác cổng nhưng ông vẫn hơi lo cho số phận chiếc mũ của ông. Nhưng khi họp xong, trở lại phòng gửi mũ áo thì người gác cổng đã trao lại cho ông ngay chiếc mũ của chính ông. Tôn ông Giôn rõ ràng là hài lòng. Do đó, tôi không hiểu cái gì đã thúc đẩy ông hỏi người gác cổng câu này: "Nhưng tại sao ông biết đây là chiếc mũ của tôi?" Tôi không thể khẳng định là người gác cổng đã không bằng lòng về câu hỏi đó, có thể giọng nói của tôn ông Giôn đối với người gác cổng là quá kể cả. Dù sao đi nữa, người gác cổng đã trả lời một cách gay gắt: "Thưa tôn ông, tôi không có vinh dự được biết đó là mũ của ngài, nhưng đó chính là chiếc mũ mà ngài đã gửi lại tôi".

LỜI GIẢI CÁC BÀI TẬP

CHƯƠNG 1

1. Đường tròn bán kính đã cho có tâm tại điểm cho trước.

2. Hai đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.

3. Đường thẳng vuông góc với đoạn thẳng nối hai điểm cho trước tại điểm giữa của đoạn thẳng đó.

4. Đường thẳng song song với hai đường thẳng cho trước, nằm ở giữa hai đường thẳng đó và cách đều chúng.

5. Hai đường thẳng vuông góc với nhau là các đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng cho trước.

6. Hai cung tròn đi qua hai điểm *A* và *B* và đối xứng với nhau đối với đường thẳng *AB*.

7. Phương pháp hai quỹ tích; xem bài tập 1.

9. Phương pháp hai quỹ tích; xem bài tập 1 và 2.

10. Phương pháp hai quỹ tích; xem bài tập 2 và 6.

11. Phương pháp hai quỹ tích; xem bài tập 1 và 6.

12. Phương pháp hai quỹ tích; xem bài tập 5.

13. Phương pháp hai quỹ tích; xem bài tập 2.

14. Phương pháp hai quỹ tích; xem bài tập 1 và 2.

15. Phương pháp hai quỹ tích; xem bài tập 6.

16. Do đối xứng dẫn đến bài toán ở m.2 §3 hay đến bài tập 12.

17. Phương pháp hai quỹ tích; xem bài tập 6.

18. a) Nếu *X* chuyển dời sao cho các ΔXCA và ΔXCB vẫn tương đương thì quỹ tích của điểm *X* là trung tuyến đi qua *C* (hãy chứng minh điều đó); điểm phải tìm sẽ là giao điểm của các trung tuyến.

b) Nếu *X* di chuyển sao cho diện tích ΔABX vẫn bằng một phần ba diện tích ΔABC thì quỹ tích của điểm *X* là đường thẳng song song với *AB* và cách *AB* một khoảng bằng một phần ba đường cao hạ từ *C* xuống (xem bài tập 2); điểm phải tìm sẽ là giao của hai đường thẳng đó. (Trong cả hai cách giải đã vận dụng "phương pháp hai quỹ tích").

19. Hãy nối tâm đường tròn nội tiếp với hai đầu mút của cạnh có độ dài *a*, trong tam giác có được bằng cách đo góc có đỉnh ở tâm đường tròn nội tiếp bằng

$180^0 - (\beta + \gamma)/2 = 90^0 + \alpha/2$.

Phương pháp hai quỹ tích, xem bài tập 2 và 6.

20. Hãy nối tâm O đường tròn ngoại tiếp với một đầu mút của cạnh a và từ O hãy hạ đường vuông góc xuống cạnh đó, bạn sẽ được một tam giác vuông có cạnh huyền R, góc a và cạnh góc vuông đối diện với nó $\frac{a}{2}$. Bởi vì R và α cho trước, nên bạn có thể dựng được a. Hãy dựng tam giác phải tìm theo cạnh a (đã tìm được) và các đại lượng α và r; xem bài tập 19.

21. Hãy chia tam giác phải tìm thành ba tam giác nhỏ bằng cách nối tâm của đường tròn nội tiếp với ba đỉnh của tam giác đó. Nếu so sánh hai biểu thức diện tích của tam giác thì ta được $\frac{1}{2}r(a+b+c)=\frac{1}{2}ah_a$. Vì vậy bạn có thể dựng đoạn có độ dài $a + b + c$ theo các đại lượng cho trước a, h_a và r và như thế, đưa bài toán về bài tập 22.

22. Hãy nối tâm O đường tròn nội tiếp với đỉnh A và từ O hạ đường vuông góc xuống cạnh b (hay c). Bạn sẽ được một tam giác vuông, trong đó một góc nhọn và cạnh góc vuông đối diện với góc nhọn đó bằng $\frac{\alpha}{2}$ và r. Giả sử x là cạnh góc vuông thứ hai; khi đó $a + b + c - 2a = 2x$. Bởi vậy bạn có thể dựng được x theo các đại lượng cho trước $a + b + c$ và a, rồi sau đó dựng a theo x và r. Sử dụng bài tập 19 bạn sẽ dựng tam giác phải tìm theo góc α (đã tìm được) và a, r (đã cho).

23. Hình phụ là một tam giác vuông có đáy a và cạnh góc vuông h_b.

24. Hình phụ, xem bài tập 23.

25. Các hình phụ, xem bài tập 23.

26. Hình phụ là một tam giác vuông có cạnh góc vuông h_a và góc đối diện với nó β.

27. Các hình phụ, xem bài tập 26. Cách giải khác; xem bài tập 37.

28. Hình phụ là một tam giác vuông cạnh huyền b_α và cạnh vóc vuông h_a.

29. Hình phụ là một tam giác có ba cạnh đã biết.

30. Giả sử $a > c$. Hình phụ là tam giác có các cạnh $a - c$, b và d (xem Giải một bài toán như thế nào?- Biến đổi bài toán).

31. Khái quát hoá bài tập 30 tương ứng với trường hợp $\varepsilon = 0$. Hình phụ là một tam giác có các cạnh a, c và góc ε.

32. Hình phụ là một tam giác trong đó đã biết a, $b + c$ (các cạnh) và $\alpha/2$ (góc).

33. Hình phụ là một tam giác trong đó đã biết a, b + c, $90^0 + (\beta - \gamma)/2$.

34. Hình phụ là một tam giác trong đó đã biết $a + b + c$ (cạnh), h_a (đường cao) và $\alpha/2 + 90^0$(góc).

35. Biến đổi một cách thích hợp phương pháp đã áp dụng ở m.1 §6 bằng cách giả thiết rằng một trong các bán kính giảm đi một lượng nào đó, có bán kính kia lại tăng lên một lượng bằng chừng đó. Hình phụ là một đường tròn có hai tiếp tuyến kẻ từ một điểm đến đường tròn đó và hai hình chữ nhật (giai đoạn chót của phép dựng).

36. So sánh với m.1 §6. Hình phụ là một đường tròn ngoại tiếp tam giác có các đỉnh tại tâm của ba đường tròn cho trước.

37. Tam giác đồng dạng với bất kì tam giác khác có các góc *a* và *b*; kích thước của tam giác phải tìm được xác định bởi đại lượng b_γ (phương pháp đó cũng thích hợp đối với bài tập 27).

38. Phương pháp đồng dạng; tâm đồng dạng tại đỉnh góc vuông của tam giác cho trước. Giao điểm giữa đường phân giác của các góc đó với cạnh huyền là một đỉnh của một hình vuông phải tìm.

39. Khái quát hoá bài tập 38. Tâm đồng dạng tại *A* (*B* hay *C*), (xem Giải một bài toán như thế nào? – Khái quát).

40. Phương pháp đồng dạng; tâm đồng dạng tại tâm hình tròn. Hình vuông phải tìm có cùng trục đối xứng với hình quạt cho trước.

41. Phương pháp đồng dạng; các hình đồng dạng là các đường tròn tiếp xúc với đường thẳng cho trước, tâm của đường tròn đó nằm trên đường vuông góc với đoạn thẳng nối hai điểm cho trước tại điểm giữa của đoạn thẳng đó; tâm đồng dạng là giao điểm của đường vuông góc đó với đường thẳng cho trước. Bài toán có hai lời giải.

42. Dùng phép đối xứng đối với các phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến cho trước, ta còn được một điểm mà đường tròn phải đi qua; tiếp theo, xem bài tập 41.

43. Các góc tạo bởi bán kính đường tròn nội tiếp kẻ đến các tiếp điểm thì bằng $180^0 - \alpha$, $180^0 - \beta, \ldots$; tiếp đến là phương pháp đồng dạng (điều vừa nói là đối với các đa giác ngoại tiếp có số cạnh bất kì).

44. Giả sử S là diện tích của tam giác phải tìm, còn *a*, *b* và *c* là các cạnh của nó (xem nhận xét bổ sung 7); khi đó

$2S - ah_a - bh_b = ch_c$.

Hãy dựng tam giác có cạnh h_a, h_b, h_c giả sử *S*' là diện tích của nó, còn *a*', *b*', *c*' là đường cao tương ứng; khi đó $2S' = h_a a' = h_b b' = h_c c'$ và vì vậy $a{:}a' = b{:}b' = c{:}c'$, do đó, tam giác có các cạnh *a*', *b*', *c*' (có thể dựng được) *đồng dạng* với tam giác phải tìm.

45. Nếu $h_a = 156$, $h_b = 65$, $h_c = 60$ thì cách giải đã nói ở bài tập trên không dùng được, bởi vì tam giác phụ có cạnh 156, 65 và 60 không thể dựng được, trong khi đó tam giác phải tìm vẫn tồn tại.

Lối thoát duy nhất ra khỏi mâu thuẫn đó là *sự khái quát hoá*. Giả sử *k*, *l*, *m* là ba số dương tùy ý, còn (sau này ta dùng những kí hiệu *khác với* những kí hiệu đã dùng trong bài tập 44) *a*', *b*', *c*' là các đường cao của tam giác, có các cạnh kh_a, lh_b, mh_c; khi đó $a: ka' = b;$ $1b' = c: mc'$. Chẳng hạn tam giác có cạnh 156, 65 và 120 = 2.60 tồn tại.

46. Giả thiết rằng bài toán đã giải xong, hãy nối tâm đường tròn ngoại tiếp với một đầu mút của cạnh *a* và hạ từ tâm đó một đường thẳng vuông góc xuống cạnh đó. Từ sự tồn tại của tam giác vuông (có được) có cạnh huyền *R*, góc α và các cạnh góc vuông đối diện với nó *a*/2 rút ra một hệ thức xác định giữa các đại lượng *a*, α và *R*, vì có thể dựng được bất kì đại lượng nào trong ba đại lượng đó nếu biết hai đại lượng kia (hệ thức đó có thể

biểu diễn được nhờ lượng giác: $a = 2R\sin\alpha$). Nếu các dữ kiện của bài toán không thoả mãn hệ thức đó, thì bài toán không thể giải được; còn nếu chúng thoả mãn hệ thức đó thì bài toán không xác định (có vô số nghiệm).

47. a) Ví dụ, dựng một tam giác biết ba góc α, β, γ là bài toán không hoặc không thể giải được hoặc không xác định.

b) Các bài toán loại đó tương tự các bài tập 46: sự tồn tại của nghiệm có nghĩa là tồn tại một hệ thức xác định giữa các dữ kiện; bởi vậy nếu các dữ kiện thoả mãn hệ thức đó thì vô số nghiệm, còn nếu chúng không thoả mãn thì nghiệm không tồn tại.

c) Dùng cách giải bài tập 46 hãy đưa bài toán về bài tập 19.

48. Ta hãy bỏ qua những nguyên nhân ảnh hưởng đến tốc độ âm thanh (như gió, thay đổi nhiệt độ...). Sau khi tính sự khai thác về thời gian ghi nhận tại các đài quan sát A và B, ta dựa vào đó để tìm hiệu các khoảng cách $AX - BX$; quỹ tích tương ứng của các điểm X là *Hypebol*. Ta được Hypebol thứ hai do việc so sánh các dữ kiện có được tại các đài C và A (hay C và B). Giao của Hypebol xác định vị trí của X. Tương tự như bài tập 15: trong cả hai trường hợp các số liệu quan trắc đều dẫn đến hai quỹ tích của điểm phải tìm X. Cái khác căn bản là trong bài tập 15 quỹ tích là các đường tròn, còn ở đây là các Hypebol. Không thể dựng Hypebol bằng thước và compa; tuy nhiên ở đây có thể sử dụng các dụng cụ khác; cũng có thể chế tạo một dụng cụ đặc biệt cho phép tìm điểm X theo ba điểm A, B, C nhờ các dữ kiện của ta.

49. Nếu hiểu đúng nguyên văn phương pháp quỹ tích mô tả ở m.2 §1 thì các quỹ tích đó không thể sử dụng được. Thật ra, như ta đã biết, các quỹ tích đó rất bổ ích và ta đã nhiều lần sử dụng chúng trong các ví dụ trước. Do đó có thể rút ra kết luận là; cách phát biểu phương pháp trình bày ở m.2 §1 cần phải được mở rộng: các quỹ tích không những có thể là một đường thẳng hay một đường tròn riêng biệt mà còn có thể là tập hợp hữu hạn của đường thẳng, các đường tròn, các đoạn thẳng và cung tròn.

50. Nếu tất cả các phần của điều kiện tương đương với toàn bộ điều kiện thì các phương pháp phân chia khác nhau phải tương đương. Chính điều đó cho phép khẳng định, chẳng hạn, rằng ba đường trung trực của một tam giác thì giao nhau tại một điểm hay sáu mặt phẳng vuông góc với các cạnh của một tứ diện tại trung điểm của các cạnh ấy thì cắt nhau tại một điểm.

51. 1) Hãy lấy làm dữ kiện ba yếu tố bất kì của tam giác rút ra từ danh sách nêu trong nhận xét bổ sung 7 (cố làm sao để không rơi vào các trường hợp như đã nói đến ở bài tập 46 và 47) và hãy thử dựng tam giác theo các dữ kiện đó. Đây là một vài tổng hợp mà theo đó có thể dễ dàng thực hiện phép dựng tương ứng.

a, h_b, R;

a, h_b, m_b;

a, h_b, m_a;

h_a, h_a. b;

h_a, m_a, m_b;

$h_a, m_b, \quad m_c;$

$h_a, h_b, \quad m_a;$

$a, b, \quad R.$

Còn có thể lấy các góc α, β và đoạn thẳng bất kì không có ở các bài tập 27 và 37. Hơi khó hơn là trường hợp α, r, R.

2) Có một loạt bài toán quan trọng về các góc tam diện tương tự như các bài toán đã xét ở m.3 §6 mà ta có thể giải được như vậy: "Trong một góc tam diện cho biết góc phẳng A và hai góc nhị diện β và γ thuộc góc phẳng đó; hãy dựng góc phẳng kia B và C". Giải bài toán này không khó, vì vậy tôi không muốn dừng lại ở đây để giải thích cách giải nó.

3) Về cái tương tự của ví dụ ở m.1 §3 hãy xem nhận xét bổ xung 50. Hãy nghiên cứu các tương tự không gian của các ví dụ ở m.2 §3 và ở bài tập 14 và 18.

Không đòi hỏi các trả lời và chỉ dẫn cho các nhận xét bổ sung 7, 50, 52, 54.

CHƯƠNG 2

1. Nếu Bốp có x "niken" và y "đai" thì điều kiện bài toán có thể biểu thị như sau:

$5x + 10y = 350,$

$x + y = 50;$

sau khi biến đổi, hệ thống phương trình này sẽ được dẫn đến hệ thống ở m.3 §2.

2. Giả sử có m vòi chảy vào bể và n vòi tháo nước ra; vòi thứ nhất chảy vào đầy bể trong a_1 phút, vòi thứ hai trong a_2 phút,..., vòi thứ m trong a_m phút; vòi tháo thứ nhất làm cạn bể trong b_1 phút, vòi thứ hai trong b_2 phút,...., vòi thứ n trong b_n phút. Cần bao nhiêu thời gian để các bể (rỗng) được đầy nước nếu tất cả các vòi đều mở.

Thời gian phải tìm rút ra từ phương trình

$$\frac{t}{a_1} + \frac{t}{a_2} + \ldots \frac{t}{a_m} - \frac{t}{b_1} - \frac{t}{b_2} - \ldots \frac{t}{b_n} = 1.$$

(Bạn sẽ giải thích đáp số t như thế nào, nếu nó là âm? Có thể là không có lời giải, cần phải giải thích trường hợp đó như thế nào?).

4. a) Nếu thay W bằng - W thì x không thay đổi, điều đó có nghĩa rằng lúc đầu máy bay bay theo chiều gió và khi bay trở lại ngược gió, nó phải quay lại cũng tại điểm như trước (với điều kiện thời gian bay cũng như trước).

b) Kiểm tra bằng cách dùng thứ nguyên, (xem Giải một bài toán như thế nào?).

5. Hệ thống

$x + y = v,$

$ax + by = cv,$

hoàn toàn trùng với hệ thống ở m.2 §6.

6. Ta đặt các trục toạ độ với đoạn AB như đã làm ở m.1 §5 và đặt $AB = a$. Các toạ độ (x, y) của tâm phải tìm của đường tròn tiếp xúc với bốn cung cho trước thoả mãn các phương trình $a-\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(x-\frac{a}{4}\right)^2-\frac{a}{4}}$, với $x=\frac{a}{2}$, ta suy ra $y=\frac{a\sqrt{6}}{5}$.

7. Công thức Hê-rôn, mặc dù nhìn khá cồng kềnh, thực ra không phải là không thuận tiện, bởi vì việc ghi nhớ các dấu cộng, trừ thay đổi trong mỗi thừa số như thế nào khá là đơn giản.

$$16S^2 = (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) = [(b+c)^2 - a^2][a^2-(b-c)^2]$$
$$= (2bc - a^2 + b^2 + c^2)(2bc + a^2 - b^2 - c^2) = 4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2 = 4(1^2+n^2)(1^2+m^2) - (21^2)^2.$$

8. *a) Những kiến thức bổ sung cần thiết.* Phương pháp giải bài toán ở m.3 §5 đòi hỏi phải hiểu biết rộng về hình học phẳng (công thức Hê-rôn ít được biết hơn biểu thức diện tích của tam giác qua đáy và đường cao của nó), trong khi đó phương pháp giải cũng bài toán đó ở m.4 đòi hỏi nhiều kiến thức của hình học không gian (lúc đầu cần phỏng đoán, sau đó phải chứng minh rằng k vuông góc với a).

b) Sự đối xứng. Ba đại lượng cho trước A, B và C đóng vai trò như sau; nói cách khác, bài toán đối xứng với A, B và C. Trong phương pháp đã dùng ở m.3 sự đối xứng đó đã được chú ý tới, trong lúc đó ở m.4 người ta đã bỏ qua nó mà lại ưa thích đại lượng A hơn so với B và C.

c) Đặt kế hoạch. Cách giải ở m.3 trông có vẻ "có phương pháp" hơn gây được một niềm tin tưởng nhất định ngay từ đầu. Và thật vậy, cách giải đó khá là rõ ràng và dẫn đến một hệ thống bảy phương trình mà thoạt nhìn thì cho là quá cồng kềnh (không nên coi điều đó là thiếu sót của phương pháp, vì phương pháp này không những cho ta khả năng viết ra các phương trình, mà thực sự còn gợi ra phương pháp giải hệ thống nhận được nữa; xem m.2 §4 chương 6). Tính chất hợp lí của phương pháp được chỉ ra ở m.4 thì không hiển nhiên như vậy, nhưng nó cũng "thành đạt" (nhờ một nhận xét tốt), dẫn đến kết quả tốt và nhanh hơn nhiều.

9. $V^2 = \frac{1^2m^2n^2}{36} = \frac{2ABC}{9}$.

10. Từ ba đẳng thức biểu thị a^2, b^2 và c^2 theo l, m và n ở m.3 §5 thì ta tìm được:

$l^2+m^2+n^2=p^2$, $l^2=p^2-a^2$, $m^2=p^2-b^2$, $n^2=p^2-c^2$, điều đó cho phép viết lại kết quả của bài tập 9 như sau: $V=\frac{(p^2-a^2)(p^2-b^2)(p^2-c^2)}{36}$.

11. $d^2 = l^2+m^2+n^2$. Bài toán này được xét tỉ mỉ ở Giải một bài toán như thế nào?.

12. Các kí hiệu được sử dụng phù hợp với tất cả bài tập 11 lần ở m.3 §5; hãy chý ý đến hai đường chéo thuộc cùng một mặt phẳng. Lặp lại phép tính đã làm ở bài tập 10, ta tìm thấy: $d^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$.

13. Tứ diện được xác định bằng các độ dài sáu cạnh của nó, kết quả đó là cái tương tự không gian của bài toán đầu tiên chúng ta đã phân tích ở §1 chương 1. Mặt khác, hình học gồm 6 cạnh mà ta phải tìm (tức là tứ diện) có thể có được bằng cách lấy đường chéo tương ứng của từng mặt hình hộp đã xét ở bài tập 11 và 12. Thể tích của hình hộp đó bằng lmn. Hãy cắt ra khỏi hình hộp bốn tứ diện "vuông" (tức là góc có tam diện vuông ở một trong các đỉnh) bằng nhau: thể tích của mỗi tam diện đó tính riêng thì bằng $\frac{lmn}{3}$ (xem bài tập 9); lúc đó bạn sẽ được một tứ diện có thể tích:

$$V = lmn - \frac{4lmn}{6} = \frac{lmn}{3}.$$

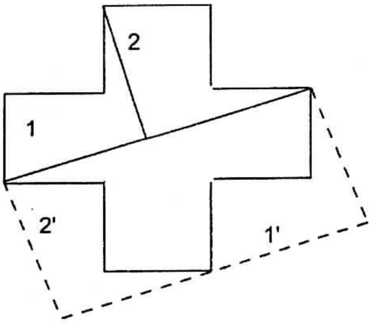
Rồi sau đó sử dụng các biểu thức tìm trong bài tập 10: $l^2 = p^2 - a^2,\ldots$ ta sẽ tìm thấy

$$V^2 = \frac{(p^2 - a^2)(p^2 - b^2)(b^2 - c^2)}{9}.$$

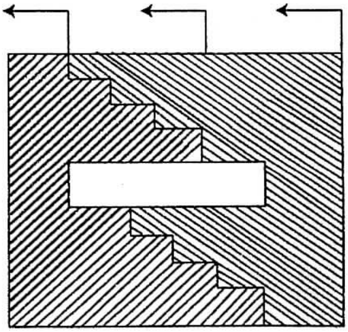
14. Xem bài tập 10; nếu $V = 0$, thì một trong các thừa số, chẳng hạn $p^2 - a^2 = l^2$, bằng không và hai mặt suy biến thành hai đoạn thẳng; hai mặt kia biến thành các tam giác vuông trùng nhau.

Xem bài tập 13; nếu $V = 0$, thì tứ diện suy biến thành hình chữ nhật (kép) (cả bốn mặt của nó đều biến thành các tam giác vuông bằng nhau); thậy vậy, nếu $p^2 - a^2 = 0$ thì $a^2 = b^2 = c^2$.

15. Từ đẳng thức sau cùng ở §7 ta thấy rõ ràng, một trong các cạnh x của hình chữ nhật phải tìm là cạnh huyền của tam giác vuông có các cạnh góc vuông $3a$ và a. Có thể đặt đoạn cắt ở bên trong hình chữ thập bằng bốn cách khác nhau (dù là không căn bản khác nhau); tâm của đoạn cắt phải trùng với tâm của hình chữ thập và chia đoạn đó thành hai phần bằng nhau; độ dài $\frac{x}{2}$ của mỗi phần đó bằng cạnh kia của hình chữ nhật. Như vậy là lời giải đã được trình bày khá trọn vẹn (xem hình vẽ 2.12).



Hình 2.12



Hình 2.13

16. 1) $x^2 = 12.9 - 8.1$, $x = 10$.

2) Dời phần bên phải lên phía trên một đơn vị dài, rồi sang trái hai đơn vị dài; hình có được sẽ là hình vuông bởi vì: $10 = 9 + 1 = 12 - 2$.

3) Phép đối xứng tâm được bảo toàn. Tất cả các điều đó được minh hoạ trên hình vẽ 2.13.

17. Giả sử x là gánh nặng của La, còn y là gánh nặng của Lừa. Khi đó:

$y + 1 = 2(x - 1), x + 1 = 3(y - 1)$.

$$x = \frac{13}{5}(= 260kg), \; y = \frac{11}{5}(= 220kg).$$

18. Giả thiết rằng ông X-mít mang $h$kg hành lí, bà X-mít mang $w$kg và x là số kilôgam hành lí được phép mang theo không phải trả tiền cước phí. Khi đó:

$$h + \omega = 94, \; \frac{h - x}{1{,}5} = \frac{\omega - x}{2} = \frac{94 - x}{13{,}5}; \; x = 40.$$

19. Cách phần đó bằng 700, 500 và $x = 400$, ở đây x được xác định từ phương trình

$x + (x + 100) + (x + 300) = 1600$.

20. Mỗi người phải được 3000 li-vơ-rơ.

21. Nếu kí hiệu phần của mỗi người con là x và toàn bộ gia tài là y, thì phần của mỗi người con có thể viết như sau:

con cả $\quad x = 100 + \dfrac{y - 100}{10}$,

con thứ $\quad x = 200 + \dfrac{y - 200 - x}{10}$,

con thứ ba $\quad x = 300 + \dfrac{y - 2x - 300}{10}$,

và… hiệu các vế phải của bất kì hai đẳng thức ở trên đều bằng $100 - \dfrac{x + 100}{10}$.

Vì hiệu đó phải bằng không, nên $x = 900$ và do đó (từ phương trình đầu tiên) ta có $y = 8100$; có tất cả 9 người con.

22. Giả thiết trước lúc chơi ba người đã có số tiền tương ứng là x, y và z lu-i; rất bổ ích nếu đưa vào xét tổng sau đây: $x + y + z = S$ ($S = 72$). Ta hãy lập bảng phân chia tiền giữa ba người trong những thời điểm trước và sau mỗi ván (số tiền của cả ba người luôn bằng S).

Người thứ nhất	*Người thứ hai*	*Người thứ ba*
x	y	z
$2x - S$	$2y$	$2z$
$6x - 3S$	$6y - 2S$	$6x$
$12x - 0S = 24$	$12y - 4S = 24$	$12z - S = 24$
Từ đó $x = 38$,	$y = 26$,	$z = 8$.

23. Bài toán này tương tự các bài toán đã xét trong các m.1 và m.2 §4 và là một trường hợp đặc biệt của bài tập 2, trong đó chỉ cần đặt $m = 3$, $n = 0$, $a_1 = 3$, $a_2 = \frac{8}{3}$, $a_3 = \frac{12}{5}$. Do đó $t = \frac{8}{9}$ tuần lễ.

24. Ở đây Niu-tơn muốn nói đến sự khái quát hoá theo tinh thần bài tập 2 nhưng không đi quá xa, vì ở đây không có "các vòi tháo ra", tức là không có các chữ b và $n = 0$.

25. Lúa mạch, đại mạch và kiều mạch giá tương ứng là 5, 3 và 2 si-linh một bu-sen. Xem bài tập 26.

26. Giả sử x, y, z là giá của ba loại hàng, còn p_γ là giá của mỗi hỗn hợp trong đó tương ứng có a_v, b_v, v_v là đơn vị trọng lượng của các loại hàng đó ($v = 1, 2, 3$). Ta có hệ thống ba phương trình $a_vx + b_vy + c_vz = p_v$. Ở đây $v = 1, 2, 3$. Sự khái quát đó có thể nhận được từ bài tập 25 nếu thay bảng số

40	24	20	312
26	30	50	320
24	120	100	680

bằng bảng chữ

a_1	b_1	c_1	p_1
a_2	b_2	c_2	p_2
a_3	b_3	c_3	p_3

Chuyển từ ba loại hàng sang n loại không phải là việc khó.

27. Giả sử

α là lượng cỏ trên một a-cơ-rơ đồng cỏ trước lúc thả bò,

β là lượng cỏ một con bò ăn trong một tuần lễ,

γ là lượng cỏ mọc lên trên mặt a-cơ-rơ trong một tuần lễ,

a_1, a_2, a là số bò,

m_1, m_2 m là số a-cơ-rơ,

t_1, t_2 t là số tuần lễ tương ứng với ba trường hợp đang xét.

Ở đây a, α, β và γ là các ẩn số, còn lại là tám đại lượng đã cho trước.

Các điều kiện của bài toán được diễn tả như sau:

$m_1(\alpha + t_1\gamma) = a_1t_1\beta$,

$m(\alpha + t_2\gamma) = a_2t_2\beta$,

$m(\alpha + t\gamma) = at\beta$;

hệ phương trình này gồm ba ẩn số $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\beta}$ và a sẽ dẫn đến biểu thức sau đây đối với a

$$a = \frac{m[m_1 a_2 t_2 (t - t_1) - m_2 a_1 t_1 (t - t_2)}{m_1 m_2 (t_2 - t_1)};$$

bằng số a thì $a = 36$.

28. Giả sử x là số năm mà Đi-ô-phăng đã sống. Từ phương trình

$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$, rút ra được $x = 84$.

29. Nếu trong cấp số cộng có năm số hạng liên tiếp a, $a + d, \ldots, a + 4d$, thì số hạng đầu tiên của nó là a và công sai của nó d, sẽ tìm được điều kiện bằng nhau của tổng các số hạng với số 100: $a\ (a + d) + \ldots + (a + 4d) = 100$ và sự bằng nhau của tổng ba số hạng cuối $(a + 2d) + (a + 3d) + (a + 4d)$ với bảy lần tổng của hai số hạng đầu tiên $7\ [a + (a + d)]$.

Từ các phương trình: $5a + 10d = 100$, $11a - 2d = 0$,

ta có $a = \frac{5}{3}$ và $d = \frac{55}{6}$, từ đó rút ra được dạng của cấp số phải tìm

$\frac{10}{6}, \frac{65}{6}, \frac{120}{6}, \frac{175}{6}, \frac{230}{6}$

30. $\frac{m}{q} + m + qm = 19$,

$\frac{m^2}{q^2} + m^2 + m^2 q^2 = 133$.

Giả sử $q + \frac{1}{q} = x$; khi đó hệ thống được viết lại như sau: $m(x + 1) = 19$, $m^2(x^2 - 1) - 133$.

Sau khi chia phương trình thứ hai cho phương trình thứ nhất ta được hai phương trình truyến tính đối với mx và m. Giải các phương trình đó, ta tìm được $m = 6$, $x = \frac{13}{6}$, $q = \frac{3}{2}$ hoặc $\frac{2}{3}$; kết quả là được hai cấp số (thực tế là như nhau) 4, 6, 9 và 9, 6, 4.

31. $a(q^3 + q^{-3}) = 13$,

$a(q + q^{-1}) = 4$.

Chia phương trình thứ nhất cho phương trình thứ hai, ta được phương trình trùng phương. Cấp số phải tìm có dạng $\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{16}{5}, \frac{64}{5}$ (hoặc là cũng cấp số đó nhưng viết theo trình tự ngược lại).

32. Giả sử x là số thương gia. Bạn hãy biểu thị tổng số lãi bằng hai cách (lúc đầu sử dụng điều kiện để thu lãi đó, sau đó dùng điều kiện chia lãi).

$$(8240 + 40x.x)\frac{x}{100} = 10x.x + 224.$$

Phương trình: $x^3 - 25x^2 + 206x - 560 = 0$

không có nghiệm âm (hãy thay $x = -p$). Nếu nó có nghiệm hữu tỉ, thì nghiệm đó phải là một số nguyên dương, ước số của số 560. Do đó x có thể nhận các giá trị trong các giá trị sau đây: $x = 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 14, 16, \ldots$ Thật vậy, nghiệm sẽ là 7, 8 và 10 (đương nhiên Ơ-le lúc đầu đã viết ra phương trình và chỉ sau đó mới nghĩ ra câu chuyện về thương gia - và bạn có thể thử bắt chước Ơ-le).

33. Các tâm của bốn đường tròn tiếp xúc với các cạnh của hình vuông nằm tại các đỉnh của một hình vuông ở trong; đường chéo của hình vuông sau này có thể biểu thị bằng hai cách $(4r)^2 = 2(a - 2r)^2$, như vậy $r = \frac{a\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}$.

34. Biểu thức đối với đường cao của tam giác cân hạ xuống đáy có thể viết dưới dạng $x + \frac{d}{2}$. Khi đó: $\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = a^2$, $x^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2$ và sau khi khử x, ta được:

$4a^4 - 4d^2a^2 + b^2d^2 = 0.$

35. a) Phương trình đó bậc nhất đối với d^2 cũng như đối với b^2, nhưng đối với a^2 nó sẽ là bình phương bậc hai. Vì vậy có cơ sở để cho rằng bài toán tìm a khó hơn hai bài toán kia.

b) d dương khi và chỉ khi $4a^2 > b^2$;

b dương khi và chỉ khi $d^2 > a^2$;

a nhận hai giá trị dương phân biệt khi và chỉ khi $d^2 > b^2$.

Bạn đọc có thể rút ra từ đây một số kết luận. Niu-tơn đã nhận xét cách giải bài tập 34 như sau: "Do đó rõ ràng tại sao các nhà phân tích học khuyên ta không nên phân biệt giữa các lượng cho trước và phải tìm. Bởi vì, do phép tính là như nhau đối với bất kì dạng nào của các lượng cho trước và phải tìm, cho nên thuận tiện hơn vẫn là hình dung và so sánh các lượng đó mà không cần phân biệt sự khác nhau giữa chúng... Có lẽ đối với bạn làm như sau thuận tiện hơn: hình dung rằng vấn đề có quan hệ bình đẳng đối với Data và Quaesita, các lượng cho trước và phải tìm, mà nhờ đó bạn có thể dễ dàng lập được phương trình của mình". Tiếp đó ông nói thêm: "Do đó, tôi nghĩ rằng, đương nhiên các nhà toán học phải hiểu rõ, khi họ bắt bạn phải tưởng tượng cái đang tìm là cái đã cho".

("giả sử rằng bài toán đã giải xong", xem §4 chương 1).

36. Khi lập các phương trình, ta tiến bước theo hướng ngược với hướng giải bài toán người đạc điền: thật vậy, ta coi x và $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ cho trước, còn có một là ẩn số. Từ tam giác UVG ta biểu thị (theo định lí về sin) GV theo x, $\alpha + \beta$ và γ. Từ tam giác VUH ta biểu thị

(theo định lí về côsin) l theo GV, HV và t, sau đó sử dụng các biểu thức của GV và HV ta được:

$$l^2 = x^2\left[\frac{\sin^2(\alpha+\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta+\gamma)} + \frac{\sin^2\beta}{\sin^2(\beta+\gamma+\delta)} - \frac{2\sin(\alpha+\beta)\sin\beta\cos\delta}{\sin(\alpha+\beta+\delta)\sin(\beta+\gamma+\delta)}\right].$$

Do đó x^2 có thể biểu thị qua l, α, β, γ và δ.

37. Giả sử β là góc lớn, còn γ là góc nhỏ trong hai góc còn lại. Nếu góc β nhọn, thì năm đoạn c, h_a, d_a, m_a, b xuất phát từ đỉnh A (theo các kí hiệu của bài tập 7 chương 1) được sắp đặt theo trình tự trên. Từ các tam giác vuông do tam giác có đường cao h_a chia ra, ta có $\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}$, $\gamma = \frac{\pi}{2} - \frac{3\alpha}{4}$.

Từ các tam giác do tam giác có trung tuyến m_a chia ra, ta được

$$\frac{\frac{a}{2}}{m_a} = \frac{\sin\frac{\alpha}{4}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{\sin\frac{3\alpha}{4}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

do đó $\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4} = \sin\frac{3\alpha}{4}\cos\frac{3\alpha}{4}$, $\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{3\alpha}{2}$, $\frac{\alpha}{2} = \pi - \frac{3\alpha}{2}$ và $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

38. Giả sử S, $2p$, c, a, b tương tự biểu thị diện tích, chu vi, cạnh huyền, các cạnh còn lại; S và p cho trước, a, b và c là các ẩn số. Để giải hệ thống

$a + b + c = 2p$,

$ab = 2S$,

$c^2 = a^2 + b^2$,

hãy biểu diễn $(a + b)^2$ bằng hai cách

$(2p - c)^2 = c^2 + 4S$,

$$c = p - \frac{S}{p}.$$

39. Ta hãy xét một tam giác có các cạnh $2a$, u, v trong đó $u + v = 2d$ và kí hiệu h là đường cao hạ xuống cạnh $2a$.

Cho trước a, h, d; hãy tìm u, v.

Hãy xét hình chiếu vuông góc x và y của các cạnh u và v trên cạnh $2a$ và hãy kí hiệu

$x - y = 2z$

khi đó $x + y = 2a$,

$u^2 = h^2 + x^2$, $v^2 = h^2 + y^2$.

Do đó $u^2 - v^2 = x^2 - y^2$

hay $2d(u - v) = 2a.2z$, $u = d + \frac{a}{d}z$, $v = d - \frac{a}{d}z$,

$x = a + z, y = a - z,$

$$\left(d + \frac{a}{x}\right)^2 = h^2 + (a + z)^2,$$

$$z^2 = d^2\left(1 - \frac{h^2}{d^2 - a^2}\right).$$

40. Giả sử a và b là hai cạnh kề của hình bình hành còn c và d là đường chéo của nó; khi đó $2(a^2 + b^2) = c^2 + d^2$.

(Các đường chéo của hình bình hành chia nó thành bốn tam giác; hãy áp dụng định lí về côsin đối với hai tam giác kề).

41. $(2b - a)x^2 + (4a^2 - b^2)(2x - a) = 0$.

Nếu $a = 10$, $b = 12$ thì $x = \frac{16\left(-8 + 3\sqrt{11}\right)}{7}$ xấp xỉ với $\frac{32}{7}$.

Hãy giải thích với trường hợp $a = 2b$.

42. $\frac{a^2\left(3 + \sqrt{3}\right)}{2}$.

43. Một lục giác gồm ba hình vuông và bốn hình tam giác; diện tích của mỗi hình tam giác đó cũng bằng đại lượng S. Vì vậy diện tích của lục giác bằng $2c^2 + 4S$.

44. Hãy chia tam giác vuông đã cho thành ba tam giác có đỉnh chung tại tâm của đường tròn nội tiếp trong tam giác đó. So sánh các diện tích ta có: $\frac{d}{2}.\frac{a+b+c}{2} = \frac{ab}{2}$,

$$d = \frac{2ab}{a+b+c} = \frac{2ab(a+b-c)}{(a+b)^2 - c^2} = a + b - c.$$

45. $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}$. Từ đó rút ra rằng các cạnh của tam giác lớn bị các đỉnh của tam giác nội tiếp chia theo tỉ số 2: 1.

46. Lúc đầu hãy xét trường hợp đơn giản nhất khi tam giác là đều. Sự đối xứng của nó khiến ta có thể nghĩ rằng, trong trường hợp đó bốn tam giác nhỏ cũng sẽ đều. Tuy nhiên, nếu như vậy thì các cạnh của tam giác nhỏ phải *song song* với các cạnh của tam giác đã cho, điều đó vạch ra nét đặc trưng của hình, cho phép giải bài toán không những chỉ trong trường hợp riêng đang xét mà còn cả trong trường hợp tổng quát nữa. (Có thể chuyển từ tam giác đều sang một tam giác bất kì dựa vào những hiểu biết về "Tính chất a-phin"). Kẻ các đường thẳng song song với một cạnh của tam giác đã cho sao cho chúng cắt hai cạnh của tam giác thành năm phần bằng nhau. Sau khi đã làm như vậy với mỗi cạnh của tam giác (tức là

ba lần tất cả), bạn sẽ chia tam giác thành 25 tam giác nhỏ bằng nhau và đồng dạng với tam giác cho trước. Từ 25 tam giác đó dễ chọn ra bốn tam giác nói trong bài toán; diện tích của mỗi tam giác đó bằng 1/25 diện tích của tam giác đã cho. (Đó là lời giải duy nhất; chúng tôi bỏ qua việc chứng minh điều này).

47. Ta hãy khái quát hoá bài toán; giả sử điểm P nằm ở trong hình chữ nhật; khoảng cách từ bốn đỉnh bằng a, b, c và d và tới bốn cạnh là x, y, x' và y' (các đỉnh và cạnh được kể theo tứ tự tuần hoàn - chẳng hạn theo thứ tự đi vòng quanh thuận chiều kim đồng hồ). Khi đó : $a^2 = y'^2 + x^2$, $b^2 = x^2 + y^2$, $c^2 = y^2 + x'^2$, $d^2 = x'^2 + y'^2$.

do đó $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 0$.

Trong trường hợp của ta $a = 5$, $b = 10$, $c = 14$; do đó:

$d^2 = 25 - 100 + 196 = 121$, $d = 11$.

(Bạn hãy nhận xét rằng a, b và c xác định d, nhưng không đủ để xác định $x + x'$ và $y + y'$ của hình chữ nhật!)

48. Giả sử u là cạnh của hình vuông. Khi đó, theo các kí hiệu của bài tập 47 $x + x'$ và $y + y' = u$ và ta cũng có ba phương trình với ba ẩn số x, y và u.

$x^2 + (u - y)^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = b^2$, $y^2 + (u - x)^2 = c^2$

Do đó $2uy = u^2 + b^2 - a^2$, $2ux = u^2 + b^2 - c^2$;

bình phương rồi cộng với đẳng thức đó, ta được phương trình trùng phương đối với u:

$$u^2 - (a^2 + c^2)u^2 + \frac{(b^2 - a^2)^2 + (b^2 - c^2)^2}{2} = 0$$

Hãy nghiên cứu ý nghĩa hình học của các trường hợp đặc biệt

a) $u^2 = 2a^2$ hay $u = 0$;

b) $u = a$;

c) u ảo (trừ trường hợp $c^2 = 2b^2 = 2u^2$);

d) u ảo (trừ trường hợp $a^2 = c^2 = u^2$).

49. $\frac{100\pi}{4}$ và $\frac{100\pi}{2\sqrt{3}}$ hay, tương ứng, khoảng 78,54% và 90,69% (chuyển từ các bàn (vuông) cực lớn sang mặt phẳng không có giới hạn, về thực chất là dựa vào khái niệm giới hạn, tuy nhiên, không đòi hỏi phải thảo luận kĩ hơn về điều đó mà bằng lòng với nhận thức trực giác).

50. Theo cách trình bày ở bài tập 33 ta hãy biểu thị đường chéo của hình lập phương bằng hai phương pháp

$$(4r)^2 = 3(a - 2r)^2,\ r = \frac{(2\sqrt{3} - 3)a}{2}.$$

51. Bốn đỉnh liên tiếp của hình chữ nhật cách xa một điểm P của không gian tương ứng những đoạn bằng a, b, c và d. Ba trong số bốn khoảng cách đó đã biết; hãy tìm khoảng cách thứ tư.

Hệ thức $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 0$,

(xem lời giải bài tập 47), từ đó rút ra ngay được lời giải của bài toán, vẫn còn đúng trong trường hợp (hình học không gian) tổng quát hơn. Kết quả thu được có thể áp dụng, chẳng hạn, đối với điểm P và các đỉnh chọn trước của hình hộp vuông (cái hộp), vì hai đường chéo bất kì của cái hộp tương tự cũng đồng thời là các đường chéo của một hình chữ nhật nào đó.

52. Giải bài toán hình học không gian thường thường tuỳ thuộc vào sự có mặt một "hình phẳng mấu chốt", hình đó mở ra tất cả các cửa, cho phép rút ra những hệ thức căn bản.

Mặt phẳng song song với hai cạnh của đáy và góc vuông với hai cạnh kia đi qua đường cao của hình chóp. Tam giác cân (giao của hình chóp với mặt phẳng đó) có thể sử dụng như một hình mấu chốt; đường cao của nó bằng h, đáy của nó - giả sử sẽ là a - bằng cạnh của đáy hình chóp, các cạnh bên của nó bằng $2a$, bởi vì mỗi cạnh bên đó là đường cao của một mặt bên (là trung đoạn). Do đó: $(2a)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 = h^2$, và vì vậy diện tích phải tìm bằng $5a^2 = \frac{4h^2}{3}$.

53. Ví dụ: Mặt bên của hình chóp lục giác đều bằng bốn lần diện tích đáy của nó.

Hãy tìm đường cao h của hình chóp, nếu cho trước cạnh a của đáy ($h = a\sqrt{6}$ (*), xem cả bài tập 57).

54. Tổng bình phương các đường chéo của hình bình hành bằng tổng bình phương các cạnh của nó (cách phát biểu khác kết quả bài tập 40).

Giả sử trong hình hộp ta kí hiệu D, P, R, tương ứng là tổng bình phương 4 đường chéo, 12 cạnh, 12 đường chéo của các mặt bên của hình hộp đó.

Khi đó: $D = P = \frac{R}{2}$, (rút ra từ việc áp dụng hai lần kết quả bài tập 40).

55. $\frac{100\pi}{6}$ và $\frac{100\pi\sqrt{2}}{6}$ hay, tương ứng, 52,36% và 74,07% (xấp xỉ).

Xem m.6 lời giải bài tập 54 của chương 15.

56. Bình phương diện tích phải tìm của mặt bằng $16p(p - a)(p - b)(p - c)$.

(*) Lời giải đúng ở đây là $\frac{3a\sqrt{5}}{2}$.

Biểu thức đó có thể xem như cái tương tự của công thức Hê-rôn, nhưng nó liên quan rất chặt với công thức đó.

57. Ta biểu thị cạnh của tam giác bằng a, thể tích của tứ diện bằng T, thể tích của bát diện qua O.

Cách giải thứ nhất. Ta phân bát diện thành hai chóp tứ diện đều bằng nhau có đáy (vuông) chung diện tích a^2. Đường cao của mỗi hình chóp đó bằng $\frac{a}{\sqrt{2}}$ ("hình phẳng mấu chốt" đi qua đường chéo của đáy hình chóp) và vì vậy $0 = 2\frac{a^2}{3}\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Bây giờ ta dựng mặt phẳng qua đường cao của tứ diện (ta kí hiệu độ dài của nó là h) và qua một cạnh bên nào đó của tứ diện; tại giao ("hình phẳng mấu chốt") được hai tam giác vuông, từ đó ta tìm thấy:

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{2a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{2a^2}{3},$$

như vậy $T = \frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Thế là $0 = 4T$.

Cách giải thứ hai. Ta hãy xét một tứ diện đều có cạnh 2a và thể tích 2^3T; bốn mặt phẳng, mỗi mặt đi qua các điểm giữa của ba cạnh xuất phát từ cùng một đỉnh, chia tứ diện đó thành bốn tứ diện đều nhỏ hơn có thể tích T và bát diện đều có thể tích 0. Do đó

$4T + 0 = 8T,$

nên lại có $0 = 4T$.

58. Giả sử C là lăng trụ cho trước (chiếc bánh ngọt) và D là lăng trụ phải tìm (chỉ phủ đường mứt ở phía trên). Ta kí hiệu cạnh của đáy và đường cao bằng a và h đối với C, x và y đối với D.

Các điều kiện xác định lăng trụ D được biểu thị bằng các phương trình

$$x^2 = \frac{a^2 + 4ah}{9},\ x^2y = \frac{a^2h}{9},\ h = \frac{5a}{16},$$

do đó $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{5a}{36}$, $\frac{y}{x} = \frac{5}{18}$.

Bạn hãy cắt lăng trụ D sao cho tâm đáy trên p của nó trùng với tâm đáy P của lăng trụ C và sao cho hoặc là các cạnh hoặc là các đường chéo của hình vuông p song song với các cạnh của hình vuông P, nghĩa là để C và D có bốn mặt phẳng đối xứng chung; các mặt phẳng đó phân cắt phần còn lại của chiếc bánh C thành 8 miếng bằng nhau, có cùng thể tích và có cùng một lượng "đường mứt" như ở D. Cắt lăng trụ D sao cho tâm đáy trên p của nó trùng với tâm đáy p của lăng trụ C và sao cho hoặc là các cạnh hoặc là các đường

chéo của hình vuông p song song với các cạnh của hình vuông p, nghĩa là để C và D có bốn mặt phẳng đối xứng chung; các mặt phẳng đó phân cắt phần còn lại của chiếc bánh C thành 8 miếng bằng nhau, có cùng thể tích và có cùng một lượng "đường mứt" như ở D.

59. Các thể tích tỉ lệ với nhau theo $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}$ còn các diện tích toàn phần theo $\frac{b+c}{c}:\frac{c+a}{b}:\frac{a+b}{c}$.

60. Hiệu số thể tích của hình nón cụt và trụ $\pi h\left[\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\frac{(a+b)^2}{2}\right]=\frac{\pi h(a-b)^2}{12}$

dương trong mọi trường hợp, trừ trường hợp $a = b$ khi đó hai có thể trùng nhau (*).

(Trong Toán học và những suy luận có lí, chương 8 còn xét một số ứng dụng của các bất đẳng thức đại số vào hình học).

61. Giả sử r là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC; khi đó $r^2 = h(2R-h)$, $r=\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3a}}{2}$ và bởi vậy $R=\frac{a^2}{6h}+\frac{h}{2}$ (số hạng $\frac{h}{2}$ trong thực tiễn thường có thể bỏ qua).

62. Giả sử C là tâm và r là bán kính mặt cầu ngoại tiếp. Có "hai hình phẳng mấu chốt" là hai thiết diện của tứ diện; một thiết diện đi qua cạnh b và trung điểm của cạnh đối diện, thiết diện kia đi qua trung điểm giữa của cạnh b và qua cạnh đối diện. Các thiết diện đó vuông góc với nhau; giao tuyến d của chúng nối trung điểm của các cạnh và đi qua C.

Giả sử x là khoảng cách từ điểm C đến cạnh b (trung điểm của cạnh b sẽ là đầu mút thứ hai của đường vuông góc đó) còn h là đường cao của một trong hai mặt của tứ diện, các mặt đó là tam giác đều; khi đó $h=\frac{3a^2}{4}$.

Từ các tam giác vuông có được trên các thiết diện rút ra $h^2=d^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2$, $r^2=x^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2$, $r^2=(d-x)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2$.

Bây giờ để tìm bốn ẩn số ta đã có bốn phương trình; h tính được ngay từ phương trình thứ nhất, còn d thì tính từ phương trình thứ hai. Sau khi được d nên tìm x (muốn vậy, có

(*) Rõ ràng là "phần thừa" và "phần thiếu" của thể tích hình nón cụt so với thể tích hình trụ được tạo nên bằng cách quay các tam giác như nhau quanh trục, nhưng tam giác thứ nhất ở xa trục hơn tam giác thứ hai và vì thế nó "gây ra" một thể tích lớn hơn.

thể trừ một phương trình nào đó trong hai phương trình sau cùng vào phương trình kia). Rút cục $r^2 = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{4a^2 - b^2}{3a^2 - b^2}$ (*kiểm tra*: nếu $b = a\sqrt{3 = 2h}$ thì $r = \infty$).

Ứng dụng: hai tam giác đều (cạnh a) cứng có cạnh chung làm bản lề có thể ra mở ra một góc sao cho cả bốn đỉnh đều tiếp giáp với phía lõm của mặt cầu đang nghiên cứu; sau đó, nếu đo được b thì có thể tìm được r.

(Thấu kính lồi đòi hỏi dụng cụ có cấu tạo hơi phức tạp hơn).

63. Nếu trong bài tập 62 đặt $a = b$, thì tứ diện trở thành đều $r^2 = \frac{3a^2}{8}$ và

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{\alpha}{2}}{r} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \alpha = 109^0 28'.$$

Góc này có thể xem như góc giữa các liên kết hoá trị của nguyên tử cacbon (chẳng hạn trong phân tử CH_4).

64. Giả sử x là khoảng cách (theo đường vuông góc) từ L đến màn ảnh. Khi đó

$$\frac{I}{x^2} = \frac{I'}{(d-x)^2} \text{ và như vậy } x = \frac{d\sqrt{I}}{\sqrt{I} + \sqrt{I'}}$$

(trong thực tiễn bài toán có vẻ khác: cho I, còn d và x đo được; như vậy ở đây I' được xác định).

66. 35 dặm (xem bài tập 67).

67. Ta đưa vào các kí hiệu tổng quát (trong các dấu ngoặc ghi các dữ kiện bằng số tương ứng).

$a\left(\frac{7}{2}\right)$ là vận tốc của người đưa thư A,

$b\left(\frac{8}{3}\right)$ là vận tốc của người đưa thư B,

$c(1)$ là thời gian (tính bằng giờ) giữa hai lúc xuất phát A và B.

$d(59)$ là khoảng cách tính bằng dặm giữa hai nơi xuất phát.

Khi đó $x + y = d$, $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = c$, $x = \frac{a(bc + d)}{a + b}$.

Niu-tơn phát biểu bài toán như sau: "Cho trước các vận tốc của hai cố thể A và B cùng chuyển động hướng về cùng một vị trí, cho khoảng cách thời gian giữa hai điểm bắt đầu chuyển động, cũng như khoảng cách giữa các vị trí mà từ đó chúng bắt đầu chuyển động; phải xác định vị trí mà chúng gặp nhau".

68. Ta sử dụng các kí hiệu sau:

u là tốc độ của Ac.

v là tốc độ của Bin.

t_1 là thời gian (tính từ lúc xuất phát) đến lúc hai người gặp nhau lần thứ nhất.

t_2 là thời gian đến lúc hai người gặp nhau lần thứ hai.

d là khoảng cách giữa hai nhà của hai người.

Khi đó

$ut_1 = a,$ $\qquad ut_2 = d + b,$

$vt_1 = d - a,$ $\qquad vt_2 = 2d - b.$

1) Biểu diễn tỉ số $\frac{u}{v}$ bằng hai cách, ta được: $\frac{a}{d-a} = \frac{d+b}{2d-b}$.

Do đó, nếu bỏ nghiệm không đi, thì ta tìm được $d = 3a - b$.

2) Tất nhiên, Ất. Tính ra $\frac{u}{v} = \frac{3}{2}$.

69. Xem bài tập 70.

70. Thời gian kể từ lúc xuất phát đến khi cả $n + 1$ người bạn lại gặp đông đủ trải qua $2n - 1$ giai đoạn:

1) Bốp đi ô tô với A,

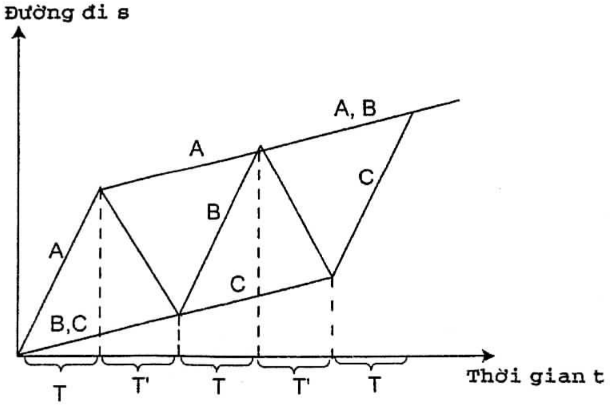
2) Bốp đi ô tô một mình,

3) Bốp đi ô tô với B,

4) Bốp đi ô tô một mình.

....

$2n - 1$) Bốp đi ô tô với L.



Hình 2.14

Hình 2.14 với $n = 3$ minh hoạ năm giai đoạn đó; các đoạn thẳng biểu diễn hành trình của các bạn A, B và C được đánh dấu bằng các chữ cái tương ứng; các đoạn thẳng nghiêng dốc hơn biểu diễn hành trình ô tô. Do sự đối xứng của quá trình (điều đó đặc biệt được thể hiện rõ trên hình 2.14) ta rút ra rằng, tất cả $n - 1$ giai đoạn với số hiệu chẵn cũng có độ dài, ví dụ T'. Ta hãy biểu diễn chuyển động tổng hợp sau $2n - 1$ giai đoạn (tức là $nT + (n - 1)T'$ đơn vị thời gian) bằng hai cách khác nhau (lúc đầu theo Bốp, rồi sau đó theo một trong những người bạn của anh ta):

$$nTc - (n - 1)T'c = Tc + (n - 1)(T + T')p.$$

do đó $\dfrac{T}{T'} = \dfrac{c + p}{c - p}$.

Vận tốc chuyển động cả nhóm bằng $\dfrac{nTc - (n-1)T'c}{nT + (n-1)T'} = c\dfrac{c + (2n-1)p}{(2n-1)c + p}$

Phần thời gian mà ô tô chỉ chở một mình An $\dfrac{(n-1)T'}{nT + (n-1)T'} = \dfrac{(n-1)(c-p)}{(2n-1)c + p}$

Các kết quả 1 và 2 đặc biệt có thể thấy được rõ ràng trong các trường hợp tới hạn (thật vậy, khi $n = \infty$ kết quả 2 ít hiển nhiên hơn): $p = 0$, $p = c$, $n = 1$, $n = \infty$.

Tốc độ chuyển động của nhóm $\dfrac{c}{2n-1}c$, c, p.

Phần thời gian Bốp đi một mình

$$\frac{n-1}{2n-1}, \quad 0, \quad 0, \quad \frac{c-p}{2c}.$$

71. Giả sử t_1 là thời gian hòn đá rơi và t_2 là thời gian mà tiếng động vang đến tai bạn. Từ các hệ thức $T = t_1 + t_2$, $d = \dfrac{gt_1^2}{2}$, $d = ct_2$, ta tìm được $d = \left\{-\dfrac{c}{\sqrt{2g}} + \sqrt{\dfrac{c^2}{2g} + cT}\right\}^2$.

72. Ta đưa vào kí hiệu $\beta' = \widehat{ACO}$. Bởi vì $\dfrac{\sin\varpi}{\sin\beta} = \dfrac{AB}{AO}$, $\dfrac{\sin\varpi'}{\sin\beta'} = \dfrac{AC}{AO}$

nên $\dfrac{\sin\varpi\sin\beta'}{\sin\varpi'\sin\beta} = \dfrac{t}{t'}$

Mặt khác, $\beta' - \beta - (\omega' - \omega)$. Biểu thị $\dfrac{\sin\beta'}{\sin\beta}$ bằng các cách khác nhau, ta được:

$$ctg\beta = ctg(\varpi' - \varpi) - \frac{t\sin\varpi'}{t'\sin\varpi\sin(\varpi' - \varpi)}.$$

73. Cộng ba phương trình đã cho, ta được $0 = a + b + c$.

Nếu các a, b và c cho trước *không thoả mãn* hệ thức đó, thì *bài toán không thể giải được*, tức là các số x, y, z đồng thời thoả mãn cả ba phương trình không tồn tại. Còn nếu

như hệ thức đó *được thực hiện, thì bài toán không xác định*, tức là có vô số nghiệm; chẳng hạn, từ hai phương trình đầu ta được:

$$x = z + \frac{3a + b}{7},$$

$$y = z + \frac{2a + 3b}{7}$$

trong đó z tuỳ ý.

Xem bài tập 47 và 48.

74. So sánh các hệ số của các tích luỹ thừa như nhau trong cả hai vế của đồng nhất thức, ta được năm phương trình đối với các ẩn số p, q và r.

$1 = p^2, \quad 4 = pq, \; -2 = q^2 + 2pr, \quad -12 = 2pr, \quad 9 = r^2.$

Phương trình đầu cho $p = +1$, từ đó sử dụng phương trình thứ hai và ba, ta được hệ thống nghiệm"

$p = 1, \quad q = 2, \quad r = -3$ và $p = -1, \quad q = -2, \quad r = -3;$

chúng đồng thời thoả mãn cả hai phương trình sau cùng.

Nói chung không thể khai căn bậc hai đa thức đứng ở vế trái hoặc một đa thức tương tự với nó, bởi vì giải một hệ thống mà số phương trình của nó lớn hơn số ẩn thường là không thể được.

75. Khai triển vế phải của đồng nhất thức được giả định và so sánh các hệ số tương ứng, ta được:

1) $aA = bB = cC = 1,$

2) $bC + cB = aA + aC = aB + bA = 0.$

Từ 2) ta tìm được $bC = -cB$, $cA = -aC$, $aB = -bA$,

nhân ba đẳng thức đó, ta có:

$abc\,ABC = -abc\,ABC,$

$abc\,ABC = 0.$

Nhưng từ 1) rút ra rằng: $abc\,ABC = 1.$

Mâu thuẫn đó chứng tỏ đồng nhất thức được giả định không xảy ra, (tức là hệ thống sáu phương trình có sáu ẩn số a, b, c, A, B và C không tương thích).

76. Các số $x = 5t$, $y = 60 - 18t$, $z = 40 + 13t$ dương khi và chỉ khi $0 < t < \frac{60}{18}$. Như vậy, chỉ có thể lấy các giá trị sau đây của t: 1, 2, 3 và chỉ những bộ ba (x, y, z) như sau:

(5, 42, 53), (10, 24, 66), (15, 6, 79).

77. Xem bài tập 76; các giá trị $x = 2t$, $y = 45 - 5t$, $z = 3t - 15$, trong đó $t = 5, 6, 7, 8$ hoặc 9 thoả mãn hệ phương trình:

$x + y + z = 30,$

$14x + 11y + 9z = 360.$

78. $100 + x = y^2$, $168 + x = z^2$.

Trừ đi ta được: $(x - y)(z + y) = 68$.

Bởi vì số $68 = 2^2.17$ có thể biểu diễn dưới dạng tích của hai thừa số chỉ bằng ba cách: $68 = 1.68 = 2.34 = 4.17$, còn y và z phải đồng thời cùng chẵn hoặc cùng lẻ, nên chỉ có một nghiệm : $z - y = 12$, $z + y = 34$, $z = 18$, $y = 16$, $x = 156$.

79. Bốp có x con tem trong số đó y phần bảy ở trong tập thứ hai; x và y là những số nguyên dương :

$$\frac{2x}{10} + \frac{yx}{7} + 303 = x, \text{ do đó } x = \frac{3.5.7.101}{28 - 5y}.$$

Mẫu số ở vế phải là số dương và lẻ, bởi vì nó phải là ước của tử số, tử số này là một số lẻ. Như vậy còn lại ba khả năng, trong đó chỉ có khả năng sau cùng là thích hợp; nghiệm duy nhất có dạng $y = 5$ và $x = 3535$.

80. Nếu giá trị mới của một cái bút là x xen và số bút còn lại gồm y chiếc, thì $xy = 3193$. Ở đây $x < 50$. Vì số $3193 = 31.103$ là tích của hai thừa số nguyên tố, nên số đó có bốn ước số khác nhau: 1, 31, 103, 3193. Giả thiết rằng x là số nguyên ta được $x = 1$ hoặc 31. Ngoài ra nếu giả thiết rằng $x > 1$, ta tìm được $x = 31$.

84. 1) *Không tương thích*: Hoặc là trong ba mặt phẳng có hai mặt phẳng không trùng nhau và song song với nhau hoặc là cùng cắt nhau từng đôi một theo ba đường phân biệt song song từng đôi một.

2) *Tính phụ thuộc:* Cả ba mặt phẳng có một đường thẳng (ở đây hai hoặc cả ba mặt phẳng có thể trùng nhau).

3) *Tính tương thích và tính độc lập:* Các mặt phẳng có một điểm chung duy nhất.

87. Trong các sách giáo khoa toán cho các trường trung học hiện nay có nhiều "bài toán bằng lời" mặc dù là không đa dạng lắm. Đáng tiếc là trong các sách đó đã không quán triệt những vấn đề mà đáng lẽ có thể làm sáng tỏ tính ưu việt, tầm quan trọng của "phương pháp Đề-các".

Qua các bài tập ở trên bạn đọc có thể hiểu rõ, những câu hỏi phụ liên quan đến bài toán bạn vừa giải bổ ích biết chừng nào. Tôi sẽ nêu ra một số câu hỏi như thế và sau mỗi câu hỏi có chỉ rõ nó dùng để minh hoạ một bài tập nào đó (sẽ rất bổ ích nếu bạn đọc tìm ra được cả những câu hỏi khác).

Có thể kiểm tra lại kết quả không? (Bài tập 4).

Bạn hãy kiểm tra lại các trường hợp đặc biệt (các trường hợp suy biến, các trường hợp tới hạn) (Bài tập 14).

Có thể nhận kết quả đó bằng các cách khác hay không? Hay so sánh các phương pháp khác nhau? (Bài tập 8).

Bạn có thể giải thích kết quả theo một kiểu khác không? (Bài tập 3).

Hãy khái quát hoá bài toán (Bài tập 2).

Hãy nghĩ ra một bài toán tương tự (Bài tập 51).

Lấy một bài toán nào đó và đặt các câu hỏi tương tự, bạn đọc có thể đặt ra những bài toán mới, trong đó có những bài lí thú và không khó quá. Dù sao khi nêu ra những câu hỏi như vậy bạn đọc có thể có nhiều khả năng tốt để hiểu sâu bài toán xuất phát và nâng cao bản lĩnh giải toán nói chung.

Đây là hai bài toán (không dễ lắm) phát triển từ bài toán trên.

1) Hãy kiểm tra lại kết quả của bài tập 36.

a) Giả thiết rằng $\alpha = \delta, \beta = \gamma, \alpha + \beta = 90^0$;

b) Giả thiết rằng $\alpha = \delta, \beta = \gamma$, nhưng không cho trước giá trị của $\alpha + \beta$.

c) Thay α, β, γ và δ tương ứng bằng δ, γ, β và α.

2) Hãy khảo sát những bài toán không gian tương tự như bài tập 49 (ở đây có thể rút ra một số chỉ dẫn từ bài tập 40 chương 3).

Đối với các nhận xét bổ sung 65, 81, 83, 85 và 86 không cần phải chỉ dẫn.

CHƯƠNG 3

1. Với $n = 0$ và $n = 1$ điều khẳng định là hiển nhiên. Giả sử nó đúng đối với một giá trị nào đó của n: $(1+x)^n = 1 + \ldots + C_n^{r-1}x^{r-1} + C_n^r x^r + \ldots + x^n$;

khi đó, nhân hai vế với $1 + x$ ta sẽ được:

$$(1+x)^{n+1} = 1 + \ldots + [C_n^r + C_n^{r-1}]x^r + \ldots + x^{n+1}$$

Theo công thức truy toán ở m.1 §6 hệ số của x^r trong khai triển của $(1+x)^{n+1}$ bằng C_{n+1}^r; vì vậy công thức nhị thức mà ta giả thiết là đúng đối với số mũ n sẽ đúng với số mũ $n + 1$. Nhận xét rằng, khi đó ta cũng đã sử dụng điều kiện *biên giới* ở m.2 §6. Cụ thể là ở chỗ nào?

2. Coi kết quả của bài toán 1 là đã được chứng minh, bạn hãy đặt $x = \frac{b}{a}$ và xét $a^n(1+x)^n = (a+b)^n$.

3. Hãy coi điều khẳng định "S_p của một đa thức bậc $(p+1)$ của n" như một trong những giả thiết có thể được (như đã làm lúc đầu). Điều giả định này đã thừa biết là đúng trong các trường hợp riêng đơn giản nhất $p = 0$, 1 và 2 (chính chúng đã gợi cho ta điều giả thiết đó; xem phần đầu §3. Giả sử rằng giả thiết đó đúng đối với mọi giá trị cho đến tận $p = k - 1$, nghĩa là đối với $p = 0, 1, 2, \ldots, k - 1$ nói một cách khác, đối với $S_o, S_1, S_2, \ldots, S_{k-1}$). Từ đó có thể rút ra kết luận (xem đẳng thức sau cùng ở §4) rằng biểu thức $C_{k+1}^2 S_{k-1} + C_{k+1}^3 S_{k-2} + \ldots + S_o = P$ kí hiệu P được đưa vào để đơn giản hoá cách viết) là một đa thức bậc k. Từ đẳng thức vừa nhắc đến ta tìm được

$$S_k = \frac{(n+1)^{k+1} - 1 - P}{k+1} \qquad (1)$$

Vì bậc của đa thức P đối với n bằng k, số hạng cao nhất của khai triển $(n+1)^{k+1}$ phải bằng n^{k+1} và không thể giản ước với bất kì số hạng nào, do đó, S_k quả thật là một đa thức bậc $k+1$ đối với n.

Ta đã đi đến kết luận của ta sau khi đã giả thiết rằng S_o có bậc 1, S_1 có bậc 2,..., S_{k-1} có bậc k. Nếu diễn tả một cách có hình ảnh, thì có thể nói được tính chất đang khảo sát của tổng S_k (bậc của nó bằng k+1) có "xu thế khuếch trương không gì kìm hãm nổi". Từ lâu ta đã biết rằng S_o, S_1 và S_2 có tính chất đó; bởi vậy, do điều vừa nói tổng S_3 cũng phải có tính chất đó; cũng do chứng minh đó tính chất như vậy cũng phải có ở S_4, ở S_5,...

Số hạng cao nhất của tổng S_k có dạng đòi hỏi, cũng hiển nhiên thôi, nó được rút ra từ công thức (1).

Một số bài toán sẽ khảo sát dưới đây cho phép đi đến kết quả theo một cách khác nhau (xem cả các bài tập 2-7 chương 4).

4. $S_4 = S_2 . \frac{6S_1 - 1}{5} = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)}{30}$.

Chứng minh các công thức này được tiến hành bằng phương pháp quy nạp toán học một cách bình thường.

5. Phương pháp tính được gợi ý ở §2, §3 và §4, cũng như bài tập 3.

6. Ta tìm được (xem §4): $n^k - (n-1)^k = C_k^1 n^{k-1} - C_k^2 n^{k-2} + ... + (-1)^{k-1} C_k^k$.

7. Ta tìm được (xem §4):

$[n(n+1)]^k - [(n-1)n]^k = n^k[(n+1)^k - (n-1)^k] = 2C_k^1 n^{2k-1} + 2C_k^3 n^{2k-3} + 2C_k^5 n^{2k-5} + ...$

8. Ta tìm được (xem §4):

$(2n+1)[n(n+1)]^k - (2n-1)[n-1)n]^k = n^k[(n+1)^k + (n-1)^k] + 2n^{k+1}[(n+1)^k - (n-1)^k]$

$= 2(C_k^0 + 2C_k^1)n^{2k} + 2(C_k^2 + 2C_k^3)n^{2k-2} + ...$

9. Nhận được từ bài tập 7 bằng cách sử dụng phép đệ quy và quy nạp toán học.

10. Nhận được từ bài tập 8 bằng cách sử dụng phép đệ quy và quy nạp toán học.

11. Đây là ba trường hợp riêng đầu tiên

$2S_1 = n(n+1)$,

$0 = n^2(n+1) - 2nS_1$,

$2S_3 = n^3(n+1) - 3n^2S_1 + 3nS_2$.

Trường hợp $k = 1$ cho phép tính S_1 bằng phương pháp chỉ hơi khác: "phương pháp của cậu bé Gao-xơ" đôi chút (xem §1).

Trường hợp $k = 2$ bằng con đường loanh quanh sẽ lại dẫn đến S_1.

Trường hợp $k = 3$ cho S_3 với điều kiện là S_1 và S_2 đã biết.

Nói chung, kết quả của ta cho phép tính được S_k theo $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_{k-1}$ chỉ khi k lẻ, mà không phải khi k chẵn. Trong một mức độ nào đó điều này sẽ giải thích, tại sao phương pháp tỏ ra hiệu nghiệm khi tính S_1 (xem §1), lại không mang lại kết quả trong trường hợp S_2 (xem §2). Ta còn nhận xét rằng, nếu so sánh kết quả của ta với §2 và §4 và các bài tập 6 và 10, có thể học tập được một chút gì đó và người ta còn có thể sử dụng nó trong những hoàn cảnh thích hợp.

12. Do các bài tập 9 và 10, chỉ cần kiểm tra lại rằng điều khẳng định đó đúng đối với $S_1(x)$ và rằng $S_2(x) = S_1(x).\ \dfrac{(2x+1)}{3}$.

13.a) Bằng "phương pháp của cậu bé Gao-xơ" xem phương pháp đầu tiên ở §1 ta tìm được: $[1 + (2n - 1)] + [3 + (2n - 3)] + \ldots = 2n.\ \dfrac{n}{2} = n^2$.

b) Hãy áp dụng phương pháp thứ hai ở §1; xem ở dưới.

c) Hãy khái quát hoá. Hãy khảo sát tổng các số hạng của cấp số cộng có số hạng đầu tiên là a, công sai d và số số hạng là n:

$S = a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots + [a + (n - 1)d]$.

Hãy kí hiệu số hạng cuối cùng $a + (n - 1)d = b$; khi đó (xem phương pháp thứ hai ở §1):

$S = a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots + (b - 2d) + (b - d) + b$

$S = b + (b - d) + (b - 2d) + \ldots + (a + 2d) + (a + d) + a$

Cộng vào rồi chia cho 2, ta tìm được $S = \dfrac{a+b}{2}.n$

Trong trường hợp đặc biệt, khi mà $a = 1$, $b = 2n - 1$, ta có $S = \dfrac{1+(2n-1)}{2}n = n^2$

d) Xem phương pháp thứ hai ở hình 3.12.

e) Xem lời giải bài tập 14.

14. $1 + 4 + 9 + 16 + \ldots + (2n - 1)^2 + 2n^2 - 4(1 + 4 + \ldots + n^2) =$

$$= \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - 4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

15. Hãy áp dụng phương pháp giải bài tập 14.

$$\frac{4n^2(2n+1)^2}{4} - 8\frac{n^2(n+1)^2}{4} = n^2(2n^2-1).$$

16. Hãy sử dụng các kí hiệu của bài tập $12: 1^k + 3^k + \ldots + (2n - 1)^k = S_k(2n) - 2^k S_k(n)$.

17. Đôi khi trả lời cả một loạt câu hỏi lại dễ dàng hơn trả lời một câu hỏi riêng biệt. (Cái đó gọi là "Nghịch lí của người phát minh" (xem Giải một bài toán như thế nào?). Cùng với tổng: $2^2 + 5^2 + 8^2 + \ldots + (3n - 1)^2 = U$.

hãy khảo sát tổng: $1^2 + 4^2 + 7^2 + \ldots + (3n - 2)^2 = V$.

Khi đó (xem bài tập 16): $U + V + 9S_2(n) = S_2(3n)$.

Ngoài ra, rõ ràng là: $U - V = 3 + 9 + 15 + \ldots + (6n-3) = 3n^2$.

Như vậy, ta được một hệ thống hai phương trình tuyến tính đối với các ẩn U và V, giải hệ thống này, ta không những chỉ tìm được giá trị: $U = \dfrac{n(6n^2 + 3n - 1)}{2}$

mà cả $V = \dfrac{n(6n^2 + 3n - 1)}{2}$.

Trong bài tập 18 mà còn cho một phương pháp nữa để giải bài toán này.

18. Tổng quát hoá kí hiệu ở §3 (ở đấy xét trường hợp riêng $a = d = 1$), ta đặt:

$S_k = a^k + (a + d)^k + (a + 2d)^k + \ldots + [a + (n - 1)d]^k$.

Đương nhiên $S_o = n$. Thay trong hệ thức

$$(a + nd)^{k+1} - [a + (n-1)]^{k+1} = C_k^1 + 1[a + (n-1)d]^k d + C_k^2 + 1[a + (n-1)d]^{k-1} d^2 + \ldots$$

n bằng các giá trị 1, 2, 3,..., n và cộng những biểu thức có được, ta có:

$$(a + dn)^{k+1} - a^{k+1} = C_{k+1}^1 S_k d + C_{k+1}^2 S_{k-1} d^2 + \ldots + S_0 d^{k+1}$$

Từ đó bằng truy toán có liên tiếp nhận được $S_1, S_2, \ldots, S_k$. Hãy xét tỉ mỉ trường hợp $a = 2$, $d = 3$, $k = 2$; xem bài tập 17.

19. Do các kết quả thu được ở §2 và §3, tổng phải tìm có dạng

$$\frac{1.2}{2}2 + \frac{2.3}{2}3 + \frac{3.4}{2}4 + \ldots + \frac{(n-1)n}{2}n = \frac{1}{2}\left[(2^3 - 2^2) + (3^3 - 3^2) + (4^3 - 4^2) + \ldots + (n^3 - n^2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(S_3 - S_2) = \frac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{24}$$

20. a) $\dfrac{n(n^2 - 1)}{6}$,

b) $n^{n-1}\, 2^{n-2}\, 3^{n-3} \ldots (n - 1)^1$,

c) $\dfrac{n^2(n^2 - 1)}{12}$.

21. Ta đã tính E_1 ở §1 và E_2 ở bài tập 19. Phương pháp có hiệu quả hơn dựa trên một định lí cổ điển của đại số cao cấp, theo đó bất kì một đa thức đối xứng cơ bản nào cũng có thể biểu thị qua tổng các luỹ thừa cùng bậc

$E_1 = S_1$,

$E_2 = \dfrac{1}{2}\left((S_1)^2 - S_2\right)$,

$$E_3 = \frac{1}{6}\left((S_1)^3 + 2S_3 - 3S_1S_2\right),$$

$$S_4 = \frac{1}{4}\left((S_1)^4 + 3(S_2)^2 + 8S_1S_3 - 6(S_1)^2 S_2 - 6S_4\right).$$

Phối hợp các biểu thức đó với các kết quả thu được trong §1, 2 và 3 trong bài tập 4, đối chiếu một số tính chất của biểu thức ("luỹ đẳng") tổng quát của E_k theo S_1, S_2..., S_k với các kết quả của các bài tập 9 và 10, thì có thể tìm được chẳng những luỹ thừa của số hạng cao nhất mà còn tìm được cả hệ số của nó nữa.

$E_k(n) = \frac{n^{2k}}{k!2^k} + \ldots$ từ đó rút ra: với $k \geq 2$ biểu thức $E_k(n)$ chia hết cho

$$(n - k + 1)\ (n - k + 2) \ldots (n - 1)\ [n(n + 1)]\ \frac{3-(-1)^k}{2}.$$

22. *Thủ tục b) là trường hợp của thủ tục c).* Thật vậy, Nếu A_{n+1} được suy ra từ riêng A_n thì, hơn thế nữa, có thể khẳng định rằng A_{n+1} được suy ra từ toàn bộ $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ và A_n. Nói một cách khác, nếu điều khẳng định b) là đúng thì điều khẳng định c) cũng phải đúng. Do đó, nếu ta giả thiết thủ tục c) thì ta cũng phải đồng ý với thủ tục b).

Thủ tục c) có thể dẫn đến thủ tục b). Ta kí hiệu qua B_n điều khẳng định rằng các mệnh đề $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ và A_n đúng *đồng thời*.

Khi đó

Điều khẳng định a) có nghĩa là B_1 *đúng;*

Điều khẳng định c) được rút ngắn thành điều khẳng định rằng B_{n+1} suy ra từ điều B_n.

Như vậy, các điều khẳng định a) và c) đối với dãy $A_1, A_2, A_3, \ldots$ được rút ngắn thành các điều khẳng định a) và b) và chỉ bây giờ ở đó các mệnh đề $A_1, A_2, A_3, \ldots$ mới chỉ được thay bằng $B_1, B_2, B_3 \ldots$

23. Hình 3.3 có thể coi như là một minh hoạ cho trường hợp Bốp, Các, Đích, Rôi và A-len (các chữ tương ứng đứng ở cuối các khu phố đi tư tây bắc xuống đông nam) dựng lều, còn năm thiếu niên kia Rieh-ki, An, A-lêch, Ác và Bin (các khu phố đi từ đông bắc xuống tây nam) nấu cơm. Bắt đầu bằng trường hợp đó, bạn sẽ có thể nhận thấy rằng, mỗi phép chia số trẻ em ra thành từng tốp năm người, tương ứng trên hình 3.3 với một hành trình ngắn nhất từ trên xuống dưới và ngược lại, mỗi một hành trình zíc-zắc như thế tương ứng với một kiểu chia (sự tương ứng một - một!). Vì số cách chia phải tìm bằng 252 (xem hình 3.5).

24. Ở đây ta động chạm đến một trường hợp tổng quát mà trường hợp riêng tiêu biểu đã được gặp ở trong bài tập 23 và trên hình 3.3.

Ta đánh số các phần tử của tập hợp bằng các số từ 1 đến n và đặt phần tử thứ k ứng với "đáy" thứ k (dãy năm ngang) của tam giác Pát-xcan. Một phần tử nào đó sẽ thuộc một tập con nào gồm r phần tử của tập hợp đã cho gồm n phần tử cũng có thể đồng nhất với

một hành trình zíc-zắc nào đó được kết thúc ở một điểm cố định nào đó; bởi vậy, khi tính số hành trình zíc-zắc, thực tế ta đã tính các số tập hợp con.

25. $\frac{n(n-1)}{1.2}$ đường thẳng, $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ tam giác.

26. Nếu số điểm trong không gian (không có bốn điểm nào cùng ở trong mặt phẳng - ND) là n thì số tứ diện mà các đỉnh của chúng là bốn điểm nào đó trong số n điểm sẽ bằng $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$.

27. $C_n^2 - n = \frac{n(n-3)}{2}$.

28. Hai đường chéo giao nhau ở trong đa giác lồi cho trước sẽ là các đường chéo của một tứ giác lồi có bốn đỉnh trùng với bốn đỉnh trong số n của đỉnh của đa giác đã cho. Vì vậy số phải tìm bằng $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$.

29. Đối mặt với màu đỏ có thể chọn bằng $C_6^1 = 6$ cách.

Đối với hai mặt màu xanh trong số năm mặt còn lại thì có thể chọn bằng $C_5^2 = 10$ cách. Do đó số cách để sơn sáu mặt bằng ba màu khác nhau (theo điều kiện đòi hỏi) bằng $C_6^1 C_5^2 = 6.10 = 60$.

30. $C_n^r C_{s+t}^s = \frac{n!}{r(n-r)!} \cdot \frac{(s+t)!}{s!t!} = \frac{n!}{r!s!t!}$

31. Tập hợp gồm n phần tử được chia thành h tập hợp con không phủ nhau (tức là không có hai tập hợp con nào có phần tử chung): tập hợp con thứ nhất chứa r_1 phần tử, tập hợp con thứ hai chứa r_2 phần tử,..., tập hợp con rồi cuối cùng chứa r_h phần tử, ở đây $r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_h = n$.

Tất cả có $\frac{n!}{r_1!r_2!r_3!\ldots r_h!}$ cách chia khác nhau. Việc đánh số và chọn kí hiệu các tập hợp con có ý nghĩa quan trọng, bởi vì nếu trong các số $r_1, r_2, \ldots r_h$ có những số bằng nhau thì nhất thiết cần phải phân biệt các tập hợp con có cùng một số phần tử. Chẳng hạn trong bài tập 23 ta đã phân biệt năm thiếu niên dựng lều và năm thiếu niên còn lại nấu cơm hoặc là trên hình 3.3 ta đã phân biệt hai hành trình zíc-zắc đối xứng với nhau đối với đường thẳng đứng ở giữa (nối điểm A ở đầu với điểm A ở cuối); hay là trong bài tập 80 ta đã không lẫn lộn r mặt có các màu đòi hỏi với s mặt có màu khác ngay cả khi r và s (ngẫu nhiên) bằng nhau.

32. Bất kì phương pháp nào trong số biến phương pháp đã nêu ở §8 và bài tập 24 đều thích hợp để chứng minh tính chất đó.

1) Mạng lưới đường phố đối xứng đối với đường thẳng đứng kẻ qua đỉnh của tam giác Pát-xcan.

2) Công thức truy toán và điều kiện biên cũng có tính chất đối xứng.

3) Dùng dấu giai thừa: 1, 2, 3... $m = m!$, ta có

$$C_n^r = \frac{n(n-1)...(n-r+1)}{1.2...r} = \frac{n(n-1)...(n-r+1)(n-r)...2.1}{1.2...r(n-r)...2.1} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = C_n^{n-r}.$$

4) Bởi vì nhị thức $(a + b)^n$ không thay đổi khi thay đổi vị trí các chữ a và b, nên các hệ số của $a^r b^{n-r}$ và a^{n-r} phải như nhau.

5) Nếu từ một tập hợp n phần tử tách ra một phần tập hợp con r phần tử, thì sẽ còn lại một tập hợp con gồm $n - r$ phần tử. Vì vậy có bao nhiêu tập hợp con r phần tử thì có bấy nhiêu tập hợp con $n - r$ phần tử.

33. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$.

Chứng minh. Trong khai triển của $(a + b)^n$ hãy đặt $a = b = 1$.

Chứng minh cách khác. Có 2^n hành trình zíc-zắc ngắn nhất đi từ đỉnh của tam giác Pát-xcan đến đáy thứ n: chính vì khi chọn trên hình 3.3 một hành trình đi xuống phía nam, cứ mỗi lần đứng ở ngã tư bạn sẽ phải chọn một trong hai hướng.

Còn một cách chứng minh nữa. Tập hợp n phần tử có 2^n tập hợp con (kể cả tập hợp trống và bản thân tập hợp xuất phát; chúng tương ứng với các hệ số C_n^0 và C_n^n của nhị thức); điều đó là đương nhiên, bởi vì khi lập một tập hợp con, bạn có thể góp vào đó hay không gộp bất kì phân tử nào trong số n phân tử của tập hợp.

34. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 - ... + (-1)^n C_n^n = 0$ ở đây $n \geq 1$.

Chứng minh. Hãy đặt $a = a$ và $b = -1$ trng khai triển của $(a + b)^n$.

Chứng minh cách khác. Do điều kiện biên và công thức truy toán, ta có:

$$C_n^0 = C_n^0 - 1,$$

$$-C_n^2 = C_n^1 - 1 - C_{n-1}^1,$$

$$C_n^2 = C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2,$$

....

$$(-1)^{n-1} C_n^{n-1} = (-1)^{n-1} C_{n-1}^{2-2} + (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1},$$

$$(-1)^n C_n^n = (-1)^n C_{n-1}^{n-1}.$$

Hãy cộng lại!

Còn một cách chứng minh nữa: Mỗi một hành trình zíc-zắc kết thúc trên đáy thứ $(n - 1)$ được chia nhánh ra thành hai hành trình zíc-zắc khác nhau dẫn đến đáy thứ n, một trong

các hành trình đó hướng đến góc "dương" khác ($r = 0, 2, 4\ldots$) còn hành trình kia hướng đến góc "âm" ($r = 1, 3, 5\ldots$).

35. Tương tự (đại lộ thứ tư) $1 + 5 + 15 + 35 = 56$.

Trong trường hợp tổng quát (đại lộ thứ r)

$$C_r^r + C_{r+1}^r + C_{r+2}^r + \ldots + C_n^r = C_{r+1}^{r+1}.$$

Chứng minh rằng phương pháp quy nạp toán học. Điều khẳng định đúng với $n = r$; thật vậy, do điều kiện biên giới ta có: $C_r^r = C_{r+1}^{r+1}$.

Bây giờ giả sử điều khẳng định của ta đúng với một giá trị n nào đó, khi đó thêm C_{n+1}^r vào cả hai vế của đẳng thức ứng với điều khẳng định của ta, ta được (theo công thức truy toán) $C_r^r + C_{r+1}^r + \ldots + C_n^r + C_{n+1}^r = C_{r+1}^{r+1} + C_{n+1}^r = C_{n+1}^{r+1}$; như thế tính chất đúng đắn các điều khẳng định của ta đối với $n + 1$ đã được chứng minh.

Cách chứng minh khác. Trên hình 3.7 A là điểm trên, còn L là điểm cho trước ứng với các giá trị $n + 1$ và $r + 1$; tổng số các hành trình zíc-zắc ngắn nhất đi từ A đến L bằng C_{n+1}^{r+1}. Trong mỗi hành trình đó, để chuyển từ đại lộ r sang đại lộ $r + 1$ phải dùng một đường phố nào đó; các số hàng trình chỉ dùng đường phố số 0, chỉ dùng đường phố số 0 và đường phố thứ nhất,…., chỉ dùng các đường phố từ số 0 đến thứ r, tương ứng bằng

$$C_r^r,\ C_{r+1}^r,\ C_{r+2}^r, \ldots,\ C_n^r;$$

Vì vậy tổng của các số đó sẽ cho các hành trình đang xét, tức là số C_{r+1}^{r+1}.

36. Trước hết cộng các số dọc theo đường biên giới tây bắc (đại lộ số 0; xem hình 3.5), sau đó theo dọc đại lộ thứ nhất, rồi dọc theo đại lộ thứ hai… và sau cùng dọc theo đại lộ thứ sáu ta nhận được các số tương ứng 6, 21, 56, 126, 252, 462.

Tổng các số đó bằng 923 là số mà thật là vô ích nếu ta đi tìm nó trên tam giác Pát-xcan gần với mẫu tam giác biểu diễn trên hình 3.5. Tuy nhiên, có một số nguyên nằm hoàn toàn gần ngay sau số đó, cụ thể là số $924 = C_{12}^6$.

Nhận xét rằng, ta có thể không gặp khó khăn khi thực hiện các biện pháp tính cộng (kể cả phép cộng thứ bảy cuối cùng) nếu sử dụng kết quả bài tập 35 và bảng hệ số nhị thức, bởi vì (nếu xuất phát từ ví dụ điển hình của ta) dễ dàng chứng minh được rằng, trong trường hợp tổng quát $\sum_{l=0}^{n} \sum_{r=0}^{n} C_{l+r}^r = C_{m+n+2}^{m+1} - 1$.

37. Bên vế phải của đẳng thức đang xét các thừa số thứ nhất lấy từ đáy thứ năm của tam giác Pát-xcan, các thừa số thứ hai lấy từ đáy thứ tư, số đứng ở vế phải có thể tìm được ở đáy thứ chín. Đối với hệ thức $1.1 + 5.3 + 10.3 + 10.1 = 26$ vai trò tương tự sẽ là các đáy thứ năm, thứ ba và thứ tám. Trường hợp tổng quát hơn đã xét ở §9 liên quan đến đáy thứ n

rồi lại đáy thứ n, và đáy thứ hai n. Xuất phát từ các ví dụ vừa nói đến có thể giả định rằng có một định lí tổng quát như sau: $C_m^0 C_n^r + C_m^1 C_n^{r-1} + C_m^2 C_n^{r-2} + ... + C_m^r C_n^0 = C_{m+n}^r$.

Trong cách viết đó ta đã thực sự giải thích thêm các kí hiệu đã được thừa nhận từ trước; nhân đây xem bài tập 70 (3).

Cả hai chứng minh dẫn ra ở §9 đều có thể mở rộng cho tường hợp tổng quát hơn của ta. Phương pháp hình học được gợi ý nhờ sự so sánh hình 3.8 với hình 3.9. Còn phương pháp giải tích lại là tính bằng hai hệ số của x^r trong khai triển:$(1 + x)^m (1 + x)^n = (1 + x)^{m+n}$.

38. Bên vế trái của đẳng thức đang xét các thừa số thứ nhất thuộc đại lộ thứ nhất của tam giác Pát-xcan, còn các thừa số thứ hai thuộc đại lộ thứ hai; số đứng ở vế phải có thể tìm được trên đại lộ thứ tư. Nếu lấy hệ thức 1.10 + 3.6 + 6.3 + 10.1 = 56, thì vai trò tương tự sẽ là các đại lộ thứ hai, đại lộ thứ hai một lần nữa là đại lộ thứ năm. Trong trường hợp tổng quát (bài tập 35 và hình 3.7 thuộc loại đó) có thể cho rằng sẽ động chạm đến đại lộ số 0, đại lộ thứ r và đại lộ thứ $r + 1$.

Từ các ví dụ đó rút ra định lí tổng quát:

$$C_r^r C_{s+n}^s + C_{r+1}^r C_{s+n-1}^r + C_{r+2}^r C_{s+n-2}^s + ... + C_{r+n}^r C_s^s = C_{r+s+n+1}^{r+s+1}.$$

Chứng minh hình học (tổng quát hơn chứng minh ở bài tập 35 và tương tự với chứng minh ở §9 và bài tập 37) như sau: trên hình 3.10 điểm L được xác định đơn vị bởi các số $r + 1 + s + n$ (tổng các khu phố) và $r + 1 + s$ (số các khu phố ở bên phải và chạy xuống phía dưới); như vậy tổng các số hành trình zíc-zắc ngắn nhất từ đỉnh A đến L bằng $C_{r+s+n+1}^{r+s+1}$ và trong mỗi hành trình đó, để chuyển từ đại lộ thứ r sang đại lộ thứ $r + 1$ phải dùng một đường phố nào đó; ta phân loại các hành trình tương ứng ở vế trái của công thức phải chứng minh dựa trên việc lựa chọn đường phố vừa nhắc đến và tính ngay số tất cả các hành trình.

Cũng nên tiến hành song song một chứng minh thứ hai tương tự đối với §9 và bài tập 37, ở đó công thức mà ta quan tâm có được nhờ xét tích của hai chuỗi; tuy vậy không đơn giản lắm, ở đây có đôi chỗ không được rõ ràng. Lại cũng nên tìm mối quan hệ (đại số) giữa hai công thức cùng loại có được ở đây và ở bài tập 37; có thể làm việc đó như thế nào, cũng còn là vấn đề chưa rõ.

39. Số $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2} = C_n^2 + 1$ là số tam giác thứ n. Đại lộ thứ hai của tam giác Pát-xcan gồm các số tam giác: 1, 3, 6. 10,...

40. Số $C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + ... + C_{n+1}^2 = C_{n+2}^3 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ là số chóp thứ n; điều khẳng định đó dựa trên bài tập 35. Các số chóp 1, 4, 10, 20 tạo nên đại lộ thứ ba của tam giác Pát-xcan.

Chú thích: Các biểu thức đối với các số tam giác và số chóp đáng lẽ được biết trước khi tìm công thức dưới dạng tường minh đối với các hệ số nhị thức (§7), đáng lẽ có thể

đưa các biểu thức đó (dùng phương pháp quy nạp toán học) trước khi phát hiện ra công thức nhị thức.

41. $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

42. Tôi hi vọng rằng bạn đọc cũng đã nghiên cứu các trường hợp $n = 1, 2, 3$.

Phỏng đoán: Có C_{n-1}^{t-1} phương pháp khác để biểu diễn số n dưới dạng tổng t số nguyên dương.

Các trường hợp $t = 1, n$ thì tầm thường; các trường hợp $t = 2, n - 1$ rất đơn giản. Để chứng minh dưới dạng tổng quát, ta hãy xét trên trục một số khoảng $0 < x < n$ và các điểm nguyên ở trong đó $x = 1, 2, 3, \ldots, n - 1$. Từ $n - 1$ điểm đó, chọn lấy $t - 1$ điểm bất kì làm điểm chia, ta phân khoảng của ta thành t khoảng nhỏ liên tiếp có độ dài nguyên và bằng cách đó biểu diễn được n dưới dạng tổng t số có dạng đòi hỏi.

43. Hãy kiểm tra lại các hệ thức biểu diễn trên hình 3.13 đối với những giá trị của n mà bạn có thể chọn được.

1) $F_n = C_{n-1}^0 + C_{n-2}^1 + C_{n-3}^2 + ...$

2) Hãy dùng công thức truy toán ở m.2 §6 (xem bài tập 15 chương 4).

44.

1) $G_n = C_{n-1}^0 + C_{n-3}^1 + C_{n-5}^2 + ...$

2) Hãy dùng công thức truy toán.

3) Sự thay đổi độ dốc dẫn đến dãy $y_1, y_2, y_3, \ldots$ phụ thuộc một tham số (nó có thể là hệ số góc - số nguyên dương q) thoả mãn công thức truy toán (phương trình sau phần hữu hạn; bài tập 14 chương 4): $y_n = y_{n-1} + y_{n-q}$.

Trong trường hợp $q = 1$ hệ số góc bằng 0 và $y_n = 2y_{n-1}$ (xem bài tập 33).

45. Số các hành trình zíc-zắc ngắn nhất nối đỉnh A với điểm L_h đặc trưng bởi các số n và r, ở đây $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_h$ (tổng số các khu phố) và $r = r_1 + r_2 + \ldots + r_h$ (số các khu phố đi từ tây bắc xuống đông nam) ngoài ra các hành trình đó còn phải thoả mãn *điều kiện biên giới* để cho chúng đi qua $h - 1$ điểm trung gian cho trước $L_1, L_2 \ldots, L_{h-1}$ đặc trưng bằng các số tương ứng

n_1	và	r_1
$n_1 + n_2$	và	$r_1 + r_2$
....		
$n_1 + n_2 + \ldots + n_{h-1}$	và	$r_1 + r_2 + \ldots + r_{h-1}$.

46. a) Trên hình 3.15 biểu diễn hai hành trình thuộc tập hợp xuất phát, nhưng không thuộc tập hợp con 1). Tất cả các hành trình đều xuất phát tại cùng một điểm A, kết thúc tại cùng một điểm C và đi qua cùng một điểm trung gian B nằm trên trục đối xứng và chia

mỗi hành trình đó thành hai phần AB và BC. Các đường gấp khúc AB đối xứng với nhau đối với trục đó và không một điểm trong nào nằm trên trục; còn các đường gấp khúc BC thì như nhau. Một trong các hành trình đó thuộc tập hợp con 2), hành trình khác thì thuộc tập hợp con 3). Ngược lại, bất kì một hành trình nào thuộc các tập hợp con đó cũng có thể so sánh với một hành trình "kép", giống như trên hình vẽ 3.15; bạn hãy chú ý đến điểm chung thứ hai của hành trình với trục đối xứng (điểm chung đầu tiên là đỉnh của tam giác Pát-xcan). Sự so sánh như vậy cho phép thiết lập tương ứng một-một giữa các tập hợp con 2) và 3).

b) Có thể so sánh các hành trình một cách khác; trong khi trên hình 3.15 các đường gấp khúc AB đối xứng với nhau đối với đường thẳng AB (đối xứng trục), trên hình 3.16 chúng đối xứng với nhau đối với điểm giữa của đoạn AB *(đối xứng tâm).*

c) Từ *a* và b, rút ra rằng $C_n^r = N + 2C_{n-1}^r$.

Dùng liên tiếp các biểu thức $C_m^r = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-1'}^r$, $C_{n-1}^e = \dfrac{n-r}{n} C_{n'}^r$ ta được hai biểu thức khác $N = C_{n-1}^{r-1} - C_{n-1}^r = \dfrac{2r-n}{n} C_n^r$.

Khi rút ra hệ thức đó ta đã giả thiết rằng $2r > n$; tuy vậy dễ thoát khỏi sự hạn chế đó nếu dựa vào sự đối xứng của tam giác Pát-xcan.

47. *Ta sẽ áp dụng phép quy nạp toán học.* Hãy kiểm tra kết quả dự đoán đối với $n = 1, 2, 3$ ($m = 0, 1$) bằng việc nghiên cứu hình vẽ.

Từ 2m đến 2m + 1. Sau khi đặt một hành trình có độ dài $2m$ không có các điểm chung nào khác A đối với trục đối xứng A đối với trục đối xứng ta được hai hành trình có độ dài $2m + 1$ cũng có tính chất ấy. Nếu giả thiết rằng kết quả mong đợi là đúng với $n = 2m$, thì như vậy ta tìm thấy: với $n = 2m + 1$ đại lượng phải tìm có giá trị $2C_{2m}^m$.

Từ 2*m* + 1 *đến* 2*m* + 2. Sau khi đặt hành trình có độ dài $2m + 1$ đáp ứng những đòi hỏi riêng biệt như đã nói ở trên, thì trong đa số các trường hợp ta được hai hành trình có độ dài $2m + 2$ cũng thoả mãn các đòi hỏi đó (loại trừ các hành trình kết thúc trên đáy thứ $2m + 1$ tại hai điểm gần trục đối xứng nhất). Hãy hình dung tất cả điều đó một cách cụ thể và ta giả thiết rằng kết quả là đúng với $n = 2m + 1$; bây giờ sử dụng trường hợp đặc biệt của bài tập 46 có liên hệ đến đây, ta được số các hành trình phải tìm đối với $n = 2m + 2$: $4C_{2m}^m - 2\dfrac{1}{2m+1} C_{2m+1}^{m+1}$ và sau phép biến đổi thích ứng thì cho C_{2m+2}^{m+1}.

Ta không sử dụng phép quy nạp toán học. Hãy dùng biểu thức đầu tiên đối với N mà ta đã có được khi giải bài tập 46, mục c) và hãy xét tổng: $2\sum\left(C_{n-1}^{r-1} - C_{n-1}^r\right)$, được khai triển đến các giá trị r thoả mãn bất đẳng thức $\dfrac{n}{2} < r \le n$; biểu thức đó cho các số hành trình phải tìm, cụ thể là các số mà ta đã dự đoán từ trước (chỉ cần phân biệt thật kĩ lưỡng giữa các trường hợp $n = 2m$ và $n = 2m + 1$).

48. 0, 1, 6, 21, 50, 90, 126, 141, 126,...

0, 1, 7, 28, 77, 161, 266, 357, 393, 357,....

tất cả các số của đáy thứ bảy, trừ số 1, 393 và (tại) số 1, đều chia hết cho 7.

49. Chứng minh tương tự như bài tập 1.

50. Giải thích tương tự như bài tập 1.

51. Xem bài tập 33.

52. Xem bài tập 34.

53. Xem §9, sau đó khái quát hoá tương tự như bài tập 37.

54. Các đường nghiêng

1, 1, 1, 1, 1,...;

1, 2, 3, 4, 5,...;

1, 3, 6, 10, 15,...;

hạ từ đông bắc xuống tây nam, đồng thời là các đại lộ của tam giác Pát-xcan.

55. Sự đối xứng mà ta có thể nhận thấy ngay từ những dòng đầu được bảo toàn cả trong các dòng tiếp theo; vì vậy chỉ cần viết ra đáy thứ bảy và thứ tám đến trục đối xứng là đủ

$$\frac{1}{8} \qquad \frac{1}{56} \qquad \frac{1}{168} \qquad \frac{1}{128}$$

$$\frac{1}{9} \qquad \frac{1}{72} \qquad \frac{1}{252} \qquad \frac{1}{504} \qquad \frac{1}{630}$$

56. Mẫu số của các số tại mỗi đáy của tam giác điều hoà thì tỉ lệ với các hệ số nhị thức, hơn nữa, hệ số tỉ lệ là các số ở biên. Chẳng hạn các số

C_n^r	$\dfrac{1}{(n+1)C_n^r}$
tam giác Pát-xcan	tam giác Lép-nít

chiếm vị trí như nhau trong các tam giác ta nghiên cứu.

Chứng minh: Trong trường hợp $r = 0$ điều kiện biên giới của tam giác điều hoà được thực hiện. Để kiểm tra công thức truy toán, trước hết hãy viết vế trái của nó, rồi sau sử dụng biểu thức tường minh của các hệ số nhị thức:

$$\frac{1}{(n+1)C_n^{r-1}}+\frac{1}{(n+1)C_n^r}=\frac{C_{n+1}^r}{(n+1)C_n^{r-1}C_n^r}$$

$$=\frac{1}{(n+1)}\cdot\frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!}\cdot\frac{(r-1)!(n-r+1)!}{n!}\cdot\frac{r!(n-r)!}{n!}=\frac{(r-1)!(n-r)!}{n!}=\frac{1}{nC_{n-1}^{r-1}}.$$

57. Ở vế trái của mỗi đẳng thức đó là một đầu của một đại lộ tương ứng của tam giác Lép-nít (hình 3.18), còn vế phải là tổng tất cả các số của đại lộ tiếp theo. Về cách chứng minh hãy xem cách giải bài tập 58.

58. Hãy dùng công thức truy toán đối với tam giác Lép-nít:

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{12},$$

$$\frac{1}{12}-\frac{1}{20}=\frac{1}{30},$$

$$\frac{1}{20}-\frac{1}{30}=\frac{1}{60},$$

$$\frac{1}{30}-\frac{1}{42}=\frac{1}{105}.$$

....

Hãy cộng các đẳng thức đó! (có thể "bỏ qua" "số hạng vô tận" ở đại lộ thứ hai). Từ trường hợp riêng - tiêu biểu đó ta dễ dàng chuyển sang mệnh đề tổng quát sau: trong tam giác Lép-nít tổng (vô hạn) tất cả các số của một đại lộ, bắt đầu từ một số hạng chọn cho trước nào đó và rồi theo hướng tây nam thì bằng số kế cận tây bắc của số hạng đó.

Thay các từ

"Lép-nít", "vô hạn", "tây nam", "tây bắc"

bằng các từ

"Pát-xcan", "hữu hạn", "đông bắc", "đông nam"

ta được kết quả bài tập 35 thay cho kết quả vừa mới nhận được, đó lại là một minh hoạ nữa về "phép tương tự theo nghĩa ngược lại" mà ta nhắc tới trong bài tập 55.

59. Theo công thức biểu diễn số hạng tổng quát của tam giác điều hoà dưới dạng tường minh (bài tập 56), dòng thứ r - 1 trong cách viết của ta chỉ khác dòng tương ứng trong bài tập 57 một thừa số bằng số (r = 2, 3,...), còn tổng số hạng của nó bằng $\frac{1}{(r-1)!(r-1)}$.

61. Tích phải tìm bằng 1. Bạn đọc nào quen lí thuyết chuỗi vô hạn có thể xét đẳng thức $1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = (1 - x)^{-1}$

không chỉ thuần tuý về mặt hình thức: bạn đọc đó hẳn đã biết với điều kiện nào đẳng thức trên có nghĩa và trong trường hợp đó có thể chứng minh nó một cách chặt chẽ.

62. $a_0 + a + a_2 + \ldots + a_n$; bài tập 61 là trường hợp riêng của bài tập 62.

63. Mỗi một chuỗi như thế tương ứng với một đại lộ nào đó trong tam giác Pát-xcan. Tổng của chuỗi đầu tiên đã tìm được trong bài tập 61. Áp dụng các kết quả của bài tập 62 và 35, ta được

$1+2x+3x^2+4x^3+\ldots=(1+x+x^2+\ldots)^2,$

$1+3x+6x^2+10x^3+\ldots=(1+x+x^2+\ldots)^3$

và một cách tổng quát

$$C_r^r+C_{r+1}^r x+C_{r+2}^r x^2+\ldots+C_{r+n}^r x^n=(1+x+x^2+\ldots)^{r+1}=(1-x)^{-r-1}.$$

Để chứng minh một cách hình thức bạn hãy sử dụng phương pháp quy nạp toán học.

64. Hãy tính bằng hai cách có hệ số của x^n trong tích $(1-x)^{-r-1}(1-x)^{-s-1}$.

(phép tính này tương tự với phương pháp phân tích cách giải bài tập 37, phương pháp dựa vào m.3 §9).

65. *Dự đoán:* $1(2n-1)-2(2n-2)+3(2n-3)-\ldots+(2n-1)1=n$.

Để chứng minh công thức đó, hãy xét hệ số của x^{2n-2} trong tích

$(1+2x+3x^2+4x^3+\ldots)(1-2x+3x^2-4x^3+\ldots)=(1-x)^{-2}(1+x)^{-2}=(1-x^2)^{-2}$

$=1+2x^2+3x^4+4x^6+\ldots+nx^{2n-2}+\ldots$

66. Các hệ số phải tìm tương ứng bằng 1, 0, 0, 0, điều đó có thể xem như một sự xác nhận giả định N.

67. Các hệ số phải tìm tương ứng bằng $\frac{2}{3};-\frac{1}{9};\frac{4}{81};-\frac{7}{243}$, điều đó lại một lần nữa xác nhận giả định N, bởi vì các hệ số này ta đã tính bằng hai đường lối căn bản khác nhau.

68. $(1+x)^{1/3}(1+x)^{2/3}=(1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}+\ldots)(1+\frac{2x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{4x^3}{81}-\frac{7x^4}{243}+\ldots=$

$=1+x+0x^2+0x^3+0x^3+\ldots$, điều đó lại một lần nữa xác nhận giả định N.

69. Dùng kết quả của bài tập 61 có thể viết:

$$1+\frac{-1}{1}x+\frac{(-1)(-2)}{1.2}x^2+\frac{(-1)(-2)(-3)}{1.2.3}x^3+\ldots=1-x+x^2-x^3+\ldots=[1-(-x)]^{-1}=(1+x)^{-1}$$

điều đó xác nhận giả định N về một phương diện hoàn toàn khác. Trên cơ sở giả định N có thể nhận được các chuỗi còn lại của bài tập 63 không?

70. $C_{r-1-x}^r=\frac{r-1-x}{1}.\frac{r-2-x}{2}\ldots\frac{-x}{r}=(-1)^r\frac{x}{1}\ldots\frac{x-r+2}{r-1}.\frac{x-r+1}{r}.$

71. Hãy nhận xét rằng $\frac{x}{n}=\frac{(x+n)+(x-n)}{2n}$ như vậy, biểu thức cho trước bằng: $C_{x+n}^{2n}+C_{x+n-1}^{2n}$, còn các hệ số nhị thức là các số nguyên.

72. Theo giả định N, hệ số của x^n trong khai triển của $(1+x)^{-r-1}$ bằng $C_{-r-1}^n=(-1)^n C_{n+r}^n=(-1)^n C_{r+n}^r$; ở đây lúc đầu ta sử dụng bài tập 70 (chương 2), rồi sau đó bài tập 32 với giả thiết rằng *r là một số nguyên không âm*. Thay x bằng $-x$ và do đó thay x^n

bằng $(-1)^n x^n$, ta được kết quả chủ yếu của bài tập 63, nó xác nhận giả định N trong một trường hợp riêng quan trọng, cụ thể là đối với mọi giá trị *nguyên âm* của a.

73. Từ hệ thức $(C_a^0 + C_a^1 x + ... + C_a^r x^r + ...)\ (C_b^0 + ... + C_b^{r-1} x^{r-1} + C_b^r x^r + ...) =$

$= C_{a+b}^0 + C_{a+b}^1 x + ... + C_{a+b}^r x^r + ...$

ta kết luận (bài tập 60) rằng

$$C_a^0 C_b^r + C_a^1 C_b^{r-1} + ... + C_a^r C_b^0 = C_{a+b}^r . \qquad (*)$$

Nếu đặt trong biểu thức đó $a = m$ và $b = n$ thì nó sẽ trở thành biểu thức có được ở bài tập 37; tuy nhiên, ta nhận xét rằng các giá trị đạt được của các đại lượng m, n và a, b khi đó sẽ không như nhau; trong khi hai đại lượng đầu nhất thiết phải nhận những số nguyên không âm thì hai đại lượng sau là những số tuỳ ý.

74. Hệ thức (*) được rút ra từ giả định N, chưa được ta chứng minh, đó cũng mới chỉ là giả định.

Trường hợp riêng của hệ thức (*) - khi các số a và b nguyên dương - đã được chứng minh trong bài tập 37. Một trường hợp riêng khác của hệ thức đó - khi các số a và b nguyên âm - tương đương với kết quả của bài tập 61 dựa theo bài tập 72 và bởi vậy cũng có thể xem là đã được chứng minh. (Nhận xét rằng hệ thức (*) như vậy xác lập sự phụ thuộc mong muốn giữa các kết quả của bài tập 37 và 38; xem nhận xét ở cuối cách giải bài tập 38).

Có thể dùng kết quả bài tập 37 là một trường hợp riêng của hệ thức (*) để chứng minh toàn bộ hệ thức (*) được không? (Được, có thể làm như vậy nếu ta biết được một kiến thức đại số sau đây có liên quan đến vấn đề đó: đa thức của hai biến số x và y triệt tiêu với mọi giá trị nguyên dương của các biến số đó sẽ đồng nhất bằng không).

Ta đưa vào kí hiệu $C_a^0 + C_a^1 x + C_a^2 x^2 + ... + C_a^n x^n + ... = f_a(x)$.

Hệ thức (*), về thực chất, tương đương với hệ thức sau : $f_a(x).f_b(x) = f_{a+b}(x)$.

Bây giờ giả thiết rằng (*) đúng khi đó

$f_a(x).f_a(x).f_a(x) = f_{2a}(x) f_a(x) = f_{3a}(x)$ và một số cách tổng quát, với bất kì n nguyên dương nào cũng xảy ra đẳng thức: $[f_a(x)]^n = f_{na}(x)$.

Giả sử m là số nguyên (dương hay âm); vì giả định N đã được ta kiểm nghiệm với các giá trị nguyên (cả dương lẫn âm) của a (xem các bài tập tương ứng 1 và 72), nên ta kết luận rằng

$[f_{m/n}(x)]^n = f_m(x) = (1 + x)^m$,

$f_{m/n}(x) = (1 + x)^{m/n}$;

như vậy *sự đúng đắn của giả định N đã được chứng minh với mọi giá trị hữu tỉ của chỉ số a.*

(Quả thật là bước cuối cùng của ta hơi mạo hiểm, vì ở đây ta đã không nhắc đến cần phải hiểu giá trị nào trong các giá trị có thể có của căn bậc n của một số; như vậy, còn để lại một lỗ hổng, rất khó có thể lấp được nếu vẫn đứng trên quan điểm thuần tuý hình thức mà ta đã dựa vào trong bài tập 60. Dù sao thì ta cũng đã tìm được những yếu tố quan trọng nhất để xây dựng một chứng minh đầy đủ. Sau bức thư của Niu-tơn một thế kỉ rưỡi vào năm 1826 ra đời cuốn hồi kí của nhà toán học Na-uy vĩ đại A-bel, trong đó ông xét vấn đề hội tụ và phép tổng các chuỗi nhị thức, xét cả đối với những giá trị phức của x và a và đẩy lí thuyết tổng quát các chuỗi vô hạn tiến một bước xa).

75. Các số 1, 2, 6, 20 ta có thể tìm thấy trên trục đối xứng của tam giác Pát-xcan. *Giải thích:* hệ số của x^n bằng

$$(-4)^n C_{1/2}^n = 4^n \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n} = \frac{1.3.5...(2n-1).2.4.6...2n}{n!n!} = C_{2n}^n.$$

76.

$a_0 u_0 = b_0,$

$a_0^2 u_1 = a_0 b_1 - a_1 b_0,$

$a_0^3 u_2 = a_0^2 b_2 - a_0 a_1 b_1 + (a_1^2 - a_0 a_2)b_0,$

$a_0^4 u_3 = a_0^3 b_3 - a_0^2 a_1 b_2 + (a_0 a_1^2 - a_0^2 a_2)b_1 - (a_1^3 - 2a_0 a_1 a_2 + a_0^2 a_3)b_0.$

77. Các trường hợp $n = 0, 1, 2, 3$ đã xét trong bài tập 76 cho phép giả định rằng $a_0^{n+1} u_n$ là một đa thức đối với a và b, các số hạng của đa thức đó có

1) cùng một bậc n đối với chữ a,

2) cùng một bậc 1 đối với chữ b,

3) cùng một trọng số n đối với tập hợp các chữ a và chữ b.

Đây là cơ sở cho điều đó:

1) Nếu a_n được thay thế bằng $a_n c$ (ở đây $n = 0, 1, 2,\dots$, còn c tuỳ ý) thì u_n được thay thế bằng $u_n c^{-1}$.

2) Nếu thay a_n và b_n tương ứng bằng $a_n c^n$ và $b_n c^n$ (sẽ như thế nếu thay x bằng cx) thì u_n được thay bằng $u_n c_n$.

78. $u_n = b_n - b_{n-1}$; kết quả này nếu thu được nếu ta biểu thị u_n theo a và b với các chỉ số thích ứng, rồi sau đó đặt $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \dots = 1$. Điều đó có thể là một cách kiểm tra tốt, hãy thử kiểm tra đối với $n = 0, 1, 2, 3$ (xem bài tập 76).

79. $u_n = b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_n$ (xem bài tập 62); kết quả đó thu được nếu ta biểu thị các hệ số u_n theo a và b có các chỉ số thích ứng, rồi sau đó đặt $a_0 = 1, a_1 = -1, a_2 = a_3 = \dots = 0$. Điều đó có thể dùng làm một cách kiểm tra tốt, hãy thử kiểm tra đối với $n = 0, 1, 2, 3$ (xem bài tập 76).

80. $1 - \frac{x}{6} + \frac{x^2}{40} - \frac{x^3}{336} + \dots + \frac{(-1)^n x^n}{(2.4.6...2n)(2n+1)} + \dots$

81.

$$a_2 u_1 = 1,$$
$$-a_1^3 u_2 = a_2,$$
$$a_1^5 u_3 = 2a_2^2 - a_1 a_3,$$
$$-a_1^7 u_4 = 5a_2^3 - 5a_1 a_2 a_3 + a_1^2 a_4,$$
$$-a_1^9 u_5 = 14a_2^4 - 21a_1 a_2^2 a_3 + 3a_1^2 a_3^2 + 6a_1^2 a_2 a_4 - a^3 a_5.$$

82. Các trường hợp đã xét trong bài tập 81 cho phép giả định rằng $a_1^{2n-1} u_n$ là đa thức đối với các chữ *a* mà mỗi số hạng của nó có:

1) bậc n - 1,

2) trọng số $2n$ - 2.

Đây là các cơ sở cho điều đó:

1) Nếu thay a_n bằng $a_n c$ (điều đó xảy ra nếu đặt $c^{-1}x$ thay cho x), thì u_n được thay thế bằng $u_n c^{-n}$.

2) Nếu thay a_n bằng $a_n c^n$ (điều đó xảy ra nếu đặt cy thay cho y) thì u_n được thay thế bằng $u_n c^{-1}$.

83.

$$x = \frac{y}{1-y}, \quad y = \frac{x}{1+x};$$

như vậy $y = x - x^2 + x^3 - x^4 + \ldots$

Ta thấy rằng nếu theo các điều kiện của bài tập 81 là $a_n = 1$ thì $u_n = (-1)n^{-1}$. Điều đó có thể dùng làm một cách kiểm tra tốt các kết quả nhận được trong bài tập 81; hãy kiểm tra đối với $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

84. $1 - 4x = (1 + y)^{-2}$ hay $y = -1 + (1 - 4x)^{-1/2} = 2x + 6x^2 + \ldots + C_{2n}^n x^n + \ldots$

(xem bài tập 75).

85. $y = -1 + (1 + 4ax)^{1/2} (2a)^{-1} = x - ax^2 + 2a^2x^3 - 5a^3x^4 + 14a^4x^5 - \ldots$

hệ số của x^n bằng $\dfrac{(4a)^n}{2a} C_{1/2}^n = \dfrac{(-1)^{n-1} a^{n-1}}{n} C_{2n-2}^{n-1}$

(cách tính giống trong bài tập 75) và hệ số u_n của bài tập 81 phải nhận giá trị đó nếu $a_1 = 1, a_2 = a, a_3 = a_4 = \ldots = 0$.

86. $y = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots + \dfrac{(-1)^{n-1} n}{n} + \ldots$

87. $u_0 = u_1 = u_2 = 1$, $u_3 = \frac{4}{3}$, $u_4 = \frac{7}{6}$.

88. *Quy nạp toán học*. Điều khẳng định đúng đối với $n = 3$. Ta giả thiết rằng $n > 3$ và điều khẳng định được chứng minh đối với các hệ số đứng trước hệ số u_n, tức là

$u_{n-1} > 1, u_{n-2} > 1, \ldots, u_3 > 1$.

Ta biết rằng $u_0 = u_1 = u_2 = 1$; vì vậy $nu_n = u_0u_{n-1} + u_1u_{n-2} + \ldots + u_{n-1}u_0 > n$.

89. Ta đặt $y = u_0 + u_1x + u_2x^2 + \ldots + u_nx^n + \ldots$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 2.1\, u_2 + \ldots + n(n-1)u_nx^{n-2} + \ldots$

Từ phương trình vi phân ta tìm được $n(n - 1)u_n = -u_{n-2}$.

Từ điều kiện ban đầu ta được: $u_0 = 1$, $u_1 = 0$.

Sau cùng, với $m = 1, 2, 3$ ta có: $u_{2m} = \frac{(-1)^m}{2m!}$, $u_{2m-1} = 0$.

$$y = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

90. $B_n = B_{n-5} + A_n$,

$C_n = C_{n-10} + B_n$,

$D_n = D_{n-25} + C_n$,

$E_n = E_{n-50} + D_n$,

Từ đẳng thức cuối cùng với $n = 100$ rút ra được $E_{100} = E_{50} + D_{100}$, còn đẳng thức trên với $n = 20$ cho $D_{20} = C_{20}$; lúc đó ta giả thiết rằng $D_{-5} = 0$, bởi vì bất kì đại lượng nào loại đó có chỉ số âm đương nhiên được coi bằng không. Các ví dụ đó có mục đích minh hoạ tính chất cơ bản của hệ thống phương trình có được, cụ thể là bất kì ẩn số nào tham gia vào hệ phương trình đó (chẳng hạn, E_{100}) chỉ có thể tính được trong trường hợp nếu đã tính được trước ẩn số nào đó được kí hiệu bởi chữ có chỉ số nhỏ hơn (ví dụ E_{50}) và một ẩn số nào đó nữa được kí hiệu bằng chữ đứng trước trong bảng chữ cái A, B, C... (chẳng hạn D_{100}) (cũng có thể có trường hợp tính được chỉ bằng một ẩn số đã được tính trước; chẳng hạn, hãy xem D_{20}. Trong các trường hợp khác có thể đòi hỏi một số "giá trị hạn chế" của các số mà ta đã biết từ trước khi lập hệ thống phương trình, - ở đây tôi ngụ ý nói đến B_0, C_0, D_0, E_0 và A_n với $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$). Tóm lại ta tính được các ẩn số bằng cách quay trở lại các chỉ số nhỏ hơn hay các chữ cái đứng trước, nghĩa là rút cục lại, trở về những giá trị hạn chế. (Sự khác biệt về kí hiệu không được làm phức tạp thêm sự tương tự giữa các phép tính toán và việc tìm các hệ số nhị thức bằng công thức truy toán và điều kiện giới hạn vừa mới nêu lên ở trên; xem m.2 §6)

Bạn đọc nên lập một lược đồ hợp lí của các phép tính toán và hãy thử nghiệm trên lược đồ đó với các ví dụ bằng số sau: $B_{10} = 3$, $C_{25} = 12$, $D_{50} = 49$, $E_{100} = 292$.

91. *Quy nạp toán học:* Giả sử rằng biểu thức đã viết đối với $y^{(n)}$ là đúng, lấy vi phân biểu thức đó ta được biểu thức sau:

$$y^{(n+1)} = (-1)^{n+1} (n+1)!\, x^{-n-2} \ln x + (-1)^n x^{-n-2} [n! + (n+1) c_n],$$

biểu thức này sẽ có dạng ta cần nếu trong đó ta đặt $c_{n+1} = n! + (n+1)c_n$.

Viết đẳng thức sau cùng dưới dạng $\dfrac{c_{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{c_n}{n!} = \dfrac{1}{(n+1)}$

và đặt $c_1 = 1$, ta tìm được $c_n = n!\,(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{n})$.

92. Tương tự với bài toán đó là bài toán tìm tổng các số hạng của một cấp số nhân; khi giải ta đã dùng cả biểu thức của tổng sau cùng đó lẫn phương pháp nhận được tổng đó.

Ta kí hiệu tổng phải tìm bằng chữ S. Khi đó :

$$(1 - x)S = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} - nx^n = \frac{1 - x^n}{1 - x} - nx^n.$$

Từ đó ta được biểu thức ngắn gọn đòi hỏi đối với S là: $S = \dfrac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$.

93. Hãy sử dụng phương pháp, các kí hiệu và kết quả của bài tập 92; hãy biểu thị theo T tổng phải tìm và xét biểu thức

$$(1 - x)T = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \ldots + (2n - 1)x^{n-1} - n^2x^n = 2S - (1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}) - n^2x^n.$$

Từ biểu thức này và nhờ những biến đổi đại số đơn giản ta được:

$$T = \frac{1 + x - (n+1)^2 x^n + (2n^2 + 2n - 1)x^{n+1} - n^2 x^{n+2}}{(1-x)^3}.$$

94. Từ biểu thức đối với tổng : $1^k + 2^k x + 3^k x^2 + \ldots + n^k x^{n-1}$

có thể tìm được bằng phương pháp đệ quy nếu đưa trường hợp k đến các trường hợp $k - 1, k - 2, \ldots, 2, 1, 0$, giống như đã làm trong bài tập 92 và 93.

95. Hãy lấy vi phân hai vế của đồng nhất thức

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = 1 - \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Các bài tập 93 và 94 cũng có thể dùng phương pháp như vậy.

96. *Dự đoán:*

$$1C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \ldots + (n+1)C_n^n = (n+2)\, 2^{n-1}.$$

(Khó khăn của dự đoán này, có thể bắt nguồn từ nhận thức các tích 3.1, 4.2, 5.4, 6.8, 7.16 là gì?).

Để *chứng minh*, trước hết hãy lấy vi phân cả hai vế của đồng nhất thức

$C_n^0 x + C_n^1 x^2 + C_n^2 x^3 + \ldots + C_n^n x^{n+1} = x(1+x)^n$ rồi sau đó hãy đặt $x = 1$.

97. *Quy nạp toán học*. Với $n = 1$ điều khẳng định đương nhiên là đúng và

$$\frac{a_n(n+\alpha) - a_1(1+\beta)}{\alpha - \beta} + a_{n+1} = \frac{a_{n+1}(n+1+\beta) - a_1(1+\beta)}{\alpha - \beta} + a_{n+1}.$$

98. Hãy dùng kết quả bài tập 97, trong đó đặt $a_1 = \dfrac{p}{q}$, $\alpha = p, \beta = q - 1$.

Tổng phải tìm sẽ bằng: $\dfrac{p}{p-q+1}\left[\dfrac{p+1}{q}\dfrac{p+2}{q+1}\cdots\dfrac{p+n}{q+n-1} - 1\right]$.

99. 1) $8, 4\sqrt{2}, 4\sqrt{3}, 6$.

2) $C_n = 2n \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}$, $P_n = 2n\sin\dfrac{\pi}{n}$.

Tiếp đó là phép kiểm tra trực tiếp bằng các đồng nhất thức lượng giác quen thuộc.

100. Các ví dụ tiếp theo về áp dụng phương pháp quy nạp toán học xem trong các tài liệu tham khảo trích dẫn ở 1. Các bài toán giải bằng phương pháp quy nạp toán học có liên quan đến các tư liệu trong phần 2 và phần 3 của phần bài tập này có thể tìm đọc trong các sách về lí thuyết xác suất và về giải tích tổ hợp. Còn các bài tập liên quan đến tư liệu của phần 4 và các bài tập 61-63 có thể tìm đọc trong các sách về các chuỗi vô hạn và lí thuyết hàm số biến số phức. Các bài toán liên quan chặt chẽ đến các bài tập 67-69 là một phần lớn của lí thuyết các phương trình vi phân.

Có một nguồn vô tận đối với các bài toán loại đó. Đây chỉ là một ví dụ: *các hệ số của đa thức* (xem các bài tập 29-31). Các hệ số khai triển của tam thức $(a + b + c)^n$ với $n = 0, 1, 2, 3$ có thể liên quan đến các nút của lưới không gian (trong góc phần tám thứ nhất), tương tự như các hệ số của nhị thức $(a + b)^n$ nhờ tam giác Pát-xcan liên quan đến các nút của lưới phẳng (trong góc phần tư thứ nhất). Đối với lưới không gian thì cái gì sẽ tương tự với điều kiện biên giới, công thức truy toán, các đại lộ, các đường phố, các đáy của tam giác Pát-xcan, các bài tập 32-40? Tất cả những cái đó liên hệ đến các bài tập 48 – 52 như thế nào? Đó là ta còn chưa nhắc đến các tính chất về lí thuyết số của các hệ số nhị thức và các hệ số của đa thức…

Đối với nhận xét bổ sung 60 không cần phải chỉ dẫn.

CHƯƠNG 4

1. Giả sử A là đỉnh của hình chóp đối diện với đáy. Ta phân đáy hình chóp thành n tam giác có diện tích $S_1, S_2, \ldots, S_n$ và xét n tứ diện có đỉnh chung A, có cùng chiều cao h và có đáy là n tam giác nói trên. Nếu thể tích của n tứ diện do những mặt phẳng đi qua A chia cắt hình chóp tạo thành, theo thứ tự là:

$V_1, V_2, \ldots, V_n$,

$S_1 + S_2 + \ldots + S_n = S,$

$V_1 + V_2 + \ldots + V_n = V,$

Giả thiết rằng, đối với các tứ diện có dạng đặc biệt này, công thức cần tìm là đúng, ta viết: $V_1 = \dfrac{S_1 h}{3}, V_2 = \dfrac{S_2 h}{3}, \ldots, V_n = \dfrac{S_n h}{3}.$

Cộng (chồng!) các hệ thức của từng trường hợp riêng đó lại, ta sẽ đi tới hệ thức tổng quát (cần tìm): $V = \dfrac{Sh}{3}.$

2. Đa thức bậc k, nói chung có dạng: $f(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_k$ (trong đó $a_o \neq 0$). Thay thế x lần lượt bằng các số 1, 2, 3,…, n và cộng các kết quả lại, đồng thời sử dụng các kí hiệu trong bài tập 12 chương 3 ta sẽ được:

$f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = a_0S_k(n) + a_1S_{k-1}(n) + \ldots + a_kS_0(n).$

Căn cứ vào kết quả trong bài tập 3 chương 3, ta kết luận rằng vế phải là một đa thức bậc $k + 1$ đối với n.

3. Có thể viết lại kết quả của bài tập 35 chương 3 như sau: $C_0^r + C_1^r + C_2^r + \ldots + C_n^r = C_{n+1}^{r+1}$ (xem bài tập 70 chương 3). Vận dụng bài tập 4, ta viết lại đa thức cần xét dưới dạng:

$f(x) = b_0C_x^k + b_1C_x^{k-1} + \ldots + b_kC_x^0.$

trong đó (xem lời giải bài tập 4) $b_o = k!\ a_0 \neq 0$. Ta thay x trong đa thức này lần lượt bằng 0, 1, 2, 3,…, n và cộng các kết quả lại; khi đó (sử dụng cách viết kết quả của bài tập chương 3 theo lối mới, vừa đưa ra), ta sẽ được:

$f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = b_0C_{n+1}^{k-1} + b_1C_{n+1}^{k} + \ldots + b_kC_{n+1}^{1}$

Vế phải của hệ thức này là một đa thức bậc $k + 1$ đối với n.

4. So sánh các hệ số của x^k (bậc cao nhất của x) trong hai vế của đồng nhất thức giả định ta tìm được: $a_0 = \dfrac{b_0}{k!}.$

Thay thế giá trị này vào đồng nhất thức của ta, ta được:

$a_0x_k + a_1x_{k-1} + \ldots. + a_k - k!\ a_0C_x^k = b_1C_x^{k-1} + b_kC_x^0.$

So sánh các hệ số của x^{k-1} trong hai vế của hệ thức vừa viết, ta sẽ biểu diễn được b_1 theo a_0 và a_1; cứ tiếp tục làm như thế, bằng phép đệ quy ta sẽ lần lượt tìm được $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_k$.

5. Cần chọn bốn số b_0, b_1, b_2 và b_3 sao cho hệ thức:

$x^3 = b_0C_x^3 + b_1C_x^2 + b_2C_x^1 + b_3C_x^0.$

trở thành một đồng nhất thức đối với x. Có thể viết lại hệ thức này như sau:

$$x^3 = \frac{b_0}{6}(x^3 - 3x^2 + 2x) + \frac{b_1}{2}(x^2 - x) + b_2 x + b_3 .$$

So sánh các hệ số của x^3, x^2, x^1 và x^0, ta sẽ thu được theo thứ tự:

$1 = \frac{b_0}{6}$,

$0 = - \frac{b_0}{2} + \frac{b_1}{2}$,

$0 = \frac{b_0}{3} - \frac{b_1}{2} + b_2$,

$0 = b_3$,

từ đó ta tìm ra:

$b_o = 6$, $b_1 = 6$, $b_2 = 1$, $b_3 = 0$.

Tiếp đó dùng quy trình áp dụng trong bài tập 3 ($k = 3$), sau một số biến đổi đơn giản, ta được:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = 6C^4_{n+1} + 6C^3_{n+1} + 6C^2_{n+1} = \frac{(n+1)^2 n^2}{4}.$$

6. Như đã chứng tỏ trong bài tập 3, có năm hằng số c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 sao cho

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = c_0 n^4 + c_1 n^3 + c_2 n^2 + c_3 n + c_4$$

với mọi số nguyên dương n. Lần lượt lấy n = 1, 2, 3, 4 và 5, ta được một hệ thống năm phương trình để xác định năm ẩn số c_0, c_1, c_2, c_3 và c_4. Giải hệ này, ta tìm được:

$$c_0 = \frac{1}{4}, c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{4}, c_3 = 0, c_4 = 0,$$

nói cách khác, ta thu được kết quả giống như trong bài tập 5, song thực ra thì mất công hơn.

7. Từ bài tập 3, có thể suy ra một cách chứng minh mới cho bài tập 3 chương 3, trừ mỗi một điểm: quy trình của bài tập 3 không cho phép tìm được hệ số của n^{k+1} trong biểu thức của $S_k(n)$ (nếu suy nghĩ thêm một chút thì vẫn có thể tìm được hệ số này).

8. Có phù hợp, bởi vì một đường thẳng được biểu diễn bằng phương trình có dạng: $y = ax + b$ mà vế phải là một đa thức bậc ≤ 1.

9. Theo trực giác thì đường thẳng trùng với trục x có vẻ là đường nội suy đơn giản nhất; nó ứng với một đa thức bậc không, đồng nhất bằng không. Mọi đa thức nội suy khác đều bắt buộc phải có bậc cao hơn, cụ thể là bậc $\geq n$, vì nó có n nghiệm khác nhau $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

10. Bậc của đa thức nội suy của La-grăn-giơ - là công thức cuối cùng trong §3 - không vượt quá n -1; tôi khẳng định rằng đó là đa thức nội suy duy nhất có bậc thấp như thế. Thật vậy, nếu hai đa thức mà bậc không vượt quá n - 1 nhận những giá trị như nhau

tại n điểm đã cho, thì hiệu của chúng phải có n nghiệm khác nhau tức là có nhiều nghiệm hơn là bậc của nó cho phép, miễn là (dĩ nhiên) hiệu đó không đồng nhất bằng không. Vậy đa thức nội suy của La-grăn-giơ là một đa thức duy nhất có bậc $\leq n-1$, đồng thời cũng là đa thức có bậc thấp nhất trong tất cả các đa thức có thể.

12. a) Đó là điều hiển nhiên, vì với c_1 và c_2 là hằng số thì $(c_1y_1 + c_2y_2)' = c_1y'_1 + c_2y'_2$.

b) Hàm $y = e^{rx}$ là nghiệm của phương trình vi phân khi và chỉ khi r là nghiệm của *phương trình đặc trưng* $r^n + a_1r^{n-1} + a_2r^{n-2} + \ldots + a_n = 0$.

c) Nếu phương trình đặc trưng (xem b) có m nghiệm khác nhau $r_1, r_2, \ldots, r_m$, còn $c_1, c_2, \ldots, c_m$ là những hằng số tuỳ ý thì hàm $y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x} + \ldots + c_me^{r_mx}$ là nghiệm của phương trình vi phân, nghiệm này (như có thể chứng minh được) sẽ là nghiệm tổng quát, miễn là $m = n$.

13. Phương trình đặc trưng có dạng $r^2 + 1 = 0$, do đó nghiệm tổng quát của phương trình vi phân sẽ như sau: $y = c_1e^{ix} + c_2e^{-ix}$.

Theo các điều kiện ban đầu, ta có $c_1 + c_2 = 1$, $ic_1 - ic_2 = 0$.

Từ đó suy ra: $c_1 = c_2 = \dfrac{1}{2}$; như vậy nghiệm riêng cần tìm có dạng $y = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$.

Có thể có nhận xét rằng $y = \cos x$ cũng là một nghiệm của phương trình vi phân đang xét và thoả mãn các điều kiện ban đầu đã cho (xem thêm bài tập 89 chương 3).

14. a) Đó là điều hiển nhiên.

b) $y_k = r^k$ là nghiệm của phương trình sai phân khi và chỉ khi r là nghiệm của phương trình đại số trong bài tập 12b).

c) Nếu phương trình trong bài tập 12b), có m nghiệm *khác nhau* $r_1, r_2, \ldots, r_m$, còn $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_m$ là các hằng số tuỳ ý thì $y_k = c_1r_1^k + c_2r_2^k + \ldots + c_mr_m^k$ là nghiệm của phương trình sai phân đang xét; nếu $m = n$ thì (như có thể được chứng minh được) nghiệm này sẽ là nghiệm tổng quát.

15. Phương trình đối với r có dạng $r^2 - r - 1 = 0$, do đó nghiệm tổng quát của phương trình sai phân sẽ như sau: $y_k = c_1\left(\dfrac{a + \sqrt{5}}{2}\right)^k + c_2\left(\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^k$.

Với $k = 0$ và $k = 1$ (điều kiện ban đầu), ta có $c_1 + c_2 = 0$, $c_1\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$, từ đó suy ra $c_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $c_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ và do đó, biểu thức cần tìm của số Phi-bô-na-xi có dạng:

$$y_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right].$$

16. Phương trình $2r^2 - r - 1 = 0$ có nghiệm $r = 1$ và $r = -\dfrac{1}{2}$. Do đó, theo bài tập 14.

$$y_k = c_1 + \frac{(-1)^k c_2}{2^k}.$$

Sử dụng các điều kiện ban đầu (trường hợp $k = 0$ và $k = 1$), ta tìm được c_1 và c_2, từ đó suy ra $y_k = \dfrac{a+2b}{3} + (-1)^k \dfrac{a-b}{3.2^{k-1}}$.

17. Nếu có biểu thức diễn chuyển động thực như một *sự chồng* ba chuyển động ảo, thì các tọa độ của chất điểm vào thời điểm t có thể viết như sau:

$$x = x_1 + x_2 + x_3 = tv\cos\alpha,$$

$$y = y_1 + y_2 + y_3 = tv\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2.$$

Khử t, ta được phương trình của quỹ đạo viên đạn $y = x\mathrm{tg}\alpha - \dfrac{gx^2}{2v^2\cos^2\alpha}$; đó là phương trình một parabol.

19. Có hai ẩn: đáy và chiều cao của tứ diện (xem hình 4.5a).

20. Ta đưa ra các kí hiệu sau đây:

V là thể tích tứ diện,

S là đáy tứ diện,

H là chiếu cao tứ diện,

h là chiều cao của đáy, hạ xuống cạnh đã cho a.

Khi đó $V = \dfrac{SH}{3}$, $S = \dfrac{ah}{2}$ và từ đó suy ra $V = \dfrac{ahH}{6}$. Song cả h lẫn H ta đều chưa biết.

21. Hình chiếu trực giao của tứ diện đang xét (xem bài tập 18) trên mặt phẳng vuông góc với đoạn thẳng b và đi qua một trong hai đầu đoạn này là một hình vuông. Các đường chéo của nó bằng a, diện tích bằng $\dfrac{a^2}{2}$ và ta có thể xem nó như đáy của một lăng trụ (hình hộp chữ nhật) có chiều cao là b (hình 45b). Lăng trụ này được chia nhỏ thành năm tứ diện (không ăn lấn vào nhau), mà một trong số đó là tứ diện trong bài tập 18 (ta kí hiệu thể tích của tứ diện này là u); còn về phần bốn tứ diện kia thì có thể nói chung bằng nhau và đáy của mỗi cái là một tam giác vuông cân có diện tích là $\dfrac{a^2}{4}$ và chiều cao của mỗi cái là b. Như vậy: $\dfrac{a^2b}{2} = V + \dfrac{4a^2b}{12}$, từ đó suy ra $V = \dfrac{a^2b}{6}$.

22. Mặt phẳng đi qua cạnh a và trung điểm cạnh đối diện là một mặt phẳng đối xứng của tứ diện đang xét và chia nó thành hai tứ diện bằng nhau (xem hình 45c); diện tích của đáy chung của chúng (là tam giác cân) rõ ràng là bằng $\frac{ab}{2}$ và chiều cao bằng $\frac{a}{2}$. Do đó, thể tích cần tìm bằng $V = \frac{2}{3}.\frac{a}{2}.\frac{ab}{2} = \frac{a^2b}{6}$.

Mỗi tứ diện của ta đều có hai mặt phẳng đối xứng như thế, chúng chia tứ diện thành bốn tứ diện bằng nhau; từ nhận xét này, có thể rút ra một cách giải nữa cho bài toán (thật ra, cách giải này không khác cách giải trước mấy).

23. Có thể xem tứ diện của chúng ta như một trường hợp cực đoan (trường hợp tới hạn, trường hợp suy biến) của một hình tựa lăng trụ có chiều cao là b và mỗi đáy biến thành đoạn thẳng có độ dài là a; thiết diện giữa của nó là một hình vuông có cạnh là $\frac{a}{2}$ (xem hình 4.d). Như vậy, nếu coi $h = b, L = 0,\ M = \frac{a^2}{4}$, $N = 0$, theo công thức thể tích hình tựa lăng trụ, ta tìm được: $V = \frac{a^2b}{6}$.

24. Vì biểu thức của thể tích V tìm được trong bài tập 20 phải phù hợp với kết quả thu được trong các bài tập 21, 22 và 23 theo ba cách khác nhau, nên phải có hệ thức $Hh = ab$.

Hệ thức này cũng có thể chứng minh một cách độc lập bằng cách tính theo hai cách khác nhau diện tích tam giác cân tạo được khi cắt tứ diện bằng mặt phẳng đối xứng (bài tập 22, hình 15e). Như vậy là ta đã hoàn thành cách giải thứ tư, hơi rắc rối một chút, mở đầu từ bài tập 19 rồi được phân tích tiếp trong bài tập 20.

25. Con đường đã đi (từ bài tập 19 qua bài tập 20 đến bài 24) quá dài dòng và rắc rối. Cách giải trình bày trong bài tập 22 là tuyệt nhất: cách giải này sử dụng rất đạt tính đối xứng của hình (nhưng chính vì nguyên nhân đó mà nó lại bất tiện trong trường hợp không có tính đối xứng); Thành thử, thoạt nhìn thì cũng có những luận cứ để thừa nhận bài tập 22 là hay. Nhưng bạn còn có thể đưa ra thêm lí do gì nữa để chứng thực tính ưu việt của bài tập 22 không?

26. $L = M = N$ và do đó $V = Lh$.

27. $N = 0,\ M = \frac{L}{4}$ và do đó $V = \frac{Lh}{3}$.

28. Giả sử ta dùng L_i, M_i, N_i và V_i để kí hiệu các đại lượng liên quan với P_i, cũng như L, M, N và V liên quan với P ($i = 1, 2\ldots, n$). Tất cả các hình tựa lăng trụ đều có cùng chiều cao h. Hiển nhiên là

$$L_1 + L_2 + \ldots + L_n = L,$$

$$M_1 + M_2 + \ldots + M_n = M,$$

$$N_1 + N_2 + \ldots + N_n = N,$$

$V_1 + V_2 + \ldots + V_n = V,$

Ta hãy thực hiện trên các đẳng thức này những phép tính mà tính chất và trình tự được xác định bằng vế phải của hệ thức viết dưới đây:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{L_i + 4M_i + N_i}{6}h - V_i\right) = \frac{L + 4M + N}{6}h - V.$$

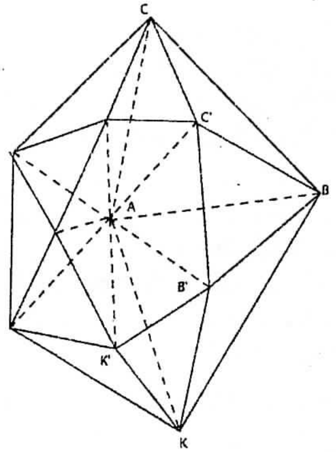
Ta quy ước coi hiệu trong vế phải như một thể thống nhất và như vậy thì có thể coi vế trái là tổng của n hiệu có dạng tương tự nhau. Nếu trong tổng số $n + 1$ hiệu liên hệ với nhau bằng hệ thức vừa viết trên, có n hiệu triệt tiêu thì hiệu thứ $n + 1$ còn lại cũng phải triệt tiêu.

29. Hình chiếu trực giao của tứ diện đang xét trên mặt phẳng đi qua cạnh l là một tứ giác. (Trong trường hợp riêng xét trong bài tập 21, thì đó là một hình vuông (xem hình 45b); còn trong trường hợp tổng quát thì đó là một tứ giác không đều). Một đường chéo của nó là cạnh l, đường chéo kia là một đoạn thẳng bằng và song song với cạnh n. Tứ giác này là một đáy một lăng trụ có chiều cao bằng h, lăng trụ này phân ra thành năm tứ diện: một trong số đó là từ diện đang xét, bốn tứ diện kia là những hình chóp. Công thức thể tích hình tựa lăng trụ có thể áp dụng được cho các hình chóp này (xem bài tập 27); cũng có thể áp dụng cho hình lăng trụ (theo bài tập 26) và do đó cho cả tứ diện của ta (hệ quả của bài tập 28).

30. Trên hình 4.6, vẽ một hình tựa lăng trụ B, $C\ldots$, K là các đỉnh của đáy dưới (nằm trong mặt phẳng của trang sách), còn B', C',..., K' là các đỉnh của đáy trên.

1) Hãy khảo sát hình chóp mà đáy là đáy trên của hình tựa lăng trụ và đỉnh là một điểm A (chọn tuỳ ý) của đáy dưới.

2) Nối điểm A với các điểm B, C,.... K của đáy dưới. Ứng với mỗi đoạn thẳng vừa thu được, có thể đối chiếu một cạnh nhất định của đáy trên (tức là một cạnh của hình tựa lăng trụ); khi đó, đoạn thẳng đã chọn và cạnh tương ứng với nó tạo thành một cặp cạnh đối diện của một tứ diện (chẳng hạn, đoạn thẳng AB tương ứng với cạnh $B'C'$ và chúng cùng xác định tứ diện $ABB'C'$).



Hình 4.6

3) Các đoạn thẳng nối đỉnh A với các điểm B, C,..., K phân đáy dưới ra thành nhiều tam giác. Ứng với mỗi tam giác này có thể đối chiếu một điểm nhất định của đáy trên; khi đó sẽ hình thành một hình chóp mà đáy là tam giác đã chọn và đỉnh là điểm vừa nói trên (đó sẽ là một hình chóp ba cạnh, tức là một tứ diện, chẳng hạn ứng với tam giác ABC, có thể đối chiếu đỉnh C' và chúng cùng nhau xác định tứ diện $ABCC'$).

Thành ra hình tựa lăng trụ của ta bị chia cắt thành những cố thể mô tả trong các điểm 1, 2, 3. Đáy trên của hình tựa lăng trụ trong cố thể 1) thể hiện hoàn toàn như một đa giác, với tư cách là một hình phẳng; trong cố thể 2) chứa các cạnh của đa giác này và trong cố thể 3) chỉ chứa các đỉnh của đa giác này. Đáy dưới của hình tựa lăng trụ được phân chia thành những tam giác (với tư cách là những hình phẳng) nằm trong thành phần của cố thể 3; trong cố thể 2, chứa những đoạn thẳng thuộc đáy dưới; và trong cố thể 3 chỉ chứa một điểm của đáy dưới. Ta hãy vận dụng kết quả của bài tập 27 vào các hình chóp 1 và 3 và vận dụng kết quả của bài tập 29 vào tứ diện 2. Sử dụng bài tập 28, ta sẽ có thể chứng minh được công thức tổng quát của thể tích hình tựa lăng trụ cho hình tựa lăng trụ $BC\ldots KB'C',\ldots, K'$ vẽ trên hình 4.6.

31. Lời giải bài tập 29 chưa đầy đủ, bởi vì trong đó chỉ phân tích một trong ba trường hợp có thể. Ta hãy xét hai đoạn thẳng l và n và hình chiếu trực giao n' của đoạn thẳng n trên mặt phẳng song song với n và đi qua l và cũng xét giao điểm I của hai đường thẳng chứa các đoạn l và n. Có thể xảy ra ba trường hợp.

0) Điểm I không thuộc đoạn nào trong hai đoạn l và n;

1) Điểm I chỉ thuộc một trong hai đoạn đó;

2) Điểm I thuộc cả hai đoạn.

Trong bài tập 21, chỉ mới phân tích trường hợp 2). Nhưng trong trường hợp 1), có thể xem tứ diện như là hiệu giữa hai tứ diện thoả mãn các điều kiện ở trường hợp 2), còn trong trường hợp 0) - như là hiệu giữa hai tứ diện thoả mãn các điều kiện ở trường hợp 1). Nếu chú ý đến bài tập 28, thì chứng minh trong bài tập 29 có thể coi là kết thúc ở các nhận xét vừa nêu trên.

32. Cố thể vẽ trên hình 4.6 có những tính chất sau đây:

1) Các đáy của nó là những đa giác lồi.

2) Mỗi đỉnh của một đáy tương ứng một-một với một cạnh của đáy kia (chẳng hạn, đỉnh B tương ứng với cạnh $B'C'$, đỉnh C' tương ứng với cạnh BC).

Điều kiện 2) không đến nỗi hạn chế lắm như ta tưởng khi thoạt nhìn: thực tế, có nhiều cố thể về hình thức mà xét thì không thoả mãn điều kiện này, nhưng có thể xem như những trường hợp tới hạn (trường hợp suy biến) của các cố thể thoả mãn các điều kiện đòi hỏi và như vậy là nếu dựa trên những lập luận về tính liên tục hay những lập luận khác thích hợp, ta có thể mở rộng chứng minh tới các cố thể này.

Chứng minh trong bài tập 36 không bị ràng buộc bởi những hạn chế 1) và 2), song chứng minh này phải dựa trên phép tính tích phân.

33. $n = 0$ thì $L = M = N = 1$, $I = 2$; công thức Xim-xơn nghiệm đúng,

$n = 2m - 1$, tức là số lẻ; khi đó $L = N = 1$,

$M = I = 0$; công thức Xim-xơn nghiệm đúng,

$n = 2m - 1$ tức là một số chẵn; khi đó $L = N = 1$, $M = 0$.

$I = \dfrac{2}{n+1}$; công thức Xim-xơn đúngvới $n = 2$ và không đúng với mọi số chẵn dương nào khác.

34. Trường hợp đa thức $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ có thể coi như sự chồng các trường hợp riêng $n = 0, 1, 2, 3$ trong bài tập 33.

35. Đặt $x = a + \dfrac{h(t+1)}{2}$ sẽ biến đổi khoảng $a \le x \le a + b$ thành khoảng $-1 \le t \le 1$ và biến đổi đa thức tuỳ ý đối với x có bậc ≤ 3 thành một đa thức cùng bậc đối với t.

36. Ta dùng hệ toạ độ vuông góc x, y, z và đặt hình tựa lăng trụ sao cho đáy dưới của nó nằm trong mặt phẳng $z = 0$ và đáy trên nằm trong mặt phẳng $z = h$. Thể tích hình tựa lăng trụ được biểu diễn bằng tích phân

$$V = \int_0^h Q(z)dz, \qquad (1)$$

trong đó $Q(z)$ là diện tích thiết diện hình tựa lăng trụ do mặt phẳng song song với đáy dưới và cách nó một khoảng là t tạo ra.

Trong trường hợp hình tựa lăng trụ có n cạnh bên, thiết diện này là một đa giác có n cạnh; nếu cho trước các cạnh bên của hình tựa lăng trụ bằng hệ phương trình

$$x_i = a_i z + c_i,\ y_i = b_i z + d_i, \qquad (2)$$

thì diện tích thiết diện sẽ biểu diễn bằng công thức

$$Q(z) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i + 1 - x_{i+1} y_i) \qquad (3)$$

(cũng dể hiểu là khi đó cạnh thứ $n + 1$ được coi là trùng với cạnh thứ nhất, tức là $a_{n+1} = a_1, b_{n+1} = b_1, \ldots, y_{n+1} = y_i$).

Các đẳng thức (2) và (3) chứng tỏ rằng Q(z) *là một đa thức bậc* ≤ 2 *của* z; thành thử, nếu để ý đến bài tập 35 thì có thể áp dụng quy tắc Xim-xơn xác lập được trong bài tập 33 vào tích phân (1); và bởi vì hiển nhiên rằng các biểu thức

$$Q(0) = L,\ Q\left(\frac{h}{2}\right) = M,\ Q(h) = N.$$

theo thứ tự là diện tích đáy dưới, diện tích thiết diện giữa và diện tích đáy trên, nên ta sẽ đi tới công thức thể tích hình tựa lăng trụ xác lập được trong bài tập 23.

CHƯƠNG 5

1. Ẩn là: V; dữ kiện là: a và h. Điều kiện là: thể tích tính lăng trụ tứ giác đều mà cạnh đáy là a và chiều cao là h thì bằng V.

2. Có thể coi hai số thực x và y là ẩn, nhưng cũng có thể coi một đại lượng gồm hai thành phần x và y là một ẩn *duy nhất*, đại lượng này ta có thể lí giải bằng hình học như một điểm trong mặt phẳng có tọa độ Đề-các (vuông góc) là x và y.

Điều kiện được nêu đầy đủ trong phương trình đưa ra: $x^2 + y^2 = 1$.

Còn dữ kiện thì ở đây có thể hoàn toàn không nói tới. (Ví thử ta biến đổi bài toán đi, thay số 1 trong vế phải của phương trình bằng số r^2 thì sẽ phải coi r như là dữ kiện).

Một nghiệm là: $x = 1$, $y= 0$; nghiệm kia là $x = \frac{3}{5}$; $y = -\frac{4}{5}$,... Có thể lí giải bằng hình học toàn bộ hệ thống các nghiệm như tập hợp tất cả các điểm trên đường tròn có bán kính là 1 và có tâm tại gốc toạ độ.

3. Không có nghiệm (tập hợp các nghiệm là một tập hợp rỗng).

4. Có tám nghiệm: (2, 3); (3, 2); (-2, 3); (-3, 2); (2, -3); (3, -2); (-2, -3); (-3, -2).

Tập hợp này gồm các điểm của một lưới số nguyên nằm trên đường tròn bán kính $\sqrt{13}$ với tâm ở gốc toạ độ. (Một điểm mà hai toạ độ đều là số nguyên gọi là *điểm của lưới số nguyên*. Cấu hình của tất cả các điểm này giữ một vai trò quan trọng trong lí thuyết số, trong môn tinh thể học,...).

5. Ta quy ước lí giải một ẩn ba thành phần (x, y, z) như một điểm trong không gian có toạ độ là x, y và z.

1) Tập hợp các nghiệm gồm những điểm trong một bát diện có tâm tại gốc tọa độ và có đỉnh là: (1, 0, 0); (-1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, -1, 0); (0, 0, 1); (0, 0, -1).

2) Tập hợp các nghiệm gồm những điểm trong và điểm biên của bát diện nói trên.

6. Các phát biểu trong đó nêu rõ các phần chính của các mệnh đề, là như sau:

Nếu a, b và c là các cạnh của một tam giác vuông và c là cạnh đối diện với góc vuông thì $c^2 = a^2 + b^2$.

7. Trước hết, cần phát biểu định lí theo cách khác, bằng cách thay điều khẳng định cùng một lúc hai mệnh đề bằng hình thức khẳng định thông thường, tức là bằng hình thức "nếu - thì"; trong đó tách biệt minh bạch điều kiện (giả thiết) và kết luận:

"Nếu n là một bình phương thì $d(n)$ là số lẻ";

"Nếu n không phải là một bình phương thì $d(n)$ là số chẵn";

Và dưới đây là một các phát biểu dùng đoản ngữ "khi và chỉ khi": "n là một bình phương khi và chỉ khi $d(n)$ là số lẻ".

16. Ta hãy bắt đầu từ trường hợp một đa giác lồi mà gác lại vấn đề về những biến đổi có thể nảy sinh khi biện luận trường hợp tổng quát.

1) Ta giả định trong đa giác của ta, cho trước độ dài của n - 1 đoạn thẳng nối đỉnh đã chọn với n - 1 đỉnh còn lại và cho trước n - 2 góc hợp thành bởi từng cặp đoạn thẳng kề nhau.

2) Ta phân đa giác thành n - 2 tam giác bằng n - 3 đường chéo xuất phát từ một đỉnh; tam giác này sẽ được xác định hoàn toàn (mỗi cái bởi ba cạnh của nó) nếu biết các cạnh của đa giác và độ dài của các đường chéo cắt nó ra.

3) Ta khảo sát lại một lần nữa các tam giác do các đường chéo xuất phát từ một đỉnh chia cắt đa giác tạo ra. Ta chuyển dần từ tam giác này qua tam giác khác theo cách sao cho mỗi tam giác (tam giác đầu tiên thì không tham gia vào việc tính toán) có một cạnh chung với tam giác trước. Ta giả định rằng tam giác đầu tiên được cho trước bằng ba dữ kiện độc lập bất kì nào đó, còn mỗi cái trong n - 3 tam giác còn lại thì cho trước bởi hai dữ kiện độc lập với nhau và độc lập với cạnh của tam giác trước.

4) Cho trước mỗi đỉnh trong n đỉnh của đa giác bởi hai toạ độ vuông góc, tức là sử dụng cả thảy $2n$ dữ kiện, chẳng những ta xác định được đa giác, mà còn xác định được cả vị trí của nó trong hệ toạ độ mà ở đây không cần phải chú ý tới. Một vị trí trong hệ toạ độ trên mặt phẳng phụ thuộc vào ba tham số, thành thử số các dữ kiện cần thiết sẽ là $2n - 3$.

17. Đáy được cho trước bởi $2n - 3$ dữ kiện (xem bài tập 16); để xác định đỉnh đối diện với đáy, chỉ cần cho trước ba toạ độ của nó trong hệ toạ độ mà trong đó mặt phẳng xOy trùng với đáy chóp, gốc toạ độ O trùng với một đỉnh (đã chọn) của đáy và trục Ox trùng với một cạnh (đã chọn) của đáy xuất phát từ đỉnh O; tổng số dữ kiện cần thiết là $2n$.

18. $2n$ dữ kiện (so sánh với bài tập 17).

19. Đa thức có dạng $f_0x_\nu^n + f_1x_\nu^{n-1} + ... + f_{n-1}x_\nu + f_n$ trong đó f_i là đa thức bậc j theo ν - 1 biến $x_1, x_2..., x_{\nu-1}$. Sử dụng kết quả bài tập 35, chương 3 và phương pháp quy nạp toán học, có thể chứng minh rằng số dữ kiện cần thiết (số hệ số của đa thức) bằng

$$C_{n+\nu}^{c} = C_{0+\nu-1}^{\nu-1} + C_{1+\nu-1}^{\nu-1} + ... + C_{n+\nu-1}^{\nu-1}.$$

CHƯƠNG 6

1. 1) 9 yêu cầu thuộc loại $r(x) = 0$,

2) 9 yêu cầu thuộc loại $r(x) = 0$,

3) 36 yêu cầu thuộc loại $r(x,y) = 0$,

4) 7 yêu cầu thuộc loại $r(x, y, z, w) = 0$, (chúng ta không để ý đến vấn đề: các yêu cầu này không phải là độc lập với nhau).

Cả thảy có 61 điều kiện.

2. Hãy giả thiết x có n thành phần: $x_1, x_2, ..., x_n$.

3. Ta đưa vào những ẩn mới: $y_1. y_2, y_3$. Đặt $x_1 = y_1.x_4 = y_3$, xem x_2, x_3 như những thành phần của y_2 và xem tổ hợp (thực hiện cùng một lúc các khoản điều kiện r_2) và r_3) như một khoản của điều kiện mới, ta sẽ thu được một hệ ”đệ quy” (với các kí hiệu tương ứng).

$s_1(y_1) = 0$,

$s_2(y_1, y_2) = 0$,

$s_3(y_1, y_2, y_3) = 0$.

4. Giả định y_1, có các thành phần là x_1, x_2, x_3 và y_2 có các thành phần là x_4, x_5, x_6; đặt $y_3 = x_7$, rồi kết hợp ba khoản điều kiện đầu r_1), r_2), r_3) thành một khoản s_1) và ba khoản sau r_4), r_5), r_6) thành một khoản s_2, cuối cùng ta sẽ được một hệ hệt như trong bài tập 3.

5. Kế hoạch, về cơ bản, không khác với kế hoạch xét trong mục nhỏ 2 §4.

6. Đó là một trường hợp riêng của hệ trong mục nhỏ 1^0§4 (so sánh với bài tập 22, chương 3).

7. Hai quỹ tích cho một đường thẳng (so sánh với mục nhỏ 5 §2). Thật vậy, tất cả các dây cung của đường tròn cho trước có độ dài bằng nhau sẽ tiếp xúc với một đường tròn đồng tâm với đường tròn cho trước (đường tròn này dựng không khó).

8. Ta lấy trên đường thẳng a một điểm A và trên đường thẳng b một điểm B sao cho chúng cách giao điểm của a và b cùng một khoảng là $\frac{l}{2}$. Ta dựng một đường tròn tiếp xúc với đường thẳng a tại A và với đường thẳng b tại B; vì mỗi điểm trong hai điểm này có thể chiếm hai vị trí, nên sẽ có bốn đường tròn nói trên. Một trong bốn đường tròn đó sẽ là đường tròn ngoại tiếp của tam giác tạo thành bởi các đường thẳng a, b và x; do đó, đường thẳng x phải tiếp xúc với một trong bốn đường tròn đó. Ở đây ta có hai quỹ tích cho đường thẳng x (so sánh với mục nhỏ 5 §2 và bài tập 7).

9. Từ cần tìm là *HEARSAY*. Trong tiếng Anh "hearsay" có nghĩa là tin đồn: tin đồn thì không phải là chứng minh.

11. 1) Trước hết, tìm "hằng số" c đặc trưng cho hình vuông kì ảo. Một mặt, tổng của tất cả chín ẩn x_{ik} bằng $1 + 2 + 3 + \ldots + 9 = 45$;

Mặt khác, tổng này hình thành do cộng các số theo từng dòng (tổng các số trong mỗi dòng bằng c) rồi cộng gộp kết quả đó lại. Bởi vậy $45 = 3c$, do đó: $c = 15$.

2) Cộng các phần tử của ba dòng và hai đường chéo; tổng của chúng sẽ bằng $5c$. Từ tổng này, ta bớt đi các phần tử thuộc bốn dòng và cột "ngoài rìa" (tức là không chứa số trung tâm x_{22}); tổng của tất cả các phần tử đó bằng $4c$. Thành thử:

$3x_{22} = 5c - 4c = 15$,

(tại sao?) - và do đó $x_{22} = 5$.

3) Muốn điền vào tất cả các dòng và ngoài rìa (hay "biên") ta viết tất cả các trường hợp mà số 15 có thể viết dưới dạng tổng của ba số khác nhau và khác số 5 (= x_{22}), tức là các số 1; 2; 3; 4; 6; 7; 8; 9. Sau nhiều lần thử ta được

$15 = 1 + 6 + 8 = 2 + 6 + 7 = 2 + 4 + 9 = 3 + 4 + 8$.

4) Những số nào *chỉ gặp một lần* trong tất cả bốn biểu thức trên được in chữ đậm để cách biệt rõ; cần phải xếp các số này vào ô giữa dòng tương ứng (hay cột tương ứng). Các số còn lại (in chữ thường) *mỗi số gặp hai lần*; những số này cần xếp vào các góc của hình vuông kì ảo.

5) Ta hãy bắt đầu từ một số bất kì nào in đậm (chẳng hạn số 1) và kí hiệu đó là x_{12}. Một trong hai số in chữ thường; lấy trong cùng một dòng với số 1 (tức là 6 hay 8) ta sẽ coi là x_{11}. Lần đầu, ta phải lựa chọn một trong bốn khả năng, lần thứ hai, ta lựa chọn một trong hai khả năng; sau đó, ta không được tự do lựa chọn nữa: lần lượt sử dụng bốn biểu thức của số 15 viết trong mục nhỏ 3, ta không thể tránh không đi theo một con đường duy nhất có thể. Dưới đây là một trong những hình vuông mà ta có thể tạo được.

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Tất cả 4. 2 = 8 hình vuông tìm được bằng cách trên, theo một ý nghĩa nhất định, đều "bằng nhau", tức là có thể suy ra từ bất kì một hình vuông nào đã tìm được bằng những phép quay và phản xạ (đối xứng). Hình vuông mà ta lập; giúp minh hoạ cho số 61 trong lời giải bài tập 1:

12. 1) Nếu chữ số đầu tiên của số cần tìm lớn hơn 1, thì nhân số này với 9, số chữ số sẽ tăng lên. Cho nên, số cần tìm phải có dạng $\overline{1abc}$.

2) Vì $\overline{1abc}.9 = \overline{9xyz}$; nên số cần tìm phải có dạng $\overline{1ab9}$.

3) Như vậy, ta có: $(10^3 + 10^2a + 10b + 9).9 = 9.10^3 + 10^2b + 10a + 1$,

$89a + 8 = b$,

Do đó $a = 0$, $b = 8$ và số cần tìm là(*): $1089 = 33^2$.

13. 1) Vì $\overline{ab}\,.\,\overline{ba}$ là một số ba chữ số, nếu $a.b < 10$, Giả sử $a < b$; khi đó, ta chỉ còn lại mười kiểu $a = 1, 2 \le b \le 9, a = 2, b = 3$ hay 4.

2) $(10a + b)(10b + a) = 100c + 10d + c$.

$10(a^2 + b^2 - d) = 101(c - ab)$.

Từ đó, suy ra, $a^2 + b^2 - d$ chia hết cho 101; nhưng $-9 < a^2 + b^2 - d \le 82$ nên $a^2 + b^2 - d = 0$.

3) $a^2 + b^2 = d \le 9$. Suy ra $b < 3$, thành thử $a = 1, b = 2$ và bấy giờ $c = 2, d = 5$.

14. 1 (Xten-pho, 1949). Có thể hiểu bài toán như sau: tìm một số nguyên dương x, mà bình phương của nó được viết ra (trong hệ đếm thập phân) toàn bằng những chữ số 1 (nói chính xác hơn, hãy chứng minh rằng bài toán này không giải được!).

(*) Thành thử bài toán không thay đổi nội dung, nếu đề toán như sau: tìm một số có bốn chữ *là một số chính phương* sao cho ...; khi giải bài toán mới này, phần điều kiện in chữ nghiêng có thể để lại đến cuối cùng mới dùng và thực tế chỉ cần lưu ý đến điều kiện này trong quá trình thử lại kết quả đã thu được mà chưa cần dùng đến điều kiện ấy.

1) *Ta chỉ giữ lại một phần* (một phần nhỏ) *của điều kiện:* chữ số sau cùng của x^2 là 1. Vì chữ số sau cùng của số x^2 chỉ phụ thuộc vào chữ số sau cùng của chữ số x, nên ta chỉ cần xét các số một chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 là đủ, bình phương của chúng theo thứ tự, bằng 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81(cần nhận xét rằng số x^2 và số $(10 - x)^2$ có chữ số sau cùng như nhau). Vậy chỉ có các số tận cùng bằng 1 hay 9 mới thích hợp.

2) *Ta chỉ giữ lại một phần* (một phần đã lớn hơn trước ít nhiều) *của điều kiện:* hai chữ số sau cùng của số x^2 là 11. Bây giờ ta chỉ cần xét những số hai chữ số, trong mỗi cặp số x và $100 - x$ thì xét một, tức là theo mục nhỏ 1^0, ta chỉ phải xét cả thảy 10 số là đủ: 01, 11, 21, 91. Trong các bình phương của những số này, không có cái nào tận cùng bằng 11 cả. Điều đó chứng minh cho điều kiện khẳng định của chúng ta.

Kết luận: có khi ta nên biến đổi "bài toán chứng minh" thành "bài toán tìm tòi" thì có lợi.

15. Dù có vẻ nghịch lí đấy, song ta hãy cố tìm ra một cặp tam giác như thế.

1) Trong năm yếu tố đã nêu, không thể có đồng thời cả ba cạnh, nếu không thì hai tam giác sẽ phải bằng nhau và tất cả sáu yếu tố của chúng đều đồng nhất từng đôi một.

2) Ta chỉ còn lại giả thiết rằng hai tam giác cần tìm có hai cạnh và ba góc bằng nhau từng đôi một. Nhưng nếu ba góc của một tam giác này bằng ba góc của một tam giác khác thì hai tam giác đó *đồng dạng* với nhau.

3) Giả sử a, b, c là các cạnh của tam giác thứ nhất và b, c, d là các cạnh của tam giác thứ hai; nếu trong các tam giác đồng dạng này, a, b, c và b, c, d là những cạnh tương ứng, thì ta phải có hệ thức $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$ tức là các cạnh a, b, c và d phải hợp thành một *cấp số nhân*. Nhưng đó là một điều hoàn toàn có thể xảy ra và đây là một ví dụ: các số a, b, c, d theo thứ tự bằng 8, 12, 18, 27.

Ta nhận xét rằng $8 + 12 > 18$ và tam giác có các cạnh 8, 12, 18 và tam giác có các cạnh 12, 18, 27 đồng dạng với nhau vì các cạnh của chúng tỉ lệ: như vậy là góc của tam giác này bằng ba góc của tam giác kia.

16. 1) Ta hãy tìm ba số nguyên x, y, z sao cho $x + y + z = 0$, $1 \leq x < y < z$.

Sau một số lần thử, ta nhận thấy chỉ có ba lời giải (ba cách chia 9 đôla thành ba phần không đều nhau): $9 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 2 + 3 + 4$.

2) Ta xếp ba hình đó thành một hình vuông sao cho tổng các chữ số trong mỗi cột đều bằng 9. Về thực chất mà nói (từ là với độ chính xác tới hoán vị giữa các dòng và cột), chỉ có duy nhất một cách thực hiện việc này (chúng ta đã chọn cách viết đối xứng)

6	2	1
2	4	3
1	3	5

3) Bây giờ ta mới xét đến các khoản "thứ yếu" còn lại của điều kiện. Vì số lớn nhất trong hình vuông của ta là số 6, nên dòng thứ nhất là thuộc về Actơ, còn cột thứ nhất ứng với "khoản kem". Có một số duy nhất trong hình vuông của ta lớn gấp đôi một số cũng

thuộc dòng đó nằm ở chỗ giao nhau với cột thứ nhất, đó là số 4; thành thử dòng thứ hai thuộc về Bili và cột thứ hai ứng với khoản bánh mì xúc xích. Cuối cùng, số tiền (đôla) mà Cơrít bỏ ra mua nước quả nằm ở chỗ giao nhau giữa dòng cuối với cột cuối cùng, tức là 5 đôla.

17. 1) Vợ mua x tặng phẩm, mỗi cái giá x xu; chồng mua y tặng phẩm, mỗi cái giá y xu. Điều kiện đòi hỏi rằng $x^2 - y^2 = 75$.

2) Số 75 = 3.5.5 có sáu ước số cả thảy $(x - y)(x + y) = 1.75 = 3.25 = 5.15$

và do đó ta có cả thảy ba khả năng:

$x - y = 1$	$x - y = 3$	$x - y = 5$
hay	hay	hay
$x + y = 75$	$x + y = 25$	$x + y = 15$

kết quả là ta được bảng dưới đây:

Vợ	Chồng
38	37
14	11
10	5

3) Bây giờ ta mới xét đến các điều kiện "thứ yếu" còn lại. Cuối cùng, ta được một lời giải duy nhất

Annơ	38	37	Bili B-rao
	14	11	Giô Giôn-xơ
Betty	10	5	

Vậy bà Mêry phải là vợ của ông Giôn-xơ.

18. Ngay từ đầu, ta đã thấy hiển nhiên là số trường hợp (kiểu) có thể cũng hạn chế thôi (4! = 24). Tuy nhiên, nếu bạn tỏ ra là người có sáng kiến thì bạn cũng chẳng cần phải tính hết tất cả các trường hợp đó là gì cho mệt.

1) Giả sử a, b, c, d là số cô-ca cô-la mà mỗi bà uống; bà X-mít, bà B-rao, bà Hoai-tơ và G-rin. Ta có :

$a + b + c + d = 14,$

$a + 2b + 3c + 4d = 30,$

do đó

$b + 2c + 3d = 16.$

2) Từ đẳng thức cuối cùng vừa viết trên; ta thấy rằng b và d hoặc cùng là chẵn hoặc cùng là lẻ. Cho nên, cần phải phân tích cả thảy bốn trường hợp:

b	d	$c = 8 - \dfrac{b + 3d}{2}$
3	5	-1

5	3	1
2	4	1
4	2	3

Trong đó, chỉ có trường hợp cuối cùng là thích hợp. Vậy

$a = 2, \quad c = 3, \quad b = 4, \quad a = 5$

và do đó: Bà Annơ là vợ ông G-rin, bà Betty là vợ ông Hoai-tơ, bà Hê-rôn là vợ ông B-rao và bà Đôrôty là vợ ông X-mít.

19. (Xten-pho, 1965). Ta ngầm hiểu số tuổi là một số nguyên. Dưới đây, liệt kê tất các cả trường hợp phân tích số 72 thành ba thừa số nguyên dương; sau mỗi phân tích, ta viết thêm tổng của các thừa số.

1.1.72	74	2.2.18	22
1.2.36	39	2.3.12	17
1.3.24	28	2.4.9	15
1.4.18	23	2.6.6	14
1.6.12	19	3.3.8	14
1.8.9	18	3.4.6	13

Ở đây, chỉ có mỗi một tổng là gặp hơn một lần, ta viết tách biệt ra bằng chữ đậm. Dựa vào câu nói của ông giáo đả động đến (một!) cậu con trai *lớn nhất*, ta có thể phân biệt được hai trường hợp này, nếu không thì đó là trường hợp tương đương. Vậy các con ông giáo, một em lên tám, hai em lên ba.

20. Để giải các câu đố, nhiều khi chia nhỏ điều kiện thành nhiều khoản rất có lợi. Bạn đọc có thể tìm thấy những ví dụ thích hợp trong các tuyển tập toán đố.

22. 2) m.4 §2, $l = 5$; 3) bài tập 6, $n = 4$; 4) m.1, §4; 5) m.2, §4.

24. Trong hệ ba phương trình với ba ẩn đang xét, các giá trị của x, y và z giữ vai trò hệt như nhau; hệ này là một hệ *đối xứng* theo nghĩa là sự hoán vị vòng quanh các ẩn, tuy có thể làm thay đổi thứ tự viết các phương trình trong hệ, nhưng không hề làm thay đổi bản thân hệ đó. Từ đó suy ra rằng nếu x, y, z được xác định một cách đơn trị từ hệ này thì chúng phải *bằng nhau*: $x = y = z$; giả định như thế, ta sẽ được ngay: $6x = 30$, $x = y = z = 5$.

Còn phải chứng minh các ẩn được xác định một cách đơn trị. Có thể làm được việc này bằng cách sử dụng một phương pháp thông thường nào đó giải hệ phương trình tuyến tính.

25. $y + z = a,$

$x + z = b,$

$x + y = c,$

Mọi hoán vị các ẩn x, y và z đều không làm thay đổi dạng các biểu thức ở các vế trái. Ta đặt $x + y + z = s$ (tổng này cũng không đổi dạng khi hoán vị các ẩn x, y và z. Cộng ba

phương trình lại ta được ngay $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ và như vậy, hệ được đưa về ba phương trình mà mỗi cái chỉ chứa một ẩn: $s - x = a$, $s - y = b$, $s - z = c$.

Hệ của chúng ta xét toàn bộ (chứ không phải chỉ là tập hợp các biểu thức ở vế trái) là một hệ đối xứng đối với các cặp (x, a), (y, b), (z, c).

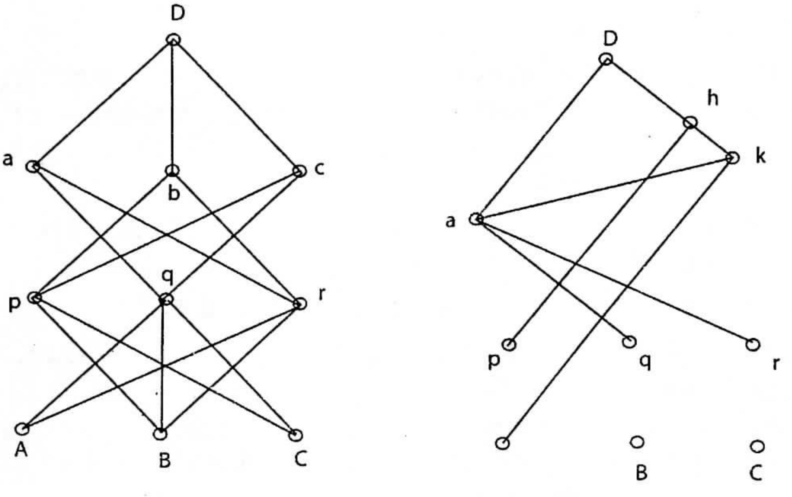
26. (Xten-pho, 1958). Đặt $x + y + z + u = s$ rồi so sánh với bài tập 25.

Các bài 10, 21, 23 và 27 không có lời giải.

CHƯƠNG 7

1. Các đoạn thẳng trên hình 7.3a tượng trưng cho hệ thức $V = Q + 4T + 4P$. Rõ ràng là $Q = a^2h$, $T = \dfrac{h}{2}.\dfrac{b-a}{2}.a$, $P = \dfrac{b}{3}\left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2$.

Ta hãy thêm vào hình 7.3b những liên hệ thoả mãn các hệ thức này và sẽ thấy chúng dẫn đến một biểu thức của V giống hệt như cách xử lí trình bày trong §2.



a) b)

Hình 7.9

2. Xem hình 7.9, *a* và *b*; nó phản ánh trước bức tranh tưởng tượng này ra trong đầu người giải bài toán ngay trước khi tiến hành bước quyết định cuối cùng mô tả ở chương 2.

3. Xem bài tập 99, chương 2. Các điểm trên hình 7.4 biểu diễn các đại lượng

P_6

p_6

P_{12}

p_{12}

P_{24}

p_{24}

P_{48}

p_{48}

P_{96}

p_{96}

Các bài 4, 5, 6 không có lời giải.

CHƯƠNG 8

3. (Xten-pho, 1956). Như thấy trên hình 8.1e

$$AB' = \frac{b}{\sqrt{3}},\ AC' = \frac{C}{3\sqrt{3}}.$$

Áp dụng định lí côsin vào tam giác *B'AC'*, ta sẽ được

$$3x^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right).$$

Để biểu diễn *bc*cosα, *ta áp dụng định lí côsin vào tam giác ABC đặt bc*sinα = 2*S*, trong đó S là diện tích tam giác *ABC*, ta sẽ được công thức:

$$6x^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}\,S$$

qua đó ta thấy *x* được biểu diễn theo *a, b, c* một cách đối xứng.

4. Các thiết diện đó như sau:

1) một hình chữ nhật, diện tích $2yz = \frac{2hz\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$;

2) một tam giác vuông, diện tích $\frac{xz}{2} = \frac{h(a^2 - y^2)}{2a}$;

3) một hình viên phân.

Ở đây, kế hoạch 2, tốt hơn (vì hàm theo y là hữu tỉ); thể tích cần tìm bằng

$$\frac{1}{2}\int_{-a}^{a} xzdy = \frac{2a^2h}{3}.$$

Các bài 1, 2, 5, 6, 7 và 8 không cần có giải thích bổ sung.

CHƯƠNG 9

5. Xem §4, chương 4. Định lí *a* phát biểu trong mục nhỏ 1, §4 và minh hoạ trên hình 4.4 được chứng minh nhờ một định lí *B* yếu hơn phát biểu trong mục nhỏ 2 §4 và minh hoạ trên hình 4.3.

6. Các bài toán *A* và *B* tương đương với nhau. Chuyển từ *A* qua *B* sẽ tạo ra một ưu điểm nhất định, bởi vì làm như thế ta sẽ phải xét những số nhỏ hơn. Áp dụng cách chuyển này một số lần ta sẽ lần lượt tìm được các cặp số: (437; 323), (323; 114), (209; 114), (114; 95), (95; 19), (76; 19); (57; 19), (38; 19), (19; 19).

Như vậy. tập hợp các ước số chung của hai số 437 và 323 gồm các số 1 và 19, tức là số 19, số này là ước số chung *lớn nhất*. Quy trình mà ta tìm hiểu trong bài tập này cũng có thể áp dụng trọng trường hợp tổng quát, cho nên nó có ý nghĩa quan trọng, người ta gọi quy trình này là *thuật toán Ơ-clít*.

7. 1) Với một số điều kiện quan trọng và thường hay gặp, thì *B* rộng hơn *A* (dưới đây là một trường hợp đơn giản; trong khoảng đóng $a \le x \le b$, xác định một hàm liên tục và khả vi $f(x)$; ngoài ra, hàm này không đạt cực đại khi $x = a$ cũng như khi $x = b$).

2) Bài toán tìm nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ trong đa số trường hợp dễ hơn và quen hơn; ngoài ra, chúng ta đã biết các phương pháp khử nghiệm của đạo hàm không thoả mãn cực đại của đạo hàm $f(x)$.

8. 1) Định lí *B* mạnh hơn; từ định lí này có thể suy ra ngay định lí *A*.

2) Chứng minh *B* dễ hơn chứng minh *A*, vì so với *A*, *B* chứa thêm một chi tiết phụ quan trọng từ đó ta có thể xuất phát để nghiên cứu, trong khi nếu như ta chỉ có điều khẳng định *A* kém đầy đủ thì thoạt tiên ta sẽ phải đi tìm cái chi tiết ấy hoặc một sự kiện nào tương đương với chi tiết ấy; định lí *A*. Vì *B* chứa nhiều chi tiết hơn, trường hợp này là trường hợp điển hình (so sánh với Giải một bài toán như thế nào? Phép quy nạp và phép quy nạp toán học, nhất là mục nhỏ 7).

3) Ta kí hiệu một đỉnh nào đó của tam giác là *A* và trung điểm cạnh đối diện là *M*; trước hết hãy chứng minh $\Delta MGO \sim \Delta AGE$, từ đó sẽ suy ra $MO \parallel AE$.

9. 1) *A* là một bài toán chứng minh, *B* là một bài toán tìm tòi, *B* có vẻ hấp dẫn hơn *A*; ngay từ đầu đã có thể nhìn trước thấy rằng lời giải toàn phần bài toán *B* sẽ hoặc là xác nhận hoặc là bác bỏ điều khẳng định trong bài toán *A*.

2) *A* là một bài toán về giới hạn, *B* là một bài toán về bất đẳng thức đại số; cho nên bài toán *B* có tính chất sơ cấp hơn.

3) Ta bỏ qua trường hợp dễ hơn, là trường hợp $\varepsilon \ge 1$. Còn trong trường hợp $\varepsilon < 1$, ta sẽ đi tới một chuỗi những bất đẳng thức tương đương nhau:

$$\sqrt{x+1} < \varepsilon + \sqrt{x}, \quad 1 < \varepsilon^2 + 2\varepsilon\sqrt{x}, \quad \frac{\left(1-\varepsilon^2\right)^2}{2\varepsilon} < x.$$

Thành thử, bắt đầu từ một giá trị nào đó của x trở đi, hiệu $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ sẽ nhỏ hơn một đại lượng dương tuỳ ý (nhỏ bao nhiêu cũng được!) ε. Điều khẳng định này chứng minh A.

10. 1) Hai mệnh đề nêu trong các bài toán A và B tương đương nhau (mệnh đề này ngược hẳn lại mệnh đề kia); cho nên, bản thân hai bài toán A và B cũng tương đương nhau.

2) Điều khẳng định "n là một hợp số" nói lên rằng tồn tại hai số nguyên a và b sao cho $n = ab$, $a > 1$, $b > 1$. Điều khẳng định "n là một số nguyên tố" là sự phủ định điều khẳng định "n là tập hợp số" (Ở đây, có thể bỏ qua trường hợp $n = 1$) và điều khẳng định "âm" này cung cấp cho ta ít "chỗ dựa hơn". Thành thử, B tỏ ra hấp dẫn hơn A.

3) Nếu $n = ab$ thì $2^n - 1 = (2a)^b - 1$ chia hết cho $2^a - 1$.

11. Giả sử $a_{3m-2} = 2m^{-1/3}$, $a_{3m-1} = a_{3m} = -m^{-1/3}$, trong đó $m = 1, 2, 3$.

12. Trước hết đặt min $(a_n\ b_n) = \dfrac{1}{n^2}$.

(Ta cũng có thể lựa chọn, với kết quả tốt đẹp như thế, một chuỗi hội tụ khác có số hạng dương giảm dần).

$$(1)+\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{49}+\frac{1}{64}+\ldots+\frac{1}{42^2}\right)+\left(\frac{1}{42^2}+\ldots\right.$$

$$(1)+(1)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}\right)+\left(\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\ldots+\frac{1}{36}\right)+\left(\frac{1}{43^2}+\ldots\right.$$

lập được từ các "đoạn chuỗi" tương ứng với nhau, nêu ra trong các ngoặc. Trong một trong các đoạn đó, mỗi số hạng bằng cực tiểu đã chọn trước của cặp số a_n, b_n; trong đoạn tương ứng với nó của chuỗi kia, tất cả các số hạng đều bằng nhau và trùng với số hạng cuối cùng của đoạn trước cũng thuộc chuỗi này và tổng tất cả các số hạng đó bằng 1. Các đoạn thuộc hai kiểu này xen kẽ nhau trong cả hai chuỗi.

Các chuỗi của ta vẫn chưa thoả mãn hoàn toàn điều kiện đặt ra: các số hạng của chúng giảm dần theo nghĩa không chặt chẽ (theo nghĩa "≥") chứ không phải theo nghĩa chặt chẽ (theo nghĩa ">"). Song, có thể dễ dàng loại trừ tình trạng này bằng cách sau đây: từ tất cả các số hạng của đoạn chuỗi gồm những số như nhau, liên tiếp rút bớt đi những số hạng của một cấp số cộng có số hạng đầu và công sai đủ nhỏ và có tổng số nhỏ hơn 1/2.

13. Nếu $p_1, p_2, \ldots, p_l$ là những số nguyên tố và $n = p_n^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_l^{a_l}$ thì

$\tau(n) = (a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_l+1)$.

14. Bài tập 50 thuộc chương 1 và m.1^0, §3, chương 1; các m.2 và m.3 §5, chương 2; §1 và §2 chương 2.

16. *Vì sao?* Chúng tôi đưa thêm hai bài tập nữa, tương tự như các bài tập 6 - 10.

I - So sánh hai bài toán

A - Tính $\sqrt[4]{100}$;

B - Tính $\sqrt{100}$.

G II = Giả sử *f(x)* và *g(x)* là hai hàm cho trước. Hãy so sánh hai bài toán.

A - Chứng minh: $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$;

B - Chứng minh: $f(x) \geq g(x)$ nếu $a \leq x \leq b$.

Do đâu? Các bài toán phụ tựa hồ như nảy ra một cách hết sức tự nhiên dưới dạng tường minh hay dưới dạng tàng ẩn từ một trong bốn nguồn đã nêu ở trên. Một ví dụ rất hay, minh hoạ cho điều khẳng định này là phép khái quát hoá, cá biệt hoá và lấy tương tự áp dụng kết hợp để giải bài tập 84 trong chương 3 (xem phần bài tập và cuốn "Giải một bài toán như thế nào?" bài tập 20).

Những nhận xét bổ sung 1, 2, 3, 4 và 15 không cần làm sáng tỏ.

CHƯƠNG 11

2. Hình 1.1a - 1.1e; hình 6.4a, 6.4e và hình không hoàn chỉnh 6.5.

3. Xem hai ví dụ đã nhắc tới trong lời giải bài tập 2: ở ví dụ thứ nhất có thể nói tới thời điểm phát sinh hình 1.1e trong đầu của bạn và ví dụ thứ hai - nói tới thời điểm phát sinh hình 6.4c.

4. Bài tập 2, chương 10.

5. Sự nhận biết các nghiệm đa thức phải tìm *f(x)* ở các hoành độ x_1, x_2, x_n... trên hình 4.1 có thể có vai trò như thế.

6. Chuyển từ hình 11.2 sang hình 11.4. Hay trong cuốn "Toán học và những suy luận có lí" chuyển từ hình 16.2 sang hình 16.3.

Những nhận xét bổ sung 1, 7, 8, 9, 10, 11 không cần làm sáng tỏ.

CHƯƠNG 12

3. (Xten-pho 1952). Điều kiện (tiền đề) là gì?

Đây là điều kiện: $a < \frac{b+c}{2}$.

Kết luận là gì? Đây là kết luận: $\alpha < \frac{\beta+\gamma}{2}$ tương đương với bất đẳng thức $2\alpha < \pi - \alpha$

hay bất đẳng thức $\alpha < \frac{\pi}{3}$.

Những trí thức phụ cần thiết $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

Như vậy $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} > \dfrac{b^2 + c^2 - \dfrac{(b+c)^2}{4}}{2bc}$

$= \dfrac{3(b^2 + c^2)}{8bc} - \dfrac{1}{4} \geq \dfrac{6bc}{8bc} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3}$ điều này ta đã chức minh mệnh đề nêu trong bài.

5. 1) Điểm P thuộc hai đoạn thẳng đã cho; sau lúc dựng…

Điểm P thuộc đường thẳng và đường tròn đã cho; sau lúc dựng…

Điểm P thuộc hai đường tròn đã cho; sau lúc dựng…

2) Tam giác ABC: đã biết hai cạnh AC và BC và góc giữa chúng…

Tam giác ABC: đã biết cạnh BC và hai góc…

Tam giác vuông ABC: đã cho các cạnh AC và BC…

3) Cạnh và đường cao của tam giác ABC đã cho…

Đã biết ba cạnh của tam giác ABC.

(Có thể lấy nhóm dữ kiện bất kì nào đã nêu ở điểm 2).

4) Ta đã biết diện tích tam giác ABC (là đáy của hình tứ diện) và đường cao hình tứ diện hạ từ đỉnh D….

Đã biết độ dài các cạnh AB và CD của hình tứ diện và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD… (so sánh với nhận xét bổ sung chương 4).

6. 1) Nếu $\Delta ABC = \Delta EFG$…

Nếu hình $ABFE$ là hình bình hành…

2) Nếu $\Delta ABC \sim \Delta EFG$…

Nếu ABC và EFG là những góc nhọn có cạnh song song và vuông góc….

Nếu ABC và EFG là những góc nội tiếp trong đường tròn cùng trương một dây cung hay vào hai dây cung bằng nhau… (xem bài tập 8 chương 8).

3) Nếu hình $ABCD$… đồng dạng với hình $EFGH$… (ở đây các điểm đã nêu ra theo trình tự tương ứng của chúng với nhau).

Nếu $AE \parallel BF \parallel CG \parallel DH$; ngoài các điểm A, B, C, D cũng nằm trên một đường thẳng và các điểm E, F, G, H, cùng nằm trên một đường khác… (định lí này có thể diễn đạt dưới hình thức thuận lợi hơn như sau: "Các cạnh của góc được các đường thẳng cắt thành những đoạn tỉ lệ").

4) Nếu trong tam giác ABC, chúng ta có $\widehat{C} < \widehat{B}$ ...

7. Đây là một bài toán rất hấp dẫn: tìm diện tích S của một tứ giác, đồng thời nội tiếp và ngoại tiếp có các cạnh a, b, c và d đã biết.

Cách 1200 năm ở Ấn Độ cũng đã xuất hiện bài toán cùng loại rất gần bài toán trên. Nếu bạn có dịp nào đó được nghe nói về bài toán này, thì đây là cơ hội tốt để hồi tưởng lại bài đó, bạn hãy kiên nhẫn nghĩ lại. *Bạn có biết bài toán nào cùng loại không? Bạn có biết bài toán nào có các ẩn cùng loại không?*

Thật vậy, bài toán gốc mà tôi muốn dẫn ra, cùng ẩn và những dữ kiện như bài đang xét, ngoài ra, nó cũng chứa một nửa những điều kiện quan trọng nhất của bài. Dưới đây là bài toán: Tìm diện tích tứ giác nội tiếp a, b, c và d đã cho. Lời giải bài toán như sau ("Toán học và những suy luận có lí", bài tập 41).

$$S^2 = (p - a)(p - b)(p - c)(p - d)$$

trong đó $2p = a + b + c + d$.

Với các hệ thức đã biết trên đây ta chỉ cần biến đổi như sau là đủ: nếu tứ giác nội tiếp, a đối diện với c, b đối diện với d thì $a + b = c + d = p$.

8. Xem bài tập 47 chương 1, m.2 §5, chương 2, bài tập 10 chương 2, bài tập 13 chương 2, bài tập 51 chương 2, m.3, §6, chương 14 và cả cuốn " Giải một bài toán như thế nào" và " Toán học và những suy luận có lí". Còn rất nhiều ví dụ khác.

9. Trung tuyến kẻ từ đỉnh A của tam giác với cạnh BC đi qua trung điểm của bất kì đoạn thẳng nào song song với BC và nằm trong tam giác.

(Những thiết diện của tứ giác là các hình bình hành. Mặt phẳng đi qua một cạnh hình tứ diện và điểm chính giữa cạnh đối, cắt hình tứ diện theo một tam giác, có thể giúp ta chứng minh định lí về hình tứ diện).

10. Trung tuyến của tam giác chia diện tích tam giác thành hai phần bằng nhau (trường hợp tứ diện, định lí được diễn đạt, phải xuất phát từ nguyên lí Cạ-va-liê-ri, vì mặt phẳng khảo sát chia đôi mọi thiết diện có trong bài tập 9).

11. Phân giác trong của tam giác chia cạnh đối thành các đoạn thẳng tỉ lệ với cạnh kề.

12. Đặt $b + c - a = 2A$, $c + a - b = 2B$, $a + b - c = 2C$;

từ đó $$\frac{1}{x^2} = \frac{A}{xyz},\ \frac{1}{y^2} = \frac{B}{xyz},\ \frac{1}{z^2} = \frac{C}{xyz}.$$

Nhân ba đẳng thức này với nhau, ta có: $xyz = AC$,

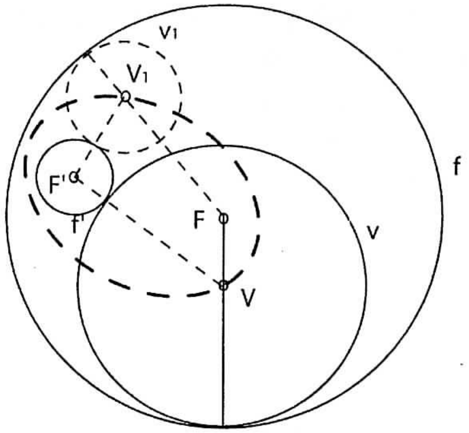
và do đó: $x^2 = BC$, $y^2 = CA$, $z^2 = AB$.

Để nghiên cứu câu hỏi được đầy đủ, ta chỉ cần lập luận cho trường hợp một hay một vài đại lượng trong các đại lượng chưa biết x, y, z bằng không.

13. Trong định nghĩa thông thường của Elíp có các tiêu điểm. Việc nghiên cứu định nghĩa này có thể dẫn tới câu hỏi: "Các tiêu điểm có vị trí ở đâu?" và rút cuộc có thể sẽ đề cập đến mệnh đề mạnh hơn, chứng minh dễ hơn: với những giả thiết cho trước đối với f, f' và v, Elíp có các tiêu điểm F và F' là quỹ tích của các tâm V. Thực ra, định nghĩa này cũng phù hợp với định nghĩa Elíp: điều này thể hiện rất rõ trên hình vẽ (hình 12.1a).

$$FV + F'V = r + r'$$

trong đó r, r' là bán kính các đường tròn f và f'.



Hình 12.1a. Elíp này như thế nào?

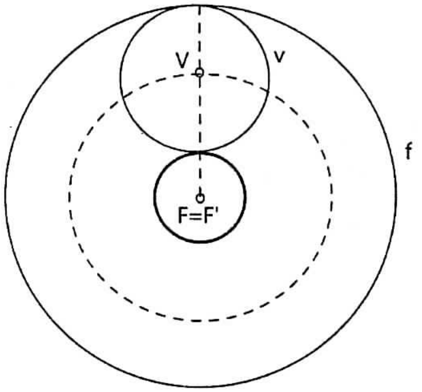
14. 1) Đường tròn bán kính $\frac{r+r'}{2}$ đồng tâm với các đường tròn f và f' (hình 12.1b).

2) Đường Parabol tiêu điểm F' và đường chuẩn f_1 // f (hình 12.1c).

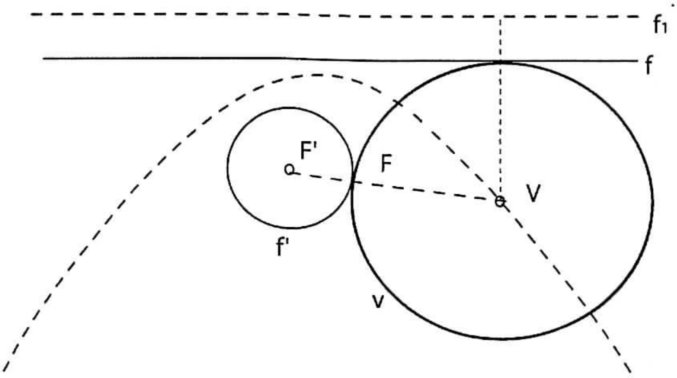
3) Đường Hypebol tiêu điểm F và F'(hình 12.1d).

4) Đường vuông góc với đoạn thẳng FF' tại trung điểm (hình 12.1e).

Đây là một số "quả táo" nữa nhưng chắc có lẽ đã kém ngọt ngào.



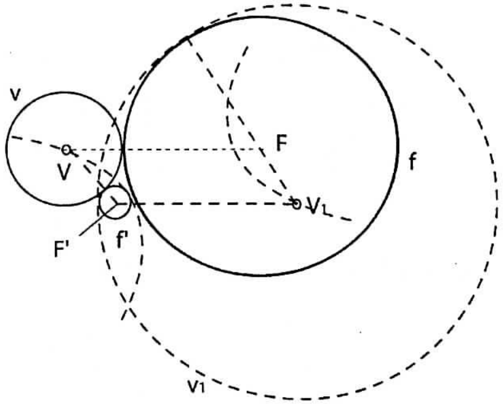
Hình 12.1b. Các tiêu điểm của Elíp trùng nhau



Hình 12.1c. Trường hợp giới hạn của Elíp

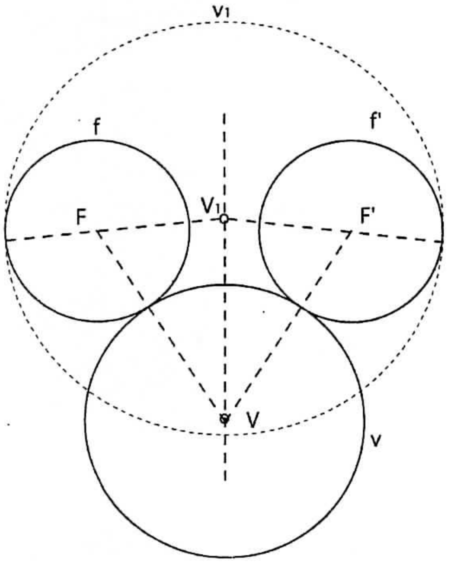
5) Trường hợp giới hạn đối với mệnh đề ở bài tập 13 hay biểu thức 3: đường tròn *f'* thu về một điểm nằm trên đường tròn *f*; quỹ tích các điểm là một đường thẳng.

6) Trường hợp giới hạn của biểu thức 2); đường tròn *f'* thu về điểm *F'*; đường tròn *v* tiếp xúc với đường thẳng *f* và đi qua F'; quỹ tích các điểm là đường Parabol có tiêu điểm *F* và đường chuẩn *f*.



Hình 12.1d. Đường Parabol như thế nào?

7) Trường hợp giới hạn của biểu thức 4: $r = r' = 0$; cả hai đường tròn *f* và *f'* thu về các điểm mà đường tròn *v* (biến thiên) đi qua; quỹ tích các điểm là đường thẳng.



Hình 12.1e

Ở đây có thể lên một số câu hỏi khác nữa.

Đối với 3: Các đường tiệm cận của Hypebol như thế nào, các tâm của Hypebol ở đâu? Rõ ràng, phương các đường tiệm cận và trị trí giao điểm của chúng do các đường tròn *f* và *f'* xác định, nhưng đó là gì? Và tại sao lại như thế?

Đối với 5: Đường thẳng (vô hạn) có phải là trường hợp giới hạn của Elíp không? Cũng đặt câu hỏi như trên đối với Hypebol. Hay, có thể là, một phần nào đó của đường thẳng là trường hợp giới hạn của Elíp và phần kia là trường hợp giới hạn của Hypebol?...

Những nhận xét bổ sung 1, 2, 4, 15 và 16 không cần phải làm sáng tỏ.

CHƯƠNG 13

Những nhận xét bổ sung 1, 2, 3 không cần làm sáng tỏ.

CHƯƠNG 14

1. Xấp xỉ $9\frac{2}{3}$ phút sau giữa trưa (kinh độ (tây) của tuyến "giữa" theo giờ tiêu chuẩn phương tây bằng 120^0).

2. Nếu 400 năm Gri-gô-ri liên tiếp tương ứng đúng 400 năm thiên văn, thì thời gian của một năm thiên văn bằng $\frac{97.366+303.365}{400}=365+\frac{97}{407}$ ngày, tức là 365 ngày 5 giờ 49 phút 12 giây; thời gian đó chỉ vượt quá cả thảy có 26 giây thời gian của năm tìm được theo các quan sát thiên văn. Sự chênh lệch không lớn: nó hình thành một ngày trong 3323 năm.

3. Vì $BD = BD_1$, $CD = CD_1$ nên điểm D thuộc giao của hai mặt cầu: bán kính BD_1 với tấm B và bán kính CD_1 với tâm C. Các mặt cầu này cắt nhau theo đường tròn nằm trong mặt phẳng vuông góc với đường thẳng BC, do đó vuông góc với cả mặt phẳng ngang chứa tam giác ABC. Vì vậy hình chiếu trực giao F của điểm D lên mặt phẳng nằm ngang thuộc đường vuông góc hạ từ điểm D_1 lên BC; các điểm D_2 và D_3 được liên kết với điểm D bằng cách tương tự.

4. Điểm F là tâm đẳng phương (định nghĩa về nó có thể tìm trong các sách giáo khoa hình học) của ba đường tròn được đánh dấu bằng các vòng cung nhỏ trên hình 14.1a, còn các đường thẳng D_1F, D_2F và D_3F là trục đẳng phương của từng cặp vòng tròn đó cắt nhau tại F.

5. Xem mục nhỏ 4, §6: Sự sáng tạo mô hình và những tư tưởng nảy sinh từ đó.

12. Các câu trả lời dưới đây có tính chất phác hoạ.

7a) Dùng các định lí côsin của hình học phẳng Ơ-clít (thông thường) và của hình học cầu, ta chuyển bài toán về chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} > \frac{-\cos b\cos c+\cos a}{\sin b\sin c}.$$

trong đó $0 < a < \pi$, $0 < b < \pi$, $0 < c < \pi$ và ba đoạn a, b và c là các cạnh của một tam giác nào đó. Nhờ các phép biến đổi đại số đơn giản, bất đẳng thức đó có thể suy ra từ điều: hàm $\frac{\sin x}{x}$ đơn điệu giảm khi x tăng từ 0 đến π; điều này có thể xem là có lí do các nguyên nhân xác định có tính chất hình học.

7b) Do tính liên tục, tam giác cầu "rất bé" có thể xem là "hầu phẳng" và hầu bằng nhau với ảnh của nó trên mặt phẳng, có cạnh cũng hầu như thế; từ đó suy ra rằng các góc tương ứng của hai tam giác đó cũng "hầu bằng nhau".

7c) *Phép chiếu nổi* mặt cầu (từ cực bắc của mặt cầu lên mặt phẳng xích đạo) bảo toàn góc.

7d) Định lí Ac-si-mét về diện tích của mặt đới cầu dẫn tới ánh xạ đơn giản bảo toàn diện tích.

7e) *Phép chiếu xuyên tâm* từ bán cầu lên mặt phẳng của tâm cầu chuyển các đường ngắn nhất của mặt cầu thành các đường ngắn nhất của mặt phẳng.

25. Phần dư cần tìm là đa thức bậc không cao hơn 1, tức là có dạng $ax + b$. Giả sử bài toán đã được giải và đã tìm được thương $q(x)$ của phép chia. Khi đó.

$$x^3 + x^5 + ... + x^{17} + x^{19} = (x^2 - 1)\,q(x) + ax + b;$$

đặt ở đây $x = 1$ và $x = -1$, ta được hai phương trình với ẩn là a và b:

$7 = a + b$, $-7 = -1 + b$.

Từ đó $b = 0$, $a = 7$, do đó phần dư cần tìm là $7x$.

Việc tất cả các mũ số 3, 5, 7,... 17, 19 trong ví dụ của ta đều là *các số nguyên tố* có thể gây ra một sự phản ứng nào đấy, nhưng thực ra điều đó không có liên quan gì với thực chất vấn đề; nếu thay các mũ số đó bằng bảy số dương lẻ tuỳ ý khác, thì kết quả không thay đổi. Điều này thấy được rõ ràng sau khi ta giải bài toán. Tuy nhiên trước khi giải nó, điều đó không nên xem là ngẫu nhiên và nó có thể đưa tới những giả thiết hoàn toàn phi lí.

26. 1) πt^2, 2) $\dfrac{\pi t^2}{4}$.

Các nhận xét bổ sung 6 - 11, 13 - 24, 27 - 29 không cần giải thích thêm.

CHƯƠNG 15

1. "Tìm hình có chu vi cho trước, có diện tích lớn nhất" được gọi là "bài toán đẳng chu". Nó có thể được đặt ra cho những lớp hình khác nhau. Đây là một số tài liệu dẫn:

Các tam giác: Toán học và những suy luận có lí.

Các hình chữ nhật: Giải một bài toán như thế nào? (Hãy nghiên cứu điều phỏng đoán của mình).

Các tứ giác: Toán học và những suy luận có lí.

Các đa giác có số cạnh cho trước: Toán học và những suy luận có lí.

Các hình phẳng: Toán học và những suy luận có lí.

2. Số đối xứng đối với a, b và c; việc kiểm tra nhờ vào những lí do về thứ nguyên.

3. 1) Hai đoạn mà d chia c tỉ lệ với các cạnh kề. Do đó

$$\left(\frac{ac}{a+b}\right)^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\frac{\gamma}{2},$$

$$\left(\frac{bc}{a+b}\right)^2 = b^2 + d^2 - 2bd\cos\frac{\gamma}{2},$$

Sau khi khử γ, ta có: $d^2 = \frac{ab\left[(a+b)^2 - c^2\right]}{(a+b)^2}$.

2) Nếu $a = b = c$, thì $d^2 = \frac{3a^2}{4}$.

Nếu $a^2 + b^2 = c^2$, thì $\frac{d}{a\sqrt{2}} = \frac{b}{a+b}$.

Tính đúng đắn của tỉ lệ thức đó rõ ràng từ sự đồng dạng của những tam giác dễ thấy (hãy xây dựng những tam giác đó).

Nếu $a = b$, thì $d^2 = a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2$,

Nếu $a + b = c$ thì $d = 0$.

4. Những điểm nằm bên trên cung ứng với các tam giác nhọn (chỉ có góc nhọn), còn những điểm nằm dưới nó ứng với các tam giác tù (có một góc tù).

5. Phép chiếu tâm của mặt ngoài của đa diện, lên một trong những mặt bên ω ("cửa sổ") của nó. Có thể lấy tâm chiếu là một điểm bất kì ngoài đa diện, đủ gần với các điểm trong của "cửa sổ" ω (xem Toán học và những suy luận có lí).

6. $\Sigma\Gamma_n = \Gamma$, $\Sigma B_n = B$

7. $\Sigma n\Gamma_n = \Sigma nB_n = 2C$.

8. Sử dụng các bài tập 6 và 7, định nghĩa trong 2, §6 và kết quả của 8, §6:

$$\Sigma(n-2)\,\Gamma_n = 2P - 2\Gamma = \sum\frac{\alpha}{\pi} = 2B - 4$$

9. Từ bài tập 7 và 6 suy ra:

$2C = \Sigma n\,\Gamma_n \geq 3\Sigma\,\Gamma_n = 3\Gamma$,

$2C = \Sigma n\,B_n \geq 3\Sigma\,B_n = 3B$.

Trong dòng thứ nhất, ta có đẳng thức khi và chỉ khi tất cả các mặt bên đều là các tam giác; trong dòng thứ hai - khi và chỉ khi từ mỗi đỉnh đều có ba cạnh đi ra.

10. *Chứng minh thứ nhất*. Ta xem bổ đề phát biểu sau đây là đã biết, nhưng dù sao thì sau này các bạn hãy chứng minh lấy.

Bổ đề. *Nếu như có thể chia một tập hợp các đại lượng nào đó thành các tập không giao nhau sao cho đối với mỗi tập con giá trị trung bình của các đại lượng nhỏ hơn a, thì giá trị trung bình của đại lượng của toàn tập hợp cũng nhỏ hơn a.*

Bổ đề vẫn còn đúng nếu như quan hệ "nhỏ hơn" (quan hệ $<$) được thay bằng một trong các quan hệ $\leq$, $>$ hay $\geq$. Ta hãy áp dụng bổ đề đó hai lần cho các mục 1 và 2.

1) Đối với mặt bên n giác, giá trị trung bình của góc (phẳng) bằng

$$\frac{(n-2)\pi}{n} = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\pi \geq \frac{\pi}{3}.$$

2) Tổng các góc phẳng của đa diện, hội tụ tại một đỉnh luôn luôn < 2π, còn số những góc phẳng như vậy ≥ 3. Do đó giá trị trung bình của góc phẳng đối với một đỉnh xác định của đa diện $< \frac{2\pi}{3}$.

Chứng minh thứ hai. Theo điểm 6, §6 và bài tập 7, giá trị trung bình của các góc phẳng bằng $\frac{\sum\alpha}{2C} = \frac{2\pi(C-\Gamma)}{2C} = \pi\left(1 - \frac{\Gamma}{C}\right)$ và do đó, theo bài tập 9, $\frac{\sum\alpha}{2C} \geq \frac{\pi}{3}$. Còn có đẳng thức khi tất cả các mặt bên đều là tam giác.

Mặt khác, theo định lí Ơ-le (xem điểm 8, §6) ta có:

$$\frac{\sum\alpha}{2C} = \frac{2\pi B - 4\pi}{2C} = \frac{\pi B}{C} - \frac{2\pi}{C}$$

và do đó, theo bài tập 9, $\frac{\sum\alpha}{2C} \geq \frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{C}$.

11. *Chứng minh thứ nhất*. Giá trị trung bình của góc của mặt bên *n* giác là

$\frac{(n-2)\pi}{n} = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\pi \geq \frac{2\pi}{3}$, ở đây ta giả thiết $n \geq 6$. Thành thử nếu tất cả các mặt bên có số cạnh bằng 6 hay lớn hơn thì giá trị trung bình của góc phẳng của đa diện $\geq \frac{2\pi}{3}$, điều không thể có được do bài tập 10.

Cách chứng minh thứ hai. Theo định lí Ơ-le, bài tập 9 và bài tập 7 ta có:

$12 = 6\Gamma - 2C + 6B - 4C \leq 6\Gamma - 2C = \Sigma(6-n)\Gamma_n$

$12 \leq 3\Gamma_3 + 2\Gamma_4 + \Gamma_5$,

thành thử ít nhất một trong ba số Γ_3, Γ_4 và Γ_5 phải dương.

12. 1) Nếu như tồn tại dù chỉ một mặt bên *n* giác, trong đó $n > 3$, thì có thể bằng các đường chéo chia nó thành $(n - 2)$ tam giác và sau đó thay bằng $(n - 2)$ mặt bên tam giác (số đó lớn hơn 1), đồng thời không làm thay đổi số *B*. Do đó số *C* có thể lấy giá trị cực đại chỉ trong trường hợp tất cả *C* mặt bên đều là tam giác.

2) Theo bài tập 9, $2C \geq 3\Gamma$ và có đẳng thức khi và chỉ khi $\Gamma_4 = \Gamma_5 = \ldots = 0$, $\Gamma = \Gamma_2$.

Thành thử $\Gamma + B = C + 2 \geq \frac{3}{2}\Gamma + 2, B \geq \frac{1}{2}\Gamma + 2, \Gamma \leq 2(B-2)$

và $C = \Gamma + (B-2) \leq 3(B-2)$ thêm vào đó ta có đẳng thức khi và chỉ khi tất cả các mặt bên đều là tam giác.

13. Do tương tự, hai cách giải của bài tập 12 (cùng với những giải thích tương ứng của chúng) cũng áp dụng được trong trường hợp này và cho ta:

$B \leq 2(\Gamma - 2)$, $\quad C \leq (\Gamma - 2)$,

đồng thời đẳng thức đạt được khi và chỉ khi từ mỗi đỉnh của đa diện đều có ba cạnh xuất phát.

Những bất đẳng thức đó có các ứng dụng lí thú. Chẳng hạn có thể kết hợp bất đẳng thức thứ hai với kết quả của bài tập 9: $\frac{C+6}{3} \leq \Gamma \leq \frac{3C}{3}$.

Với $C = 6$ ta có: $4 \leq \Gamma \leq 4$ từ ta có trường hợp tứ diện. Tuy nhiên với $C = 7$ ta có $\frac{13}{3} \leq \Gamma \leq \frac{14}{3}$ do đó Γ không thể là số nguyên. Thành thử ta đi tới kết luận là *không tồn tại đa diện lồi với 7 mặt bên*. Chính Ơ-le cũng đã chú ý tới sự kiện đó:

14.

1)	0	4	3	100	36
đối với	tứ diện (đều)	lục diện (đều)	bát diện (đều)	12 diện (đều)	20 diện (đều)

(hình lục diện đều là hình lập phương.

2)	$n(n-3)$	0	$1+\frac{n(n-3)}{2}$
đối với	lăng trụ n giác	chóp n giác	lưỡng chóp n giác
3)	$\frac{(\Gamma-2)(\Gamma-4)}{8}$	$\frac{\Gamma^2-5\Gamma+2}{2}$	$\frac{9\Gamma^2-42\Gamma+8}{8}$
với	$n = 3$	4,	5;

trường hợp $n > 5$ là không thể được (xem bài tập 11): với $n = 6, 7\ldots.$ vấn đề đặt ra không có nghĩa.

4) Khi biểu diễn D theo Γ_n (xem bài tập 7 và 8), ta có:

$$D = \frac{B(B-1)}{2} - C - \sum \frac{n(n-3)}{2}\Gamma_n = 1 - \frac{1}{4}\sum (2n-3)(n-2)\Gamma_n + \frac{1}{8}\left[\sum (n-2)\Gamma_n\right]^2$$

15.

1)	2)	3)
$\Sigma\delta = 3\pi$	2π	$\frac{5\pi}{2}$
$\Sigma\omega = 2\pi$	0	π

16. Sự thay đổi của cả hai tổng xét trong bài tập 15 có cùng một tính chất: trong tất cả hai trường hợp sự biến đổi của tổng $\Sigma\omega$ bằng hai lần sự thay đổi của tổng $\Sigma\delta$, ngoài ra:

$2\Sigma\delta - \Sigma\omega = 4\pi$.

Phải chăng điều đó đúng với một tứ diện bất kì(*)?

17. Đối chiếu bài tập 20.

18. Hãy mở rộng các trường hợp 1 và 3, của bài tập 15; về kết quả thì đối chiếu với bài tập 20.

19. Đối chiếu bài tập 20.

20.

	$2\Sigma\delta - \Sigma\omega$	Γ	B	C
Tứ diện	4π	4	4	6
Lập phương	8π	6	8	12
Chóp n giác	$(2n - 2)\pi$	$n + 1$	$n + 1$	$2n$
Lăng trụ n giác	$2n\pi$	$n + 2$	$2n$	$3n$
Lưỡng chóp n giác	$(2n - 4)\pi$	$2n$	$n + 2$	$3n$

Trong 3 đại lượng B, C và Γ chỉ có Γ tăng đơn điệu với sự tăng của hiệu $2\Sigma\delta - \Sigma\omega$.

21. $2\Sigma\delta - \Sigma\omega = 2\pi\Gamma - 4\pi$.

Để chứng minh, ta hãy biểu thị diện tích của phần mặt cầu, cắt bởi các mặt bên của góc đa diện tại đỉnh cho trước (góc khối) theo các góc nhị diện tại các cạnh xuất phát từ đỉnh đó. Nhớ rằng diện tích tam giác cầu với các góc α, β, γ bằng "số dư cầu" $\alpha + \beta + \gamma - \pi$. Từ đó suy ra biểu thức cho diện tích của đa giác cầu. Các bạn sẽ thu được biểu thức sau (sử dụng các bài tập 6 và 7):

$\Sigma\omega = 2\Sigma\delta - \Sigma\pi\,(n - 2)\,B_n = 2\Sigma\delta - 2\pi\,(C - B)$.

22. Đây là các câu trả lời thông thường (đúng): tam giác đều, hình vuông, n giác đều.

23. Thường là những câu trả lời, như ở bài tập 22 (những câu trả lời đó đúng).

26. Đây là các câu trả lời thông thường: tứ diện đều, bát diện đều, hình lập phương.

27. Đây là những câu trả lời thông thường: tứ diện đều, bát diện đều, lập phương.

28. Đường kính của lập phương cũng đồng thời là đường kính của hình cầu. Do đó nếu a là cạnh của hình lập phương thì $(2r)^2 = 3a^2$.

(Xem Giải một bài toán như thế nào?) Thành thử thể tích cần tìm bằng $a^2 = \dfrac{8\sqrt{3}r^3}{9}$.

29. Kí hiệu S là diện tích của tam giác đều cạnh r. Thể tích phải tìm bằng $\dfrac{2.6.Sr}{6} = \sqrt{3}r^3$.

(*) Có thể xem định lí nêu trong câu hỏi cuối cùng là sự tương tự không gian của định lí về tổng các góc của một tam giác ("định lí về tổng các góc của tứ diện").

Thành thử với trường hợp $B = 8$; ta thấy đáp số của bài tập 26 tưởng như hoàn toàn có lí lại là không đúng. (Còn đáp số đối với các trường hợp $B = 4$ và $B = 6$ là đúng; đối với đáp số thứ nhất, xem Toán học và những suy luận có lí).

30. Gọi S là h là diện tích và chiều cao mặt bên của tứ diện. Khi đó thể tích phải tìm (chia bát diện thành 8 tứ diện) được biểu diễn dưới dạng $V = \frac{8Sr}{3} = \frac{8r}{3}.\frac{h^2}{\sqrt{3}}$.

Do tính chất đối xứng, hình cầu tiếp xúc với tất cả các mặt bên của bát diện tại các tâm của những mặt bên đó. Thành thử h là cạnh huyền của tam giác vuông, đỉnh góc vuông trùng với tâm của khối bát diện và được chia bởi chiều cao của tam giác đó (có độ dài r) thành hai đoạn thẳng có các độ dài $\frac{h}{3}$ và $\frac{2h}{3}$. Từ đó $\frac{h}{3}.\frac{2h}{3} = r^2$.

Khử h, ta có: $V = 4\sqrt{3}r^3$.

31. Thể tích của hình chóp bằng $6\frac{r^2}{\sqrt{3}}2r = 4\sqrt{3}r^3$

Khi xét trường hợp $\Gamma = 8$ trong bài tập 27, vị tất ta đã mong đợi điều đó (các đáp số của ta đối với các trường hợp $\Gamma = 4$ và $\Gamma = 6$ trong bài tập 27 là đúng.)

32.

	Γ	B	C
Khối lập phương	6	8	12
Lưỡng chóp đều lục giác	12	8	18
Bát diện đều	8	6	12
Lăng trụ đều lục giác	8	12	18

Hãy so sánh các đa diện đều và các đa diện không đều - ("các đối thủ thua kém chúng"). Đương nhiên chúng ngang nhau về mặt số các yếu tố cho trước của đa diện (B trong cặp thứ nhất và C trong cặp thứ hai), thế nhưng về các phương diện khác, các mặt đa diện không đều xây dựng phức tạp hơn, chúng có nhiều mặt và cạnh hơn trong trường hợp thứ nhất và nhiều đỉnh và cạnh hơn trong trường hợp thứ hai. Phải chăng sự kiện đó có thể giải thích một phần nào cái thiếu sót mà ta đã nhận xét trong *nguyên lí thiếu các cơ sở đủ* để ưu tiên?

33. Là đa diện mà tất cả các mặt bên đều là tam giác (xem bài tập 12).

34. Là đa diện mà từ mỗi đỉnh có ba cạnh đi ra (xem bài tập 13).

35. Giữa khối lập phương và khối bát diện tồn tại mối quan hệ ngược của sự "đối ngẫu". Chính trong mối quan hệ với nhau như vậy có cả các "đối thủ" với chúng là các đa diện không đều (xem Toán học và những suy luận có lí). Điều đó cho phép phát biểu điều phỏng đoán là lời giải các bài toán 26 và 27 với cùng một số các yếu tố cho trước sẽ nằm chính trong các quan hệ (tô pô) ngược với nhau (xem các bài tập 33 và 34).

36. Ở đây thường được cho các đáp số, như trong bài tập 27 và ở đây trường hợp tổng quát cũng như vậy: đáp số "tự nhiên" đúng trong các trường hợp $\Gamma = 4$ và $\Gamma = 6$ và không đúng trong trường hợp $\Gamma = 8$ (xem Toán học và những suy luận có lí).

37. (Xten-pho, 1962). Ta cần tìm các giao điểm của hai Elíp bằng nhau, đối xứng với đường thẳng $x = y$. Hiệu của hai phương trình cho $x^2 = y^2$. Trong số 4 giao điểm

(6, 6), (-6, -6), (2, -2), (-2, 2)

thì hai giao điểm hoàn toàn đáp ứng nguyên lí thiếu các cơ sở đủ còn hai điểm thì không (xem bài tập 24).

38. Sau khi trừ các phương trình với nhau, ta có $x = y^2 = z^2$. Trong số 8 nghiệm:

(1; 1; 1), (-1; -1; -1),

(3; -3; -3), (-3; 3; 3), (-3; 3; -3),

(3; -3; 3), (-3; -3; 3), (3; 3; -3),

chỉ có hai nghiệm ứng với *nguyên lí thiếu các cơ sở đủ* để ưu tiên.

39. (Xten-pho, 1963). Hệ thống có cùng các nghiệm như trong trường hợp bài tập 38, tuy nhiên các đẳng thức $x^2 = y^2 = z^2$ ở đây thiết lập khó hơn.

42. Xem các bài tập 43 - 56.

43. 1^0) Bằng phương pháp đó (bằng cách kiểm tra các trường hợp riêng biệt) có thể khảo sát kết quả của một bài toán bất kì được viết "dưới dạng chữ"; xem các mục nhỏ 3, §4, chương 2; bài tập 72 chương 2; Giải một bài toán như thế nào? Phải chăng không thể kiểm tra kết quả? Xem Toán học và những suy luận có lí.

2) Trong khi kiểm tra công thức trong các trường hợp riêng, ta làm quen với công thức đó hơn, càng đi sâu hơn vào "cấu trúc của nó". Hơn nữa, việc phân tích như vậy có thể dùng làm minh hoạ cho một số ý chung quan trọng: chẳng hạn có thể nhận xét là tính tổng quát và thuận tiện cho ứng dụng là một trong các ưu điểm chính của công thức. Hơn nữa ta có thể nghiên cứu quá trình suy luận quy nạp có lí, tức quá trình nhờ đó đánh giá được lợi ích của điều khẳng định tổng quát trên cơ sở nghiên cứu những trường hợp của riêng nó. Tôi tin rằng, thầy giáo nào bỏ qua những tranh luận tương tự những tranh luận được mô tả trong §4 đã bỏ lỡ khả năng tuyệt vời có lợi cho sự phát triển tư duy của học sinh.

44. Mỗi điểm của miền, được biểu diễn trên hình 15.1a là một tam giác có dạng xác định nào đó. Thành thử hình 15.1a có thể cho học sinh làm quen với một trong các phương pháp ứng dụng các hình vẽ vào khoa học, chẳng hạn các giản đồ chỉ thị trong nhiệt động học. Ngoài ra hình 15.a còn cho được kinh nghiệm có ích trong sự giải thích hình học các bất đẳng thức tuyến tính.

45. Đây là một số sự kiện toán học có thể thu được khi nghiên cứu các phân số thập phân.

Cả ba loại phân số thập phân được xét là **các số hữu tỉ;** ngược lại, mọi số hữu tỉ đều có thể viết được dưới dạng phân số thập phân của một trong ba loại đó. Sự khác nhau giữa các loại đó được xác định bởi các thừa số nguyên tố trong mẫu số của số hữu tỉ, được biểu diễn bởi phân số thập phân: nếu như tất cả các số nguyên tố đó đều là ước của 10 thì phân số thập phân là hữu hạn, nếu như không có số nào là ước của 10 thì phân số thập phân là

tuần hoàn thuần tuý, nếu như trong số những số nguyên tố đó có ít nhất một số là ước của 10 và có ít nhất một số không là ước của 10 thì phân số thập phân là tuần hoàn tạp.

(Khi nói về mẫu số cho trước *b* của số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ ta giả thiết phân số $\frac{a}{b}$ là tối giản, tức *a* và *b* không có ước chung nào ngoài 1 và $b \geq 1$. Thêm vào đó ta đã bỏ qua hai trường hợp hiển nhiên: trường hợp $b = 1$ (trường hợp các số nguyên) và trường hợp các phân số thập phân vô hạn biểu thị các số hữu tỉ còn có thể được biểu diễn bằng các phân số thập phân hữu hạn).

Độ dài chu kì của phân số thập phân không phụ thuộc vào tử của số hữu tỉ.

Nếu mẫu số của số hữu tỉ là nguyên tố *p* thì độ dài chu kì là ước của $p - 1$. (Tổng quát hơn: độ dài chu kì của phân số, biểu thị số hữu tỉ với mẫu số *b* là ước của $\varphi(b)$: số các số nguyên dương không vượt quá *b* và nguyên tố với *b*. Có thể nói gì về các phân số có chu kì tạp?).

Nếu như mẫu số của số hữu tỉ là số nguyên tố, còn độ dài chu kì là một số chẵn thì mỗi chữ số thuộc nửa thứ hai của chu kì là số bổ sung vào 9 của chữ số tương ứng trong nửa thứ nhất của chu kì. (Chẳng hạn, đối với trường hợp $\frac{1}{7} = 0,(142857)$.

ta có: $1 + 8 = 9$, $4 + 5 = 9$, $2 + 7 = 9$.

Biết được những điều đó có thể giảm bớt nhiều thời gian khi tính các phân số thập phân).

Nếu mẫu số của phân số thập phân không chia hết cho 3, thì tổng các chữ số của chu kì chia hết cho 9. Chẳng hạn đối với trường hợp

$\frac{15}{41} = 0,(36585)$.

$3 + 6 + 5 + 8 + 5 = 27$.

Độc giả nên kiểm tra những khẳng định đó trên một số ví dụ khác nữa. Chứng minh những khẳng định đó không khó, nhưng đòi hỏi một số hiểu biết về lí thuyết số. Một trong những mục đích của chúng tôi là khơi dậy trong độc giả sự thích thú lí thuyết đó.

46. Quan sát:

$9.11 = 99$, $27.37 = 999$, $99.101 = 9999$, $271.369 = 99999$.

Giải thích: Do đó, nói riêng;

$27.\ 0,037037\ldots = 0,999999\ldots = 1$.

Ta không nên ngại ngùng trong việc đối chiếu các sự kiện nhỏ nhặt với những sự kiện cơ bản: sự đối chiếu như vậy rất có lợi. Bước đi của ta từ "quan sát" tới "giải thích", từ sự thiết lập "tính quy luật" tới sự thiết lập "quy luật" nằm trong cơ sở của nó, rất nhỏ bé so với bước đi từ Kê-ple tới Niu-tơn, nhưng về nội dung nó giống với sự quá độ đó (xem Toán học và những suy luận có lí).

47. Trừ ra khẳng định cuối cùng (về tổng các chữ số trong chu kì), mỗi kết quả của bài tập 45 ứng với kết quả song song thuộc hệ nhị nhân. Chẳng hạn, trong khai triển nhị phân $\frac{3}{5} = 0,(1001)$ (độ dài của chu kì bằng 5 - 1) và 1 + 0 = 1, 0 + 1 = 1.

48. *Các ưu điểm*: giải phóng khỏi công việc tính toán cồng kềnh và sự thực hành tiện lợi trong việc biến đổi các phân số thập phân và trong sự phân tích thành thừa số nguyên tố. *Nội dung sâu sắc*: mối quan hệ với khái niệm số thực ("còn tình hình sẽ ra sao với biểu diễn dưới dạng các phân số thập phân của số $\sqrt{2}$ hay số π"); nhập môn lí thuyết số. *Sự nâng cao trình độ văn hoá*: những khả năng rộng lớn cho những kết luận quy nạp đến tận việc xây dựng lí thuyết hoàn chỉnh bắt đầu từ cơ sở thực nghiệm.

Hãy chú ý tới chi tiết: bài tập 46 mở ra khả năng tuyệt vời khẳng định điều phỏng đoán trên cơ sở quan sát bằng chứng minh chặt chẽ và làm sáng tỏ tính quy luật nằm trong cơ sở của vấn đề đang xét [*]

49. Xem bài tập 50.

50. Trên hình 15.7a và 15.7b, hàm $t(n)$ biểu thị số điểm của hoành độ n. Nếu n = 1, 2, 4, 8, 16 thì $t(n) = 1$.

Nếu n là số nguyên tố lẻ $t(p) = 2$. Ngay sau những chỉ dẫn quan trọng đó (và sau khi so sánh hình 15.7a và hình15.7b) có thể còn cần tiếp tục làm thực nghiệm và khảo sát sâu hơn để phát hiện quy tắc: *$t(n)$ bằng số ước lẻ của n*. Độc giả nên chứng minh quy tắc đó. Có thể sử dụng những nhận xét sau:

1) Biểu diễn hình thang, xét trong bài tập 50, tương dương với đẳng thức

$2n = r(r + 2a - 1)$.

2) Trong hai thừa số r và $r + 2a - 1$, một thừa số là số chẵn và một thừa số là số lẻ; đồng thời thừa số lẻ phải là một ước của n.

3) Thừa số nhỏ trong hai thừa số, đó là số hạng r.

4) Nếu cho trước n và r thì a được xác định duy nhất.

51. Ta dùng kí hiệu $\tau(n)$ theo nghĩa đã chỉ rõ trong bài tập 13, chương 9, quy tắc phân biệt năm trường hợp sau:

1) Nếu n lẻ và không là số chính phương thì $s(n) = \frac{\tau(n)}{2}$.

2) Nếu n lẻ và là số chính phương thì $s(n) = \frac{\tau(n)+1}{2}$.

---

[*] Lí thuyết về các phân số thập phân tuần hoàn - một phần nội dung của lí thuyết số đã được Gao-xơ nghiên cứu. Ông không phải chỉ dừng lại ở việc lập một bảng đầy đủ các biểu diễn thập phân của 1000 số hữu tỉ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{1000}$ (một số phân số đó có chu kì dài hàng trăm chữ số!).

3) Nếu n chẵn và không chia hết cho 4 thì $s(n) = 0$.

4) Nếu n chia hết cho 4 và không là số chính phương thì $s(n)=\dfrac{\tau\left(\frac{n}{4}\right)}{2}$.

5) Nếu n chia hết cho 4 và là số chính phương thì $s(n)=\dfrac{\tau\left(\frac{n}{4}\right)+1}{2}$.

Để chứng minh quy tắc đó, để ý là

$n = (2a + 1) + (2a + 3) +\ldots+ (2a + 2r - 1) = r(r + 2a)$.

Nếu n chia hết cho 4, thì (hãy chú ý điều này) $\dfrac{n}{4}=\dfrac{r}{2}\left(\dfrac{r}{2}+a\right)$.

52. Hãy so sánh cách thức nghiên cứu của ta ở đây với cách thức nghiên cứu có thể xét ở bài tập 48. Trong trường hợp này bài toán mang tính chất nhân tạo hơn, nội dung kém sâu sắc, đoán nhận quy luật khó hơn, tuy nhiên, chứng minh, tuy là cồng kềnh, không đòi hỏi nhiều kiến thức chuẩn bị. Riêng tôi cho là phương pháp đó rất đáng chú ý.

Hình 15.7a cho một ví dụ hay về quan hệ nhị nguyên giữa hai đại lượng (giữa hai số nguyên dương n và r, trong đó n là tổng r số nguyên dương liên tiếp) và biểu diễn đồ thị của nó. Sự nghiên cứu sơ bộ những lược đồ đó có thể rất lợi khi đưa vào khái niệm tổng quát về "quan hệ nhị nguyên"). (*)

53. Có thể tính những đại lượng cần tìm, không sử dụng trực tiếp phép tính tích phân (chẳng hạn có thể dùng nguyên lí Ca-va-liê-ri hay quy tắc Gul-đen). Các kết quả được cho trong bảng sau:

	Lưỡng nón	Hình cầu	Hình trụ	
V	$\dfrac{2\pi a^3}{3}$	$\dfrac{4\pi a^3}{3}$	$2\pi a^2$	1: 2: 3
S	$2\sqrt{2}\pi a^2$	$4\pi a^2$	$6\pi a^2$	$\sqrt{2}$: 2: 3
A	$2a^2$	πa^2	$4a^2$	2: π: 4
P	$4\sqrt{2a}$	$2\pi a$	$8a$	$2\sqrt{2}$: π: 4
X_A	$\dfrac{a}{3}$	$\dfrac{4}{3\pi}a$	$\dfrac{a}{2}$	

(*) Quan hệ nhị nguyên trong một tập M các đối tượng nào đó là một quan hệ bất kì, phân tích ra các cặp đối tượng. Ta nói rằng những cặp đó "quan hệ" bởi hệ thức đó (ví dụ: quan hệ $<$ trong tập hợp các số; quan hệ "mẹ - con gái" trong tập hợp phụ nữ ...).

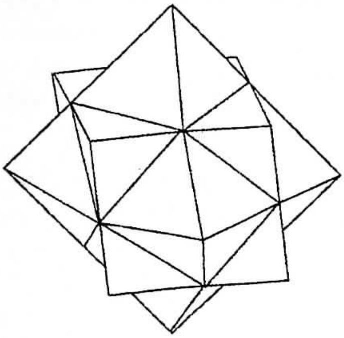
X_{P+}	$\frac{a}{2}$	$\frac{2}{\pi}a$	$\frac{3}{4}a$	$\frac{X_A}{X_P}=\frac{2}{3}$
	$S=\sqrt{2}\frac{dV}{da}$	$S=\frac{dV}{da}$	$S=\frac{dV}{da}$	
	$P=\sqrt{2}\frac{dA}{da}$	$P=\frac{dA}{da}$	$P=\frac{dA}{da}$	

54. Các cách phát biểu bài toán khá rộng và là hữu ý: các bài toán có nội dung "thực tế" thoạt đầu có thể đặt ra một số cái không xác định. Tôi nêu ra một vài điểm đáng thảo luận đặc biệt.

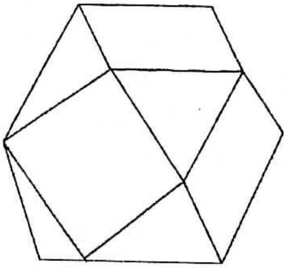
1) Các điểm của mỗi tập đang xét lấp đầy miền trong và mặt ngoài một *đa diện* nào đó (các hình 15.8a - 15.8c).

K - khối lập phương, các mặt bên là các hình vuông.

O - *khối bát diện đều*, các mặt bên là các tam giác đều (so sánh với bài tập 5, chương 5).



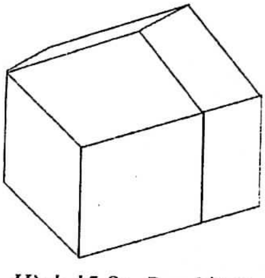
Hình 15.8a. Nhìn vào K và O, hãy hình dung ra P và Q



Hình 15.8b. Giao P

P - Giao của các đa diện *K* và *O*; ta gọi nó là khối lập phương - bát diện. Khối này có 14 mặt; 6 mặt là vuông, được cắt ra từ các mặt của khối lập phương *K*, còn 8 mặt là các tam giác đều, được cắt ra từ các mặt của khối bát diện *O*.

Q - chứa cả *K* và *O*; đó là tập lồi nhỏ nhất chứa cả hai đa diện đó - là bao lồi của chúng. Các mặt bên của *Q* là các hình thoi. Đa diện đó được gọi là *khối mười mặt hình thoi*.



Hình 15.8c. Bao lồi Q

Khi cắt đi khỏi *K* tám tứ diện nhau, ta đi từ *K* tới *P*.

Khi thêm vào *K* sáu khối chóp như nhau, ta chuyển từ *K* tới *Q*.

2) Đây là các đỉnh bốn của đa diện:

$K(\pm 1, \pm 1. \pm 1)$

$O\ (\pm 2, 0, 0)$, $(0, \pm 2, 0)$, $(0, 0, \pm 2)$,

$P\ (0, \pm 1, \pm 1)$, $(\pm 1, 0, \pm 1)$, $(\pm 1, \pm 1, 0)$,

Q gồm các đỉnh của cả hai đa diện K và O.

3) Bảng sau đây đặc trưng số các mặt bên (Γ) số đỉnh (B) và cạnh (C) của mỗi một trong các đa diện đang xét.

	Γ	B	C
K	6	8	12
O	8	6	12
P	6 + 8	12	24
Q	12	8 + 6	24

4) K, O và P nội tiếp trong Q. Tám trong số mười bốn đỉnh của Q là đỉnh của khối lập phương K, còn 6 đỉnh còn lại là các đỉnh của khối bát diện O; các tâm của 12 mặt của bao lồi Q là các đỉnh của đa diện P.

Mỗi cạnh của khối lập phương K tương ứng xác định với một cạnh nào đó của bát diện O. Chúng cắt nhau tại trung điểm của mỗi đoạn; chúng là các đường chéo của cùng một mặt bên của bao lồi Q; giao điểm của chúng là đỉnh của đa diện P.

5) Cả bốn đa diện có tính đối xứng giống nhau. Ta mô tả nó đối với đa diện quen thuộc là khối lập phương K.

Cả bốn đa diện đều có tính đối xứng giống nhau. Ta mô tả nó đối với đa diện quen thuộc là khối lập phương K.

Khối lập phương có các trục đối xứng thuộc ba loại khác nhau: sáu trục đối xứng nối các trung điểm của hai cạnh đối diện của K (mỗi một trong các trục đó là giao tuyến của hai mặt đối xứng): bốn trục đối xứng nối hai đỉnh đối diện của K (mỗi trục đó là giao tuyến của ba mặt phẳng đối xứng): ba trục đối xứng nối tâm của hai mặt đối diện của K (mỗi trục đó là giao tuyến của bốn mặt phẳng đối xứng). Tất cả 13 trục đối xứng đó đều đi qua tâm của khối lập phương. Trục đối xứng là giao tuyến của n mặt phẳng đối xứng là "trục đối xứng cấp n". Khi quay khối lập phương quanh trục đó một góc $\frac{360^0}{n}$ nó trở về chính nó.

Tâm của khối lập phương là *tâm đối xứng*; mọi mặt phẳng đối xứng và trục đối xứng đều đi qua tâm đó.

6) Hai cách chia không gian, được lí giải trong bài tập 55 ở chương 2, liên quan tới các đa diện K và Q. Trong cách thứ nhất mỗi hình cầu nội tiếp trong khối lập phương và những khối lập phương đó lấp đầy không gian không có các lỗ hổng và các vòm mái. Trong cách thứ hai mỗi hình cầu nội tiếp trong một khối mười mặt hình thoi và các khối mười mặt hình thoi đó cũng lấp đầy toàn bộ không gian không có chỗ trống và các vòm mái.

7) Để tính thể tích V của đa diện P và Q có thể bắt đầu từ khối lập phương. Nếu như đa diện ngoại tiếp hình cầu thì V và S liên hệ chặt chẽ với nhau:

K	$S = 24$	$V = \frac{1}{3}.1.S = 8$
O	$S = 16\sqrt{3}$	$V = \frac{1}{3}.\frac{2}{\sqrt{3}}.S = \frac{32}{3}$
P	$S = 12 + 4\sqrt{3}$	$V = \frac{20}{3}$
Q	$S = 24\sqrt{2}$	$V = \frac{1}{3}.\sqrt{2}.S = 16$

8) Ví dụ này là minh hoạ tốt khi đưa vào một số khái niệm chung: giải hệ bất phương trình tuyến tính, các giao và bao lồi của các vật thể lồi, sự đối xứng trong không gian,...

Một số vấn đề khó: có tồn tại hay không những cặp đa diện khác có quan hệ với nhau tương tự như khối lập phương và khối bát diện? Những đa diện nào khác có thể lấp đầy không gian?...

55. Với $n = 1, 2, 3\ldots$

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^n = \sqrt{m+1} - \sqrt{m}$$

trong đó m là số nguyên dương, phụ thuộc vào n một cách xác định. Hãy chứng minh điều đó (không có gì!) bằng phương pháp quy nạp.

56. Giả sử a, b và D là những số nguyên dương, D không là số chính phương và $a^2 = b^2D = 1$

chẳng hạn $a = 2$, $b = 1$, $D = 3$. Giả sử n là một số nguyên dương: khi đó tồn tại hai số nguyên dương A và B sao cho $\left(a - b\sqrt{D}\right)^n = A - B\sqrt{D}$.

Từ đó suy ra $\left(a + b\sqrt{D}\right)^b = A + B\sqrt{D}$.

$$A^2 - B^2D = \left(a + b\sqrt{D}\right)^n\left(a - b\sqrt{D}\right)^n = \left(a^2 - b^2D\right)^n = 1,$$

và $\left(a - b\sqrt{D}\right)^n = \sqrt{A^2} - \sqrt{B^2D} = \sqrt{A^2} - \sqrt{A^2-1}$.

Chỉ cần những thay đổi nhỏ để mở rộng những kết quả của bài tập 55 một cách tương tự hay hợp nhất với bài tập này thành một.

Các nhận xét của các bài tập 24, 25, 40, 41, 57 và 58 không cần giải thích.

MỤC LỤC

Lời người dịch	3
Lời tựa	4
Mấy lời khuyên và chỉ dẫn	8
Phần I. Các phương pháp đặc biệt	12
Chương 1. phương pháp hai quỹ tích	12
§1. Dựng hình	12
§2. Từ ví dụ dẫn đến phương pháp	13
§3. Các ví dụ	14
§4. Giả sử rằng bài toán đã giải xong	15
§5. Phương pháp đồng dạng	18
§6. Các ví dụ	19
§7. Phương pháp hình phụ	22
Bài tập và chú thích bổ sung cho chương 1	23
Chương 2. Phương pháp Đề-các	30
§1. Đề-các và quan niệm về phương pháp toàn năng	30
§2. Bài toán nhỏ	30
§3. Lập phương trình	34
§4. Những bài toán ở trường	36
§5. Các ví dụ hình học	39
§6. Ví dụ trong vật lí	43
§7. Ví dụ về một bài toán nát óc	45
§8. Những ví dụ rắc rối	46
Bài tập và chú thích bổ sung cho chương 2	49
Chương 3. Phép đệ quy	67
§1. Lịch sử một phát minh nhỏ	67
§2. Trời cho	69
§3. Dù sao nó cũng đáng được chú ý	71
§4. Phép đệ quy	72
§5. A-BRA-CA-ĐA-BRA	74

§6. Tam giác Pát-xcan 76
§7. Phép quy nạp toán học 78
§8. Tìm tòi những phương pháp mới 80
§9. Quan sát, khái quát hoá, chứng minh và chứng minh lại theo lối mới 81
Bài tập và chú thích bổ sung cho chương 3 83
Chương 4. Phương pháp chồng 106
§1. Phép nội suy 106
§2. Một số trường hợp riêng 108
§3. Giải bài toán tổng quát bằng cách tổ hợp các lời giải riêng 109
§4. Phương pháp chồng 110
Bài tập và chú thích bổ sung cho chương 4 112
Phần II. Tiến tới một phương pháp tổng quát 119
Chương 5. Bài toán 119
§1. Bài toán là gì? 119
§2. Phân loại các bài toán 121
§3. Bài toán tìm tòi 121
§4. Bài toán chứng minh 123
§5. Các thành phần của ẩn, các khoản điều kiện 124
§6. Hãy tìm một quy trình thích hợp 125
Bài tập và chú thích bổ sung cho chương 5 126
Chương 6. Mở rộng phạm vi áp dụng phương pháp 131
§1. Mở rộng phạm vi áp dụng phương pháp Đề-các 131
§2. Mở rộng phạm vi áp dụng phương pháp hai quỹ tích 134
§3. Nên bắt đầu từ khoản nào của điều kiện 140
§4. Mở rộng lĩnh vực áp dụng phép đệ quy 143
§5. Liên tiếp chiếm lĩnh các ẩn 147
Bài tập và chú thích bổ sung cho chương 6 147
Chương 7. Biểu diễn hình học quá trình giải một bài toán 156
§1. Ẩn dụ 156
§2. Bài toán là gì? 157
§3. Phải có cái "ý"! 158
§4. Phát triển "ý" 159

§5. Trình bày lời giải 161
§6. Những thước phim quay chậm 162
§7. Vài lời về những chuyện sau này 164
§8. Kế hoạch và chương trình 164
§9. Những bài toán nằm trong một bài toán 165
§10. Nảy ra "ý" 165
§11. Công việc trí óc 165
§12. Quy luật của trí tuệ 166
Bài tập và chú thích bổ sung cho chương 7 166
Chương 8. Kế hoạch và chương trình 175
§1. Lập kế hoạch là một phương pháp giải bài toán 175
§2. Một phương pháp tổng quát hơn 176
§3. Chương trình 177
§4. Lựa chọn giữa nhiều kế hoạch 178
§5. Kế hoạch và chương trình 180
§6. Phương pháp kế hoạch 181
Bài tập và chú thích bổ sung cho chương 8 181
Chương 9. Những bài toán nằm trong một bài toán 189
§1. Những bài toán phụ 189
§2. Những bài toán tương đương: phép quay hai chiều 190
§3. Chuỗi bài toán tương đương 191
§4. Những bài toán phụ nhiều hiệu quả hơn và ít hiệu quả hơn: phép quay một chiều 192
§5. Những bài toán phụ gián tiếp 193
§6. Giúp đỡ một phần, giúp đỡ về phương pháp, thúc đẩy, hướng dẫn, thực hành. 194
Bài tập và chú thích bổ sung cho chương 9 199
Chương 10. Nảy ra ý 208
§1. Bùng lên ánh sáng 208
§2. Một ví dụ 208
§3. Những nét đặc trưng của một ý hay 211
§4 . Sự lệ thuộc của " ý" vào dịp may tình cờ 212
Bài tập và chú thích bổ sung cho chương 10 213

Chương 11. Công việc trí óc 214
§1. Chúng ta suy nghĩ như thế nào? 214
§2. Khát vọng giải được bài toán 214
§3. Xu hướng của tư duy 215
§4. Tiếp cận với lời giải 215
§5. Đoán trước 216
§6. Khu vực tìm tòi 217
§7. Những quyết định trung gian 217
§8. Huy động và tổ chức 218
§9. Nhận biết và hồi tưởng 219
§10. Bổ xung và phân nhóm lại 219
§11. Cách li và liên hợp 220
§12. Biểu đồ 220
§13. Cái bộ phận gợi lên cái toàn bộ 223
Bài tập và chú thích bổ sung cho chương 11 225
Chương 12. Kỉ luật trí tuệ 229
§1. Phải suy nghĩ như thế nào? 229
§2. Tập trung chú ý vào mục đích 229
§3. Đánh giá các triển vọng 230
§4. Thăm dò: Tìm cách thức xử lí 231
§5. Thăm dò: bài toán có chăng một khía cạnh nhiều triển vọng hơn? 232
§6. Thăm dò: tìm những kiến thức có ích 233
§7. Thăm dò: có thể là cần đánh giá lại tình hình chăng? 234
§8. Nghệ thuật nêu câu hỏi 235
Bài tập và chú thích bổ sung cho chương 12 236
Chương 13. Các quy luật của sự khám phá, phát hiện 242
§1. Các quy tắc thường khác nhau 242
§2. Tính hợp lí 243
§3. Tiết kiệm nhưng không cố chấp 244
§4. Kiên trì nhưng phải mềm dẻo 244
§5. Các quy tắc ưu tiên 245
§6. Các bộ phận của bài toán 246

§7. Những kiến thức có ích 247
§8. Các bài toán phụ 248
§9. Tóm tắt 248
Bài tập và chú thích bổ sung cho chương 13 249
Chương 14. Về học tập, giảng dạy và học cách giảng dạy 251
§1. Dạy học không phải là khoa học 251
§2. Mục đích dạy học 252
§3. Dạy học là một nghệ thuật 252
§4. Ba nguyên lí học tập 254
§5. Ba nguyên lí dạy học 256
§6. Ví dụ 258
§7. Học giảng dạy như thế nào? 263
§8. Vị trí của thầy giáo 266
Bài tập và chú thích bổ sung cho chương 14 271
Chương 15. Phỏng đoán và phương pháp khoa học 296
§1. Công tác nghiên cứu ở trình độ phổ thông 296
§2. Ví dụ 296
§3. Thảo luận 298
§4. Thêm một ví dụ nữa. 298
§5. Biểu diễn đồ thị của phép suy luận quy nạp 299
§6. Một ví dụ trong lịch sử 301
§7. Phương pháp khoa học: hãy phỏng đoán và hãy thử xem 307
§8.Một số đặc điểm của các bài toán " có tính chất nghiên cứu khoa học" 308
§9. Kết luận 309
Bài tập và chú thích bổ sung cho chương 15 309
Lời giải các bài tập 323

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung :

Phó Tổng biên tập PHAN XUÂN THÀNH

Giám đốc Công ti CP Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội PHAN KẾ THÁI

Biên tập nội dung:

NGUYỄN THỊ NGUYÊN THUÝ

Trình bày bìa:

HOÀNG MẠNH DỨA

Sửa bản in:

PHẠM THỊ THANH NAM

Chế bản:

NGUYỄN THỊ NGUYÊN THUÝ

SÁNG TẠO TOÁN HỌC

Mã số: 8I695H0-ĐTH

In 1.000 cuốn (QĐ69TK), khổ 17 x 24 cm, tại công ty TNHH In & TM Sông Lam. Số in: 1081. Giấy phép xuất bản số: 40-2010/CXB/87-10/GD. In xong và nộp lưu chiểu tháng 8 năm 2010.